I1 - Probabilités - Année 2023-2024
Corrigé du TD de probabilités n° 1
Apprendre à compter.

Permutations

Exercice n° 1: En supposant qu'il n'y a pas de répétitions,

i. combien de nombres de trois chiffres peut-on former à l'aide des six chiffres $2, 3, 5, 6, 7$ et 9 ?

ii. Combien de ces nombres sont inférieurs à 400 ?

iii. Combien de ces nombres sont pairs ?

iv. Combien de ces nombres sont impairs ?

v. Combien de ces nombres sont des multiples de 5 ?

Dans chaque cas considérons les 3 cases : $\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$ représentant un nombre arbitraire, et dans chacune d'elle écrivons le nombre de chiffres que l'on peut y placer.

i. La case de gauche peut-être occupée de 6 manières différentes ; celle du milieu peut-être remplie de 5 manières différentes, et celle de droite de 4 manières différentes. De sorte qu'il y a $6 \times 5 \times 4 = 120$ nombres répondants à la questions $\left(A_6^3\right)$.

ii. La case de gauche ne peut-être occupée que de deux façons, par 2 ou 3, puisque chaque nombre doit être plus petit que 400 ; la du milieu peut-être remplie de 5 façons ; et la case de droite de 4 façons. Il y a ainsi $2 \times 5 \times 4 = 40$ nombres répondants à la questions.

iii. La case de droite ne peut-être occupée que de deux façons, par 2 ou 6, puisque les nombres doivent être pairs. Il y a ainsi $5 \times 4 \times 2 = 40$ nombres répondants à la questions.

iv. La case de droite ne peut-être occupée que de quatre façons, par $3, 5, 7$ ou 9, puisque les nombres doivent être impairs. Il y a ainsi $5 \times 4 \times 4 = 80$ nombres répondants à la questions.

v. La case de droite ne peut-être occupée que d'une seule façon, par 5, puisque les nombres doivent être des multiples de 5. Il y a ainsi $5 \times 4 \times 1 = 20$ nombres répondants à la questions.

Exercice n° 2: De combien de façons différentes peut-on répartir un groupe de 7 personnes,

i. sur une rangée de 7 chaises ?

ii. Autour d'une table ronde ?

i. Il y a 7 choix pour la première chaises, 6 pour le deuxième, ..., une pour la dernière : $7! = 5\,040$

ii. La première personne peut s'asseoir à n'importe quelle place de la table. Les six autres peuvent alors prendre les places $6! = 720$ façons différentes.

Exercice n° 3:

i. De combien de façons différentes, 3 garçons et 2 filles peuvent-ils prendre place sur un banc ?

ii. De combien de façons peuvent-ils s'asseoir si les garçons s'assoient les uns à côté des autres et s'il en est de même pour les filles ?

iii. De combien de manières différentes peuvent-ils s'asseoir si et seulement les filles s'assoient l'une à côte de l'autre ?

i. Les cinq personnes peuvent prendre place de $5! = 120$ façons.

ii. Il y a deux façons de distribuer les places selon le sexe : GGGFF ou FFGGG. Dans chacun de ces cas, les garçons peuvent s'asseoir de $3!$ façons différentes, et les filles de $2!$ façons. Il y a ainsi $2 \times 3! \times 2! = 24$ façons.

iii. Il y a 4 façons de distribuer les places selon le sexe : FFGGG, GFFGG, GGFFG, ou GGGFF. Il y a ainsi $4 \times 3! \times 2! = 48$ façons.

Exercice n° 4: Pour communiquer,

i. un appareil utilise 6 LED alignés. Combien de signaux peut-on former si chaque LED peut-être éteinte ou allumer ?

ii. On utilise six drapeaux. Combien de signaux peut-on former avec 4 drapeaux rouges et 2 bleus ?

i. Il y a $\underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{\text{6 fois}} = 2^6 = 64$ signaux différents.

ii. C'est une permutation avec répétitions. Il y a $\dfrac{6!}{4!2!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{4!2!} = 3 \times 5 = 15$ signaux différents.

Exercice n° 5: Combien y a-t-il d'anagrammes du mot [i.] math ? [ii.] Unilasalle ?

i. Il y a $4! = 24$ anagrammes de « math » .

ii. C'est une permutation avec répétitions des trois « l » et deux « a » . Il y a $\dfrac{10!}{3!2!} = 302\ 400$ anagrammes.

Exercice n° 6: Sachant que les personnes de même nationalité s'asseyent les unes à côté des autres, de combien de façons 3 Américains, 4 Français, 4 Danois, et 2 Italiens peuvent-ils prendre place sur [i.] un banc ? [ii.] Une table ronde ?

i. Il y a $4!$ façons de ranger les 4 nationalités sur un banc. Dans chaque cas, les 3 Américains peuvent se placer de $3!$ manières différentes, les 4 Français de $4!$ manières différentes, les 4 Danois de $4!$ manières différentes, et enfin les 2 Italiens de $2!$ manières différentes. Il y a ainsi $4! \times 3! \times 4! \times 4! \times 2! = 165\ 888$ façons de les placer.

ii. Il y a $3!$ façons de ranger les 4 nationalités sur une table ronde. Il y a donc $3! \times 3! \times 4! \times 4! \times 2! = 41\ 472$ façons de les placer.

Arrangements

Exercice n° 7: Détermine n quand [i.] $A_n^2 = 72$ [i.] $A_n^4 = 42A_n^2$

i. $A_n^2 = n(n-1)$ d'où $n^2 - n = 72$ ou $n^2 - n - 72 = 0$. $\Delta = 289$ et $n_1 = \dfrac{1+\sqrt{289}}{2} = \dfrac{1+17}{2} = 9$ et $n_2 = \dfrac{1-17}{2} = -8$. L'entier n est positif donc $n = 9$.

ii. $A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) = A_n^2(n-2)(n-3)$ donc $(n-2)(n-3) = 42$ soit $n^2 - 5n - 36 = 0$. $\Delta = 289$ et $n_1 = \dfrac{5+\sqrt{169}}{2} = \dfrac{5+13}{2} = 9$ et $n_2 = \dfrac{5-13}{2} = -4$. L'entier n est positif donc $n = 9$.

Exercice n° 8:

i. Douze candidats se présentent aux élections d'un conseil d'administration comportant huit places. La liste des élus est publiée par ordre alphabétique. Combien y a-t-il de liste possibles ? $A_{12}^8 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 19\ 958\ 400$

ii. De combien de façons peut-on placer 4 dossiers différents dans 15 casiers différents ?

$A_{15}^4 = 15 \times 14 \times 13 \times 12 = 32\ 760$

iii. Combien de nombres de trois chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 5, 6, 7, 8, 9, sans les répéter ?

$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

iii. Combien de nombres de trois chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 5, 6, 7, 8, 9, en les répétant ?

$5^3 = 125$

Combinaisons formule du binôme et poker

Exercice n° 9:

1. Dans le développement de $(x-y)^9$ quel est le coefficient du monôme x^4y^5 ? Il y a $\binom{9}{4}$ façons de choisir 4 facteurs $(x-y)$ pour x. Le monôme est donc $\binom{9}{4}x^4(-y)^5 = -\dfrac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2}x^4y^5 = -126x^4y^5$

2. Dans le développement de $(x-y+2z)^9$ quel est le coefficient du monôme $x^4y^2z^p$?

   $4+2+p = 9$ d'où $p = 3$. Il y a $\binom{9}{4}$ façons de choisir 4 facteurs $(x-y)$ pour x, puis $\binom{5}{2}$ façons de choisir 2 facteurs $(x-y)$ pour y parmi les 5 facteurs restants.

   Le monôme est donc $\binom{9}{4} \times \binom{5}{2} x^4(-y)^2(2z)^3 = \dfrac{9\times 8\times 7\times \cancel{6}}{\cancel{4}\times \cancel{3}\times \cancel{2}} \times \dfrac{5\times \cancel{4}}{2} \times 2^3x^4y^2z^3 =$

   $$= 9\times 4\times 7\times 5\times 2^3 \times x^4y^2z^3 = 10\ 080\, x^4y^2z^3$$

Exercice n° 10: On considère un jeu de 52 cartes : 13 valeurs sont 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R, ou As(1) chacune dans les 4 couleurs Piques, Cœur, Trèfle, ou Carreau.

1. Combien y-a-t-il de mains de 5 cartes ? $\binom{5}{52} = \dfrac{52\times 51\times \ldots \times 48}{5!} = 2\ 598\ 960$

2. Dans une main de cinq cartes :

   (a) Quelle est la probabilité d'avoir une quinte flush royale ? Il y a 4 couleurs donc 4 quintes flush royales possibles : $P = \dfrac{4}{2\ 598\ 960} = \dfrac{1}{649\ 740} \simeq 0,000154\%$

   (b) Quelle est la probabilité d'avoir une quinte flush ? Une quinte flush qui ne soit pas royale ?

   - Cinq cartes qui se suivent de la même couleur :

     (1,2,3,4,5) (2,3,4,5,6) (3,4,5,6,7) ... (10,V,D,R,AS)

Pour chaque couleur, il y a 10 combinaisons : $P = \dfrac{10 \times 4}{2\ 598\ 960} = \dfrac{1}{64\ 974} \simeq 0,00154\%$

- Cinq cartes qui se suivent de la même couleur qui ne soit pas une quinte flush royale :

$$(1,2,3,4,5)\ (2,3,4,5,6)\ (3,4,5,6,7) \ldots (9,10,V,D,R)$$

Pour chaque couleur, il y a 9 combinaisons : $P = \dfrac{9 \times 4}{2\ 598\ 960} = \dfrac{3}{216\ 580} \simeq 0,00139\%$

(c) Quelle est la probabilité d'avoir une quinte (qui peut-être royale) ? Une quinte qui ne soit pas une quinte flush ?

- **Une quinte** (5 cartes qui se suivent) : Il y a 10 suites de valeurs possibles, les couleurs étant différentes, il y a 4^5 façons de choisir les couleurs.

$$P = \frac{10 \times 4^5}{2\ 598\ 960} = \frac{10\ 240}{2\ 598\ 960} = \frac{128}{32\ 487} \simeq 0,394\%$$

- **Une quinte qui ne soit pas une quinte flush** : Il y a 10 suites de valeurs possibles, les couleurs étant différentes, il y a $4^5 - 4$ façons de choisir les couleurs.

$$P = \frac{10 \times (4^5 - 4)}{2\ 598\ 960} = \frac{10\ 200}{2\ 598\ 960} = \frac{5}{1\ 274} \simeq 0,392\%$$

(d) Quelle est la probabilité d'avoir un carré ?

Quatre cartes de même valeur exactement :

Il y a 13 manières de choisir les 4 cartes du carré. Pour chaque choix de carré, il reste 12 valeurs $\times$ 4 couleurs choix possibles pour la cinquième carte : $P = \dfrac{13 \times 12 \times 4}{2\ 598\ 960} = \dfrac{624}{2\ 598\ 960} = \dfrac{1}{4\ 165} \simeq 0,024\%$

(e) Quelle est la probabilité d'avoir deux paires de valeurs différentes sans brelan ?

Autrement dit, deux paires qui ne soient ni un carré ni un full.

XX YY Z où X,Y, et Z sont des valeurs différentes.

Il y a $\dbinom{13}{2} = 78$ manières de choisir la valeurs des deux paires. Pour chacune des paires, il y a $\dbinom{4}{2} = 6$ façons de choisir leur couleur. Les deux paires étant choisit, la cinquième carte doit avoir une valeur différentes, il y a $(13 - 2) \times 4 = 44$ manières de la choisir.

$$P = \frac{78 \times 6^2 \times 44}{2\ 598\ 960} = \frac{123\ 552}{2\ 598\ 960} = \frac{198}{4\ 165} \simeq 4,754\%$$

(f) Quelle est la probabilité d'avoir un full ?

Le brelan et la paire ont forcément des couleurs différentes.

Pour le brelan, il y a 13 valeurs possibles avec $\dbinom{4}{3} = \dbinom{4}{1} = 4$ couleurs possibles. Pour la paire, il y a 12 valeurs possibles avec $\dbinom{4}{2} = 6$ couleurs possibles.

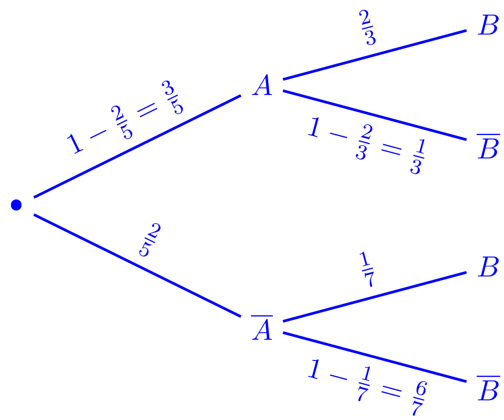
$P = \dfrac{13 \times 4 \times 12 \times 6}{2\ 598\ 960} = \dfrac{3\ 744}{2\ 598\ 960} = \dfrac{6}{4\ 165} \simeq 0,144\%$

Lexique : Cinq cartes qui se suivent est une **quinte**. Cinq cartes de même couleur est un **flush**. Cinq cartes qui se suivent de la même couleur est une **quinte flush**. Quatre cartes de même valeur est un **carré**. Une **Quinte Flush Royale** est composée de : As, Roi, Dame, Valet, 10, tous de la même couleur. Trois cartes de mêmes valeurs est un **brelan**. Deux cartes de mêmes valeurs est une **paire**. Un Brelan et une paire forme un **full**.

I1 - Probabilités - Année 2023-2024
Corrigé du TD de probabilités n° 2
Conditionnement et probabilités bayésiennes

ÉSÈRCIZIU n° 1 : Pour tracer une route en Corse, on lâche un âne dans le maquis. Si l'âne refuse de travailler, on fait venir des énarques du continent. La route tracée par l'âne atteint son but deux fois sur trois, celle des énarques une fois sur sept. L'âne refuse de travailler deux fois sur cinq.

1. Calcule la probabilité pour que la route atteigne son but.



On note

- A l'évènement : « la route est racée par l'âne. »
- B l'évènement : « la route atteint son but. »

$$P(B)=P(A)P_A(B)+P_{\overline{A}}(B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{16}{35}$$

2. La route est faite, calcule la probabilité qu'elle ait été tracée par l'âne.

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\times P_A(B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}}{\frac{16}{35}}=\frac{2}{5}\times\frac{35}{16}=\frac{7}{8}$$

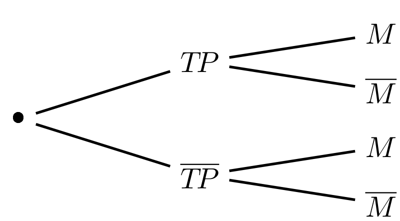
3. La route n'atteint pas son but, calcule la probabilité qu'elle ait été tracée par des énarques.

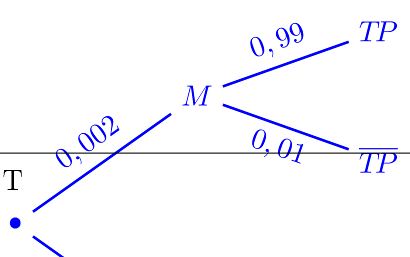
$$P_{\overline{B}}(\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{6}{7}}{1-\frac{16}{35}}=\frac{2}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{35}{19}=\frac{12}{19}$$

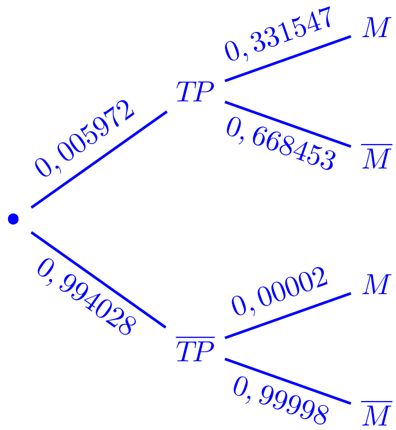
Exercice n° 2: Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie touche deux individus sur mille. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage :

- si une personne est malade (évènement M), le test est positif à 99% (vrai positif). ;
- Si une personne n'est pas malade, le test est positif (évènement TP) à 0,4% (faux positif).

Recopie et complète l'arbre de probabilités suivant :
Les probabilités seront arrondies à 10^{-6} près.

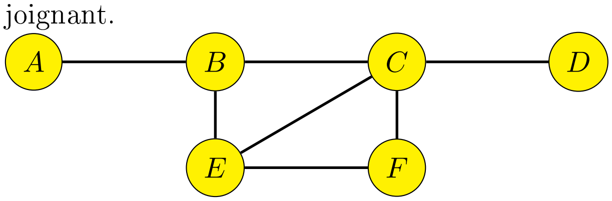






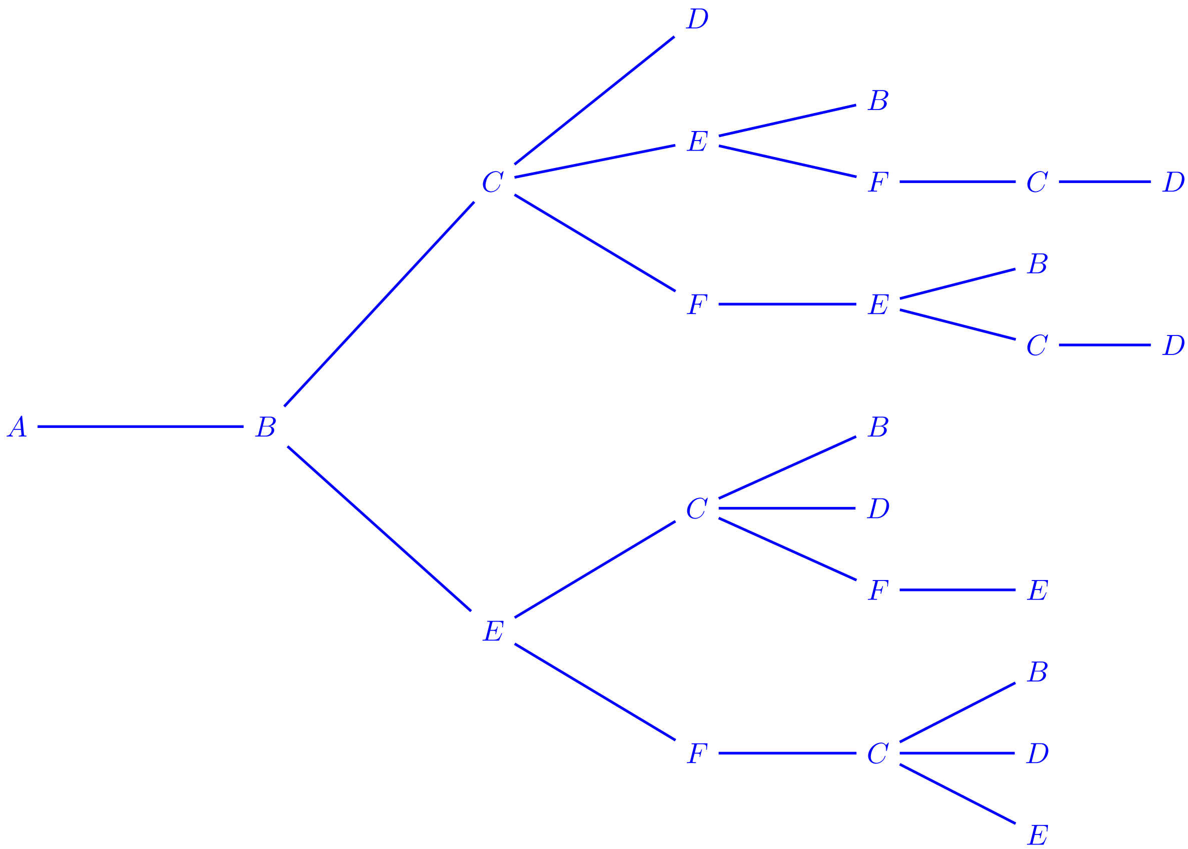
- $P(TP) = 0,002 \times 0,99 + 0,002 \times 0,004 = 0,005972$
- $P_{TP}(M) = \dfrac{P(TP \cap M)}{P(TP)} = \dfrac{0,002 \times 0,99}{0,005972} \simeq 0,331547$
- $P_{TP}\left(\overline{M}\right) \simeq 1 - 0,331547 = 0,668453$
- $P\left(\overline{TP}\right) = 1 - 0,005972 = 0,994028$
- $P_{\overline{TP}}(M) = \dfrac{P(\overline{TP} \cap M)}{P(\overline{TP})} = \dfrac{0,002 \times 0,01}{0,994028} \simeq 0,000020$
- $P_{\overline{TP}}\left(\overline{M}\right) \simeq 1 - 0,000020 = 0,99998$

Exercice n° 3: Dans le diagramme suivant, A, B, C, D, E, F sont des îles, et les segments sont des ponts les joignant.



Un touriste part de A et va d'île en île. Il s'arrête pour déjeuner quand il ne peut plus continuer, sans traverser deux fois le même pont. Quel est le nombre de chemins qu'il peut prendre avant de déjeuner ?

Le diagramme correspondant est le suivant :



Il y a 11 chemins.

Exercice n° 4: Dans un tournoi d'exhibition de tennis Gaël Monfils doit affronter Daniil Medvedev et Rafael Nadal. Gaël Monfils affrontera ces deux adversaires en trois sets successifs où ses deux adversaires alterneront. La probabilité que Gaël Monfils batte Daniil Medvedev est p, celle qu'il batte Rafael Nadal est q. Au vu du classement ATP, on suppose que $p > q$.

On note G_i l'évènement Gaël Monfils gagne le i-ème set et G l'évènement : « Gaël Monfils sort vainqueur du tournoi ». Vous construirez un arbre où vous ne développerez que les chemins où Gaël Monfils sortira vainqueur du tournoi.

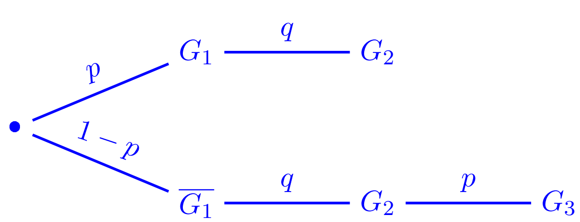
1. Règlement n° 1 : Pour remporter le tournoi, Gaël Monfils devra remporter deux sets consécutifs.

   (a) Ecris avec le formalisme mathématiques de la théorie des ensemble l'évènement G à partir des évènements G_i. $G = \left(G_1 \cap G_2\right) \cup \left(G_2 \cap G_3\right)$

   (b) Quel adversaire doit-il choisir d'affronter en premier pour remporter ce tournoi ?

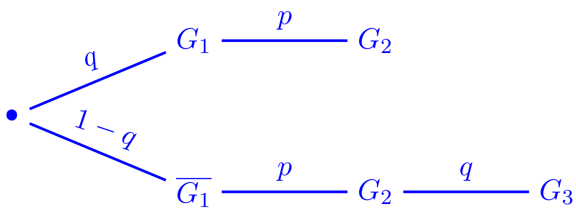
Pour une succession Medvedev-Nadal-Medvedev

$P(G_M) = pq + (1-p)qp$



On note G_M la probabilité que Gaël Monfils remporte le tournoi s'il commence par affronter Medvedev.

Pour une succession Nadal-Medvedev-Nadal



On note G_N la probabilité que Gaël Monfils remporte le tournoi s'il commence par affronter Nadal.

$$P(G_N) = qp + (1-q)pq$$

$$\begin{aligned} P(G_M) - P(G_N) &= \cancel{pq} + (1-p)qp - \left[\cancel{qp} + (1-q)pq\right] \\ &= (1-p)qp - (1-q)pq \\ &= pq(1-p-1+q) \\ &= pq(q-p) < 0 \text{ car } p > q \end{aligned}$$

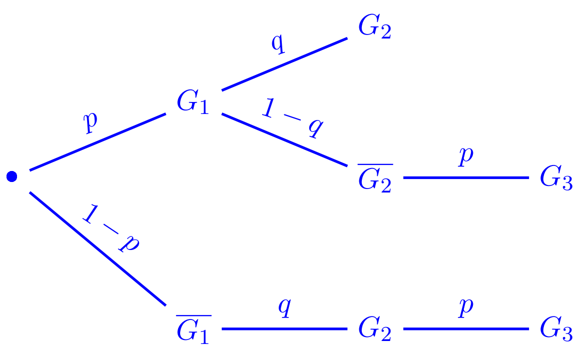
Gaël Monfils a plus de chance de remporter le tournoi s'il commence par affronter Rafael Nadal.

2. Règlement n° 2 : Pour remporter le tournoi, Gaël Monfils devra remporter deux sets.

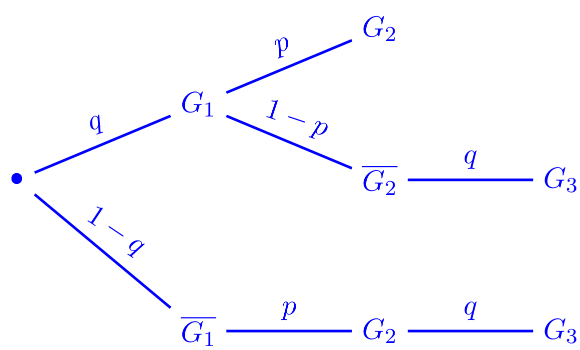
   (a) Ecris avec le formalisme mathématiques de la théorie des ensemble l'évènement G à partir des évènements G_i. $G = \left(G_1 \cap G_2\right) \cup \left(G_1 \cap G_3\right) \cup \left(G_2 \cap G_3\right)$

   (b) Quel adversaire doit-il choisir d'affronter en premier pour remporter ce tournoi ?

Pour une succession Medvedev-Nadal-Medvedev



Pour une succession Nadal-Medvedev-Nadal



On note G_M la probabilité que Gaël Monfils remporte le tournoi s'il commence par affronter Medvedev.

$$P(G_M) = pq + p(1-q)p + (1-p)qp$$

On note G_N la probabilité que Gaël Monfils remporte le tournoi s'il commence par affronter Nadal.

$$P(G_N) = qp + q(1-p)q + (1-q)pq$$

$$\begin{aligned} P(G_M) - P(G_N) &= pq + p(1-q)p + (1-p)qp - \left[qp + q(1-p)q + (1-q)pq\right] \\ &= pq + p^2 - p^2q + pq - p^2q - \left[qp + q^2 - pq^2 + pq - pq^2\right] \\ &= \cancel{pq} + p^2 - p^2q + \cancel{pq} - p^2q - \left[\cancel{qp} + q^2 - pq^2 + \cancel{pq} - pq^2\right] \\ &= 2pq^2 - 2p^2q + p^2 - q^2 \end{aligned}$$

Pour étudier un signe on factorise :

$$\begin{aligned} &= 2pq(q-p) + (p-q)(p+q) \\ &= (q-p)\left[2pq - (p+q)\right] \\ &= (q-p)\left[pq - p + pq - q\right] \end{aligned}$$

$$= \underbrace{(q-p)}_{<0} \underbrace{\left[p \underbrace{(q-1)}_{<0} + q \underbrace{(p-1)}_{<0}\right]}_{<0} > 0$$

Gaël Monfils a plus de chance de remporter le tournoi s'il commence par affronter Daniil Medvedev.

Exercice n° 5: (Dénombrement) Une inconnue vend des cartes postales et aussi des crayons. Son étalage comporte dix cartes postales de la Tour Eiffel, cinq de Notre Dame, trois de l'Arc de Triomphe, douze crayons noirs, six bleus et quatre rouges. Pour attirer l'attention des passants, elle tient en main un échantillon de deux cartes et trois crayons.

1. Combien y a-t-il d'échantillons possibles ?

   Il y a $\binom{18}{2}$ combinaisons de deux cartes postales et $\binom{22}{3}$ de trois crayons, ce qui donne :
   $\binom{18}{2} \times \binom{22}{3} = \frac{18 \times 17}{2} \times \frac{22 \times 21 \times 20}{3 \times 2} = 9 \times 17 \times 22 \times 7 \times 10 = 235\ 620$

2. Combien y a-t-il d'échantillons comportant un seul type de carte postale et une seule couleur de crayon ?

   Il y a $\binom{10}{2}$ combinaisons de deux cartes de la Tour Eiffel, $\binom{5}{2}$ de Notre Dame, et $\binom{3}{2}$ de l'Arc de Triomphe. Il y a donc $\binom{10}{2} + \binom{5}{2} + \binom{3}{2} = \frac{10 \times 9 + 5 \times 4 + 3 \times 2}{2} = 58$ combinaisons de cartes postales.

   Il y a de même $\binom{12}{3} + \binom{6}{3} + \binom{4}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10 + 6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} + \binom{4}{1} = 2 \times 11 \times 10 + 5 \times 4 + 4 = 244.$

   Il y a donc $58 \times 244 = 14\ 152$ échantillons comportant un seul type de carte postale et une seule couleur de crayon.

ESIEE AMIENS rejoint UniLaSalle Terre & Sciences

I1 - Probabilités - Année 2023-2024
Corrigé du TD de probabilités n° 3
Fonctions génératrices

Exercice n° 1: Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule, si la boule est rouge, il gagne 10 points, si elle est jaune, il perd 5 points, si elle est verte, il tire sans remise une deuxième boule de l'urne, si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 points, sinon il perd 4 points.

Soit X la variable aléatoire réelle discrète associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur.

1. Détermine $X(\Omega)$. $X(\Omega) = \left\{ -5, -4, 8, 10 \right\}$

2. Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

k	-5	-4	8	10
$P(X=k)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$

3. Calcule l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

   $E(X) = -5 \times \frac{2}{7} - 4 \times \frac{10}{21} + 8 \times \frac{2}{21} + 10 \times \frac{1}{7} = -\frac{8}{7} \simeq 1,14$ points

   $$E(X^2) = (-5)^2 \times \frac{2}{7} + (-4)^2 \times \frac{10}{21} + 8^2 \times \frac{2}{21} + 10^2 \times \frac{1}{7} = \frac{246}{7} \simeq 35,14$$

   $$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{246}{7} - \left(-\frac{8}{7}\right)^2 = \frac{1658}{49} \simeq 33,63$$

4. Les conditions de jeu restent identiques. Indique le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

   Notons α le gain correspondant à l'évènement $V_1 \cap R_2$:
   $$E(X) = -5 \times \frac{2}{7} - 4 \times \frac{10}{21} + \alpha \times \frac{2}{21} + 10 \times \frac{1}{7} = \frac{2\alpha - 40}{21}$$

   Il suffit alors de résoudre l'équation :

   $$E(X) = 0 \iff 2\alpha - 40 = 0 \iff \alpha = 20$$

Exercice n° 2: On jette trois dés hexaédriques. On note S la somme des faces obtenues. On note X_i la variable aléatoire qui associe à chacun des trois dés sa face obtenue.

1. Détermine la fonction génératrice de X_i.

   $$G_{X_i}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i P(X_1 = i) = \sum_{i=1}^{8} t^i \times \frac{1}{8} = \frac{t + t^2 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8}{8}$$

2. Sachant que $\left(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7\right)^3 = t^{21} + 3t^{20} + 6t^{19} + 10t^{18} + 15t^{17} + 21t^{16} + 28t^{15} + 36t^{14} + 42t^{13} + 46t^{12} + 48t^{11} + 48t^{10} + 46t^9 + 42t^8 + 36t^7 + 28t^6 + 21t^5 + 15t^4 + 10t^3 + 6t^2 + 3t + 1$, calcule la probabilité que la somme soit égale à 14.

   Les variables aléatoires X_i sont indépendantes donc :
   $$G_S(t) = G_{X_1+X_2+X_3} = G_{X_1} \times G_{X_2} \times G_{X_3} = \frac{1}{8^3}\left(t + t^2 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8\right)^3$$
   $$= \frac{t^3}{8^3}\left(1 + t + t^2 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7\right)^3 = \frac{t^3}{8^3}\left(\ldots + 48t^{11} + \ldots\right)$$

   On sait que $G_S(t) = \sum_{i=3}^{24} t^i P(S = i)$ donc, par identification, $P(S = 14)$ est le coefficient du monôme t^{14} dans le développement de $G_S(t)$, c-à-d $\frac{48}{8^3}$.

Exercice n° 3: On gagne à tous les coups ! On lance une pièce de monnaie. Si elle retombe sur pile on gagne 1€, sinon on gagne 4€.

1. On note X la variable aléatoire qui à un tirage associe le gain. Détermine la fonction génératrice de G.

   $$G_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i P(X = i) = t^1 P(X = 1) + t^4 P(X = 4) = t \times \frac{1}{2} + t^4 \times \frac{1}{2} = \frac{t + t^4}{2}$$

2. On effectue n tirages avec remise et l'on note S le montant obtenus.

   (a) Détermine la fonction génératrice de S

   $$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ où } G_{X_i} = \frac{t+t^4}{2}.$$

   Les variables aléatoires X_i étant deux à deux indépendantes : $G_S(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) = \left(\frac{t+t^4}{2}\right)^n$.

   (b) Déduis-en $S(\Omega)$.

   $$G_S(t) = \frac{1}{2^n}(t+t^4)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^{n-k}(t^4)^k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^{n+3k}.$$

   On voit que $S(\Omega) = \{n, n+3, n+6, \dots, n+3k, \dots, n+3n\}$

   Interprétations :

   - $(X = n)$ est l'évènement : « il y a eu n piles »
   - $(X = n+3)$ est l'évènement : « il y a eu $n-1$ piles et une face »
   - $(X = n+6)$ est l'évènement : « il y a eu $n-2$ piles et 2 faces »

   $\vdots$

   - $(X = n+3k)$ est l'évènement : « il y a eu $n-k$ piles et k faces »

   $\vdots$

   - $(X = n+3n)$ est l'évènement : « il y a eu 0 piles et n faces »

Exercice n° 4: Une urne contient 4 boules, une rouge, deux vertes et une bleue. La rouge ne rapporte aucun point, la verte, un point, et la bleue deux points.

1. On note X la variable aléatoire qui à un tirage associe le nombre de points obtenus. Détermine la fonction génératrice de X.

$$G_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i P(X=i) = t^0 \times \frac{1}{4} + t^1 \times \frac{2}{4} + t^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}t + \frac{1}{4}t^2 = \frac{1+2t+t^2}{4} = \left(\frac{1+t}{2}\right)^2$$

2. On effectue n tirages avec remise et l'on note S la somme des points obtenus.

   (a) Que vaut $S(\Omega)$?

   $S(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$

   (b) Détermine la fonction génératrice de S

   $$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ où } G_{X_i} = \left(\frac{1+t}{2}\right)^2.$$

   Les variables aléatoires X_i étant deux à deux indépendantes : $G_S(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{2n}$.

   (c) Déduis-en la loi de S.

   $$G_S(t) = \frac{1}{2^{2n}}(1+t)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}1^{2n-i}t^i.$$

   Par identification avec $G_S(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i S(X=i)$ on a : $P(S=i) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{i}$.

   Ce qui détermine la loi de S.

Exercice n° 5: Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$

1. Calcule la fonction génératrice de la variable aléatoire X.

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X = k) \text{ où } P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

2. Déduis-en l'espérance et la variance de X.

- $E(X) = G'_X(1)$ et $G'_X(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$, donc $E(X) = \lambda \mathrm{e}^0 = \lambda$
- $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left[G'_X(1)\right]^2$ et $G''_X(t) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$, donc $V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

3. Calcule la fonction génératrice de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes donc :

$G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}\mathrm{e}^{\mu(t-1)} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)+\mu(t-1)} = \mathrm{e}^{(t-1)(\lambda+\mu)}$

Donc, $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

Exercice n° 6: Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p, n)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p, m)$

1. Calcule la fonction génératrice de la variable aléatoire X.

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X = k) \text{ où } P(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (tp)^k q^{n-k} = (pt + q)^n$$

2. Calcule la fonction génératrice de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes donc :

$G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t) = (pt + q)^n(pt + q)^m = (pt + q)^{n+m}$

Donc, $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(p, n + m)$

Exercice n° 7: On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. On appelle cela une main. Si la main contient 4 rois on gagne 100€, si la main contient 3 rois, on gagne 50€, si la main contient 2 rois, on ne gagne rien et on ne perd rien, si la main contient 1 rois, on perd 10€, et si la main ne contient aucun roi, on perd 50€. On note G la variable aléatoire correspondant aux gains.

1. Détermine la loi de X.

k	100	50	0	-10	-50
$P(G=k)$	$\dfrac{\binom{4}{4}\times\binom{28}{1}}{\binom{32}{5}}$	$\dfrac{\binom{4}{3}\times\binom{28}{2}}{\binom{32}{5}}$	$\dfrac{\binom{4}{2}\times\binom{28}{3}}{\binom{32}{5}}$	$\dfrac{\binom{4}{1}\times\binom{28}{4}}{\binom{32}{5}}$	$\dfrac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}}$
$P(G=k)$	$\dfrac{1\times 28}{201376}$	$\dfrac{4\times 378}{201376}$	$\dfrac{6\times 3276}{201376}$	$\dfrac{4\times 20475}{201376}$	$\dfrac{98280}{201376}$
$P(G=k)$	$0,00014$	$0,00751$	$0,09761$	$0,40670$	$0,48804$

2. Calcule l'espérance de X.

   $E(X) \simeq 100\times 0,00014 + 50\times 0,00751 - 10\times 0,40670 - 50\times 0,48804 = -28,0795$€

I1 - Probabilités - Année 2023-2024
Corrigé du TD de probabilités n° 4
Approximation par une loi

Exercice n° 1: Une montre fait une erreur d'au plus une demi-minute par jour. On note X_i la variable aléatoire égale à l'erreur commise (en minutes) le $i^{\text{ème}}$ jour. On supposera les variables aléatoires X_i indépendantes.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X_i ?

   $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

2. Détermine l'espérance et la variance de X_i.

   Voir le formulaire situé à la fin du TD. Un formulaire sera distribué avec l'examen, s'il est nécessaire.

   $E(X_i)=0$ et $V(X_i)=\dfrac{\left[\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2}{12}=\dfrac{1}{12}$

3. Quelle est la loi de la variable aléatoire $S=\displaystyle\sum_{i=1}^{365} X_i$?

   Indication : *On devra faire une approximation.*

   Au lieu de chercher la loi de S qui n'a rien de trivial, on va faire une approximation de S.

   On va pouvoir utiliser le théorème de la limite centrale car S est la **somme** de variables aléatoires X_i **indépendantes** de **même loi**.

   - $E(S)=365\times E(X_i)=0$
   - $V(S)=V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{365} X_i\right)=\displaystyle\sum_{i=1}^{365} V(X_i)$ par indépendance des X_i.

     $=365\times V(X_i)=\dfrac{365}{12}$

   En pratique, on approche la variable aléatoire S par une loi $\mathcal{N}\left(0\,;\sqrt{\dfrac{365}{12}}\right)$.

4. Détermine la probabilité que l'erreur commise par la montre au bout d'une année soit inférieure à un quart d'heure.

$$P\Big(|S| \leqslant 15\Big) = P\big(-15 \leqslant S \leqslant 15\big) = P\left(\frac{-15-0}{\sqrt{\dfrac{365}{12}}} \leqslant \frac{S-0}{\sqrt{\dfrac{365}{12}}} \leqslant \frac{15-0}{\sqrt{\dfrac{365}{12}}}\right) = P(-2,72 \leqslant Z \leqslant 2,72)$$

$$= P(Z \leqslant 2,72) - P(Z \leqslant -2,72) = \ldots = 2P(Z \leqslant 2,72) - 1 \simeq 2 \times 0,9967 - 1 = 0,9934$$

Exercice n° 2: On construit un immeuble de 600 logements. On estime la probabilité pour une famille de posséder une voiture à 40%, et on néglige la probabilité de posséder plus d'une voiture. On adjoint un parking à l'immeuble.
On désigne par :

- X_i la variable aléatoire qui à une famille associe 1 si elle possède une voiture, 0 sinon.
- S la variable aléatoire qui à ses 600 logements associe le nombre de places de parking.

1. Quelle loi suivent les variables aléatoires X_i ? Une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0,4)$
2. Quelle loi suivent la variable aléatoire S ? Une loi de Binomiale $\mathcal{B}(600\,;\,0,4)$
3. Quelle est la probabilité qu'avec un parking de 250 places toutes les demandes soient satisfaites ?

$$P(S \leqslant 250) = \sum_{k=1}^{250} P(S=k) = \sum_{k=1}^{250} \binom{600}{k} 0,4^k \times 0,6^{600-k} \text{ impossible à calculer !}$$

4. En utilisant, une approximation par une loi normale :

(a) La probabilité qu'avec un parking de 250 places toutes les demandes soient satisfaites ?

$S = \sum_{k=1}^{600} X_k$ est une somme de variables aléatoires indépendantes suivant le même loi, donc on peut l'approcher par une loi normale $\mathcal{N}(240\ ,\ 12)$ car :

- $E(S) = E\left(\sum_{k=1}^{600} X_k\right) = \sum_{k=1}^{600} E(X_k) = \sum_{k=1}^{600} 0,4 = 600 \times 0,4 = 240$
- $V(S) = V\left(\sum_{k=1}^{600} X_k\right) = \sum_{k=1}^{600} V(X_k) = \sum_{k=1}^{600} 0,4 \times 0,6 = 600 \times 0,4 \times 0,6 = 240 \times 0,6 = 144 = 12^2$

$$P(S \leqslant 250) = P\left(\frac{S-240}{12} \leqslant \frac{250-240}{12}\right) = P(Z \leqslant 0,83) = 0,7967$$

(b) Quel nombre de places doit-il offrir pour que la probabilité de ne pas satisfaire toutes les demandes de place de parking soit inférieure à 98% ?

Notons n le nombre de places cherché. $P(S \leqslant n) = P\left(\dfrac{S-240}{12} \leqslant \dfrac{n-240}{12}\right) \geqslant 0,98$

En parcourant la table, on trouve $\dfrac{n-240}{12} \geqslant 2,06$ soit $n \geqslant 12 \times 2,06 + 240 = 264$ places.

Exercice n° 3: Dans le transport aérien, pour un vol donné, un certain nombre de passagers ayant procédé à une réservation ne se présente pas à l'embarquement. On les appelle les « no-show ». Toutes sortes de raisons expliquent ces absences : les passagers ont manqué une connexion, ils sont malades, ils ont oublié qu'ils avaient un voyage d'affaire à l'horaire, etc. Le taux de « no-show » semble se situer en moyenne autour de 5% (ce taux varie selon les compagnie et les vols). Pour chacun de leurs vols, afin d'améliorer le taux de remplissage de l'avion et donc la rentabilité du vol, les compagnies n'hésitent pas à proposer un nombre de réservations supérieur au nombre de places dans l'avion : C'est la surréservation ou « surbooking »
Cette survente expose les compagnies au risque de devoir dédommager les passagers qui se verraient alors refuser l'accès à bord. Comment une compagnie aérienne fait-elle pour profiter au maximum du « surbooking » ?

Sur la ligne aérienne Amiens Beauvais, à partir de l'analyse des taux d'annulation et de non-présentation, aux mêmes dates, sur plusieurs années, en tenant compte des évènements exceptionnels, la compagnie aérienne UniLaSalle estime le taux de « no-show » à 6% Sur le vol 3,14159 du 10 octobre 2022 à bord d'un A380 d'une capacité de 853 places.

On suppose dans cet exercice que toutes les personnes ayant procédé à une réservation ont la même probabilité de ne pas se présenter à l'enregistrement et que leurs comportements sont indépendants les uns des autres.

- X_i la variable aléatoire qui à un passager ayant réservé associe 1 s'il se présente à l'embarquement, 0 sinon.
- S la variable aléatoire égale au nombre de passagers ayant réservé qui se présentent à l'embarquement.

Partie A : La compagnie aérienne a vendu 853 billets.

1. Quel est la loi des X_i ? X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0,94)$
2. Quel est la loi de S ? S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(853\,;\,0,94)$
3. Calcule la probabilité que 850 passagers ayant réservé se présentent à l'embarquement.

$$P(S=850) = \binom{853}{850} \times 0,94^{850} \times 0,06^3 = \binom{853}{3} \times 0,94^{850} \times 0,06^3$$
$$= \underbrace{\frac{853 \times 852 \times 851}{3!}}_{103\ 078\ 226} \times 0,94^{850} \times 0,06^3 \simeq 3,21 \times 10^{-19}$$

4. Calcule la probabilité qu'il y ait au moins 850 passagers ayant réservé qui se présentent à l'embarquement.

$$P(S=851) = \underbrace{\binom{853}{851}}_{363\ 378} \times 0,94^{851} \times 0,06^2 \simeq 1,77 \times 10^{-20}$$

$$P(S=852) = \underbrace{\binom{853}{852}}_{853} \times 0,94^{852} \times 0,06^1 \simeq 6,52 \times 10^{-22}$$

$$P(S=853) = \underbrace{\binom{853}{853}}_{1} \times 0,94^{853} \simeq 1,20 \times 10^{-23}$$

$$P(S \geqslant 850) = 3,21 \times 10^{-19} + 1,77 \times 10^{-20} + 6,52 \times 10^{-22} + 1,20 \times 10^{-23} \simeq 3,39 \times 10^{-19}$$

On peut être assuré qu'il y aura moins de 850 passagers ayant réservé qui se présentent à l'embarquement.

5. Approximation par une loi normale.

(a) Par quelle loi normale peut-on approximer la variable aléatoire S ? (Les paramètres seront arrondis au dixième près).

$S = \sum_{k=1}^{853} X_k$ est une somme de variables aléatoires indépendantes suivant le même loi, donc, on peut l'approcher par une loi normale $\mathcal{N}(801,8\ ;\ 6,9)$ car :

- $E(S) = E\left(\sum_{k=1}^{853} X_k\right) = \sum_{k=1}^{853} E(X_k) = \sum_{k=1}^{853} 0,94 = 853 \times 0,94 = 801,82$
- $V(S) = V\left(\sum_{k=1}^{853} X_k\right) = \sum_{k=1}^{853} V(X_k) = \sum_{k=1}^{853} 0,94 \times 0,06 = 853 \times 0,94 \times 0,06$
  $= 801,82 \times 0,06 = 48,1092$ et $\sigma(S) \simeq 6,936$

(b) Calcule la probabilité qu'il y ait au moins 810 passagers ayant réservé qui se présentent à l'embarquement.

Calcule $P(S \geqslant 810) = P\left(\frac{S - 801,8}{6,9} \geqslant \frac{810 - 801,8}{6,9}\right) = P(Z \geqslant 1,19) = 1 - P(Z \leqslant 1,19)$
La table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite donne $1 - 0,8830 = 0,117$

(c) Calcule la probabilité qu'il y ait au moins 820 passagers ayant réservé qui se présentent à l'embarquement.

Calcule $P(S \geqslant 820) = P\left(\frac{S - 801,8}{6,9} \geqslant \frac{820 - 801,8}{6,9}\right) = P(Z \geqslant 2,64) = 1 - P(Z \leqslant 2,64)$
La table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite donne $1 - 0,9959 = 0,0041 = 0,41\%$

(d) La compagnie aérienne voudrait avoir au moins 97% de chances que tous les passagers embarquent dans l'avion. Combien peut-elle réserver de place en plus de la capacité de l'avion ?

$P(S \geqslant n) = P\left(\frac{S - 801,8}{6,9} \geqslant \frac{n - 801,8}{6,9}\right) \geqslant 0,97$
En parcourant la table, on trouve $\frac{n - 801,8}{6,9} \geqslant 1,89$ soit $n \geqslant 6,9 \times 1,89 + 801,8 = 814,841$.
Elle peut réserver $853 - 815 = 38$ places en plus de la capacité de l'avion.

Partie B : La compagnie aérienne a vendu $\boldsymbol{n}$ billets.

1. Quelle différence avec le modèle précédent ?

   Ce modèle prend en compte que les billets vendus en plus peuvent aussi ne pas être utilisé.

2. Quel est la loi de S_n ? S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,0,94)$

3. Par quelle loi normale peut-on approximer la variable aléatoire S ? (Les paramètres ne seront pas arrondis).

   $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ est une somme de variables aléatoires indépendantes suivant le même loi, donc, on peut l'approcher par une loi normale $\mathcal{N}(801,8\ ;\ 6,9)$ car :

   - $E(S_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} 0,94 = 0,94n$

- $V(S_n) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} 0,94 \times 0,06 = n \times 0,94 \times 0,06 = 0,0564n$

  $\sigma(S_n) = \sqrt{0,0564n}$

4. La compagnie aérienne voudrait avoir au moins 97% de chances que tous les passagers embarquent dans l'avion. Combien peut-elle réserver de place en plus de la capacité de l'avion ?

   Calcule $P(S_n \leqslant 853) \geqslant 0,97 \iff = P\left(Z \geqslant \dfrac{853 - 0,94n}{\sqrt{0,0564n}}\right) \geqslant 0,97$

   En parcourant la table, on trouve $\dfrac{853 - 0,94n}{\sqrt{0,0564n}} \geqslant 1,89$.

   Au risque de créer des solutions, on élève aux carrés :

$$\begin{aligned}
\frac{0,8836n^2 - 1603,64n + 727609}{0,0564n} &\geqslant 3,5721 \\
0,8836n^2 - 1603,64n + 727609 &\geqslant 3,5721 \times 0,0564n \\
0,8836n^2 - 1603,84146644n + 727609 &\geqslant 0
\end{aligned}$$

   $\Delta \simeq 646,2 > 0$ d'où $\begin{cases} n_1 \simeq 893,2 \\ n_2 \simeq 921,9 \end{cases}$.

   - $\dfrac{853 - 0,94n_1}{\sqrt{0,0564n_1}} \simeq 1,89$ on accepte n_1
   - $\dfrac{853 - 0,94n_2}{\sqrt{0,0564n_2}} \simeq -1,88$ on rejette n_2

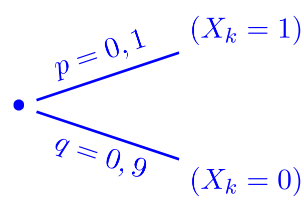
   Elle peut réserver $893 - 853 = 40$ places en plus de la capacité de l'avion.

Exercice n° 4: Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heures. Quel est le nombre de lignes que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit au plus égale à 2,5%.
On note n le nombre de lignes installées. et X le nombre d'employés qui téléphonent à la minute t.

1. Quelle est la loi de X ?

   La probabilité pour qu'un employé téléphone à la minute t est $\dfrac{6}{60} = 0,1$.

   $X = \sum_{k=1}^{300} X_k$ où $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(0,1)$ associé à l'épreuve de Bernoulli :



   Les X_k étant indépendants, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(300; 0,1)$

2. Quelle est son espérance ? Quel est son écart-type ?

   $E(X) = 300 \times 0,1 = 30$, $V(X) = 30 \times 0,9 = 27$, et $\sigma(X) = \sqrt{27}$

3. Par quelle loi normale peut-on approcher X ? Justifier

   $\mathcal{N}(30; \sqrt{27})$ car X est la somme de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi.

4. Quel est le nombre de lignes que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit au plus égale à 2,5%.

   On cherche n tel que $P(X \geqslant n) \leqslant 0,25$

$$\begin{array}{rcl} P(X \geqslant n) & \leqslant & 0,25 \\ P\left(Z \geqslant \dfrac{n-30}{\sqrt{27}}\right) & \leqslant & 0,25 \\ 1 - P\left(Z \geqslant \dfrac{n-30}{\sqrt{27}}\right) & \geqslant & 1 - 0,25 = 0,975 \\ P\left(Z \leqslant \dfrac{n-30}{\sqrt{27}}\right) & \geqslant & 0,975 \end{array}$$

   Par lecture de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite on trouve :

$$P(Z \leqslant 1,96) = 0,975$$

   $\dfrac{n-30}{\sqrt{27}} = 1,96 \iff n = 1,96 \times \sqrt{27} + 30 \simeq 40,2$
   Il faut installer au moins 41 lignes.

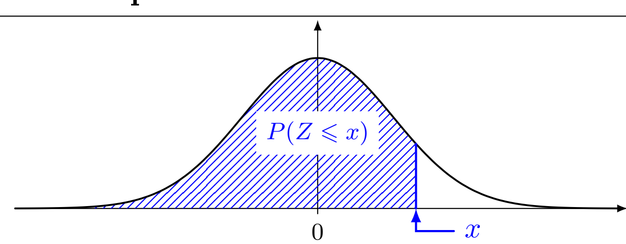
Loi de probabilités discrètes

Nom	Valeurs prises	Loi	Espérance	Variance
Uniforme $X \hookrightarrow \mathcal{U}_n$	$[\![1\ ;\ n]\!]$	$P(X=k)=\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$\{0;1\}$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p=q$	p	pq
Binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$	$[\![0\ ;\ n]\!]$	$P(X=k)=\dbinom{n}{k}p^kq^{n-k}$	np	npq
Géométrique $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$P(X=k)=pq^{k-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
Pascal $X \hookrightarrow \mathcal{P}(r,p)$	$[\![r\ ;\ +\infty]\!]$	$P(X=k)=\dbinom{k-1}{r-1}p^rq^{k-r}$	$\dfrac{r}{p}$	$\dfrac{rq}{p^2}$
Hypergéométrique $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$	$[\![0\ ;\ n]\!]$	$P(X=k)=\dfrac{\dbinom{Np}{k}\dbinom{Nq}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}$	np	$npq\dfrac{N-n}{N-1}$
Poisson $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

Loi de probabilités continues

Loi	Valeurs prises	Densité	Espérance	Variance
Uniforme $\mathcal{U}\big([a\ ;\ b]\big)$	$[a\ ;\ b]$	$f(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\notin[a,b]\\ 1 \text{ si } x\in[a,b]\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$[0\ ;\ +\infty[$	$f(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x\geqslant 0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Lapalce-Gauss $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$	$\mathbb{R}$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	μ	σ

Table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000