Chapitre 7 - Fiabilité des systèmes.

Dans la vie courante, la fiabilité est la capacité d'un appareil de fonctionner correctement dans le temps.

Dans la vie courante, la fiabilité est la capacité d'un appareil de fonctionner correctement dans le temps.

Ainsi, pour L'**A**ssociation **F**rançaise de **Nor**malisation (AFNOR) la **fiabilité** est « *la caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans des conditions d'utilisation données et pour une période de temps déterminée.* »

Dans la vie courante, la fiabilité est la capacité d'un appareil de fonctionner correctement dans le temps.

Ainsi, pour L'**A**ssociation **F**rançaise de **Nor**malisation (AFNOR) la **fiabilité** est « *la caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans des conditions d'utilisation données et pour une période de temps déterminée.* »

Dans ce chapitre, nous nous limitons au cas où cette « période donnée » est située avant la première panne ou défaillance, soit après une réparation qui a permis de remettre le dispositif à neuf.

Dans la vie courante, la fiabilité est la capacité d'un appareil de fonctionner correctement dans le temps.

Ainsi, pour L'**A**ssociation **F**rançaise de **Nor**malisation (AFNOR) la **fiabilité** est « *la caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans des conditions d'utilisation données et pour une période de temps déterminée.* »

Dans ce chapitre, nous nous limitons au cas où cette « période donnée » est située avant la première panne ou défaillance, soit après une réparation qui a permis de remettre le dispositif à neuf.

Dans chacune de ces deux situations, nous allons étudier comment une telle probabilité peut être obtenue.

Dans la vie courante, la fiabilité est la capacité d'un appareil de fonctionner correctement dans le temps.

Ainsi, pour L'**A**ssociation **F**rançaise de **Nor**malisation (AFNOR) la **fiabilité** est « *la caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans des conditions d'utilisation données et pour une période de temps déterminée.* »

Dans ce chapitre, nous nous limitons au cas où cette « période donnée » est située avant la première panne ou défaillance, soit après une réparation qui a permis de remettre le dispositif à neuf.

Dans chacune de ces deux situations, nous allons étudier comment une telle probabilité peut être obtenue.

Une telle étude est maintenant devenue importante pour des raisons évidentes de qualité, mais essentiel dans les secteurs où se posent des problème de sécurité ou lorsque les réparations sont impossibles.

1. Définitions.

Dans tout ce chapitre,

1. Définitions.

Dans tout ce chapitre,

- nous nous intéressons à un dispositif **pris au hasard**

1. Définitions.

Dans tout ce chapitre,

- nous nous intéressons à un dispositif **pris au hasard** dans une population constituée des dispositifs du même type.

1. Définitions.

Dans tout ce chapitre,

- nous nous intéressons à un dispositif **pris au hasard** dans une population constituée des dispositifs du même type. Dans le domaine industriel, ce peut être une partie d'une machine, une machine, un réseau de machines, etc.

1. Définitions.

Dans tout ce chapitre,

- nous nous intéressons à un dispositif **pris au hasard** dans une population constituée des dispositifs du même type. Dans le domaine industriel, ce peut être une partie d'une machine, une machine, un réseau de machines, etc.
- On désigne par T la variable aléatoire qui, à tout dispositif choisi au hasard, associe son temps de bon fonctionnement ou sa durée de vie avant une défaillance.

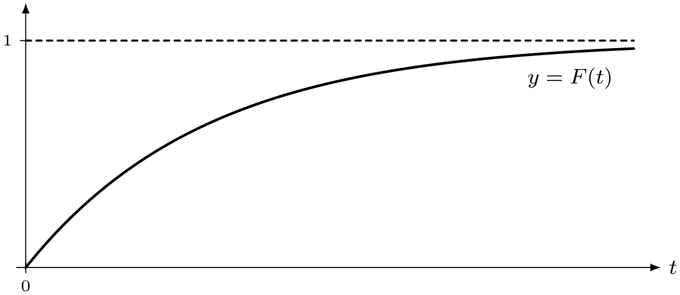
1. Définitions.

Dans tout ce chapitre,

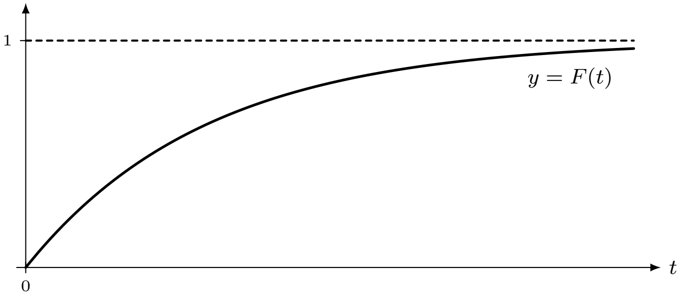
- nous nous intéressons à un dispositif **pris au hasard** dans une population constituée des dispositifs du même type. Dans le domaine industriel, ce peut être une partie d'une machine, une machine, un réseau de machines, etc.
- On désigne par T la variable aléatoire qui, à tout dispositif choisi au hasard, associe son temps de bon fonctionnement ou sa durée de vie avant une défaillance.

Définition:

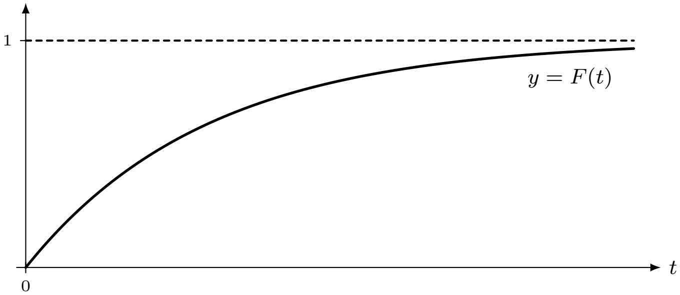
On appelle **fonction de défaillance** la fonction F définie pour tout $t \geqslant 0$ par $F(t) = P(T \leqslant t)$.



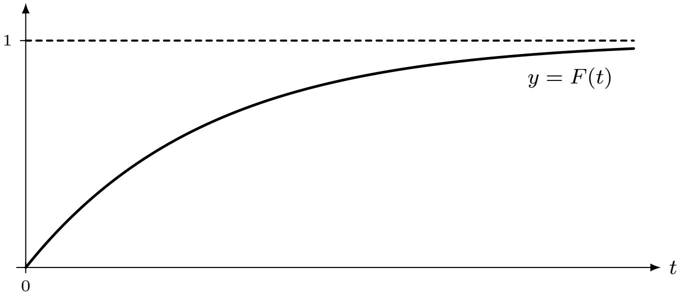
1
$y = F(t)$
t
0



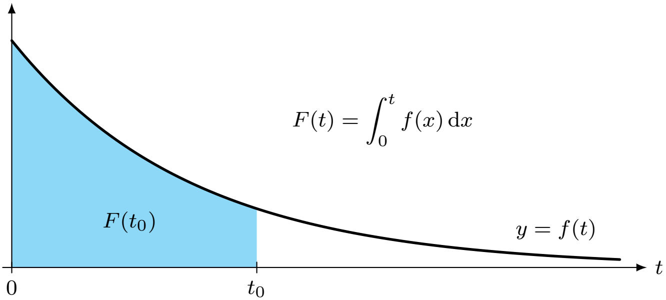
☞ $F(t)$ est la probabilité qu'un dispositif prélevé au hasard dans la population ait une défaillance avant l'instant t.

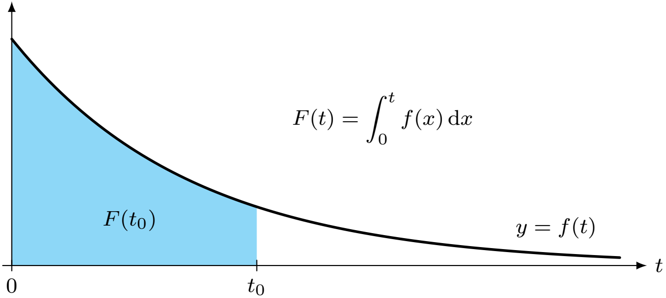


- $F(t)$ est la probabilité qu'un dispositif prélevé au hasard dans la population ait une défaillance avant l'instant t.
- $t \geqslant 0$ car on prélève le dispositif à l'instant $t = 0$.

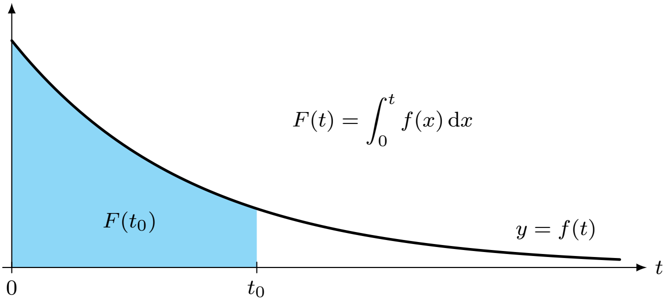


- $F(t)$ est la probabilité qu'un dispositif prélevé au hasard dans la population ait une défaillance avant l'instant t.
- $t \geqslant 0$ car on prélève le dispositif à l'instant $t = 0$.
- Lorsque t tend vers $+\infty$, la probabilité d'avoir une défaillance devient certaine.


$F(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$
$F(t_0)$
$y = f(t)$
t
0
t_0



☞ F est une fonction répartition. Sa distribution (densité) est notée f : $F' = f$.



- F est une fonction répartition. Sa distribution (densité) est notée f : $F' = f$.
- $t \geqslant 0$ car on prélève le dispositif à l'instant $t = 0$.

On a alors : $P(T > t) = P\left(\overline{T \leqslant t}\right) = 1 - P(T \leqslant t) = 1 - F(t)$.

On a alors : $P(T > t) = P\left(\overline{T \leqslant t}\right) = 1 - P(T \leqslant t) = 1 - F(t)$. Il s'en suit la définition suivante :

On a alors : $P(T > t) = P\left(\overline{T \leqslant t}\right) = 1 - P(T \leqslant t) = 1 - F(t)$. Il s'en suit la définition suivante :

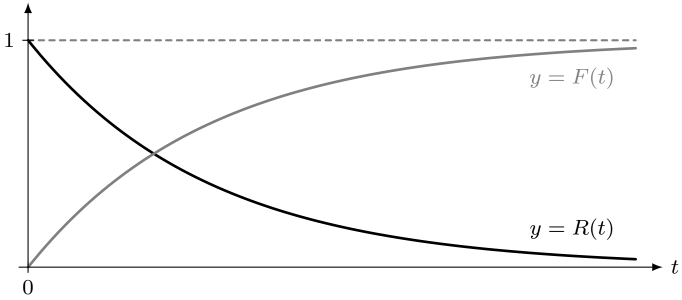
Définition:

On appelle **fonction de fiabilité**, la fonction R, définie pour tout $t \geqslant 0$ par $R(t) = 1 - F(t)$

On a alors : $P(T > t) = P\left(\overline{T \leqslant t}\right) = 1 - P(T \leqslant t) = 1 - F(t)$. Il s'en suit la définition suivante :

Définition:

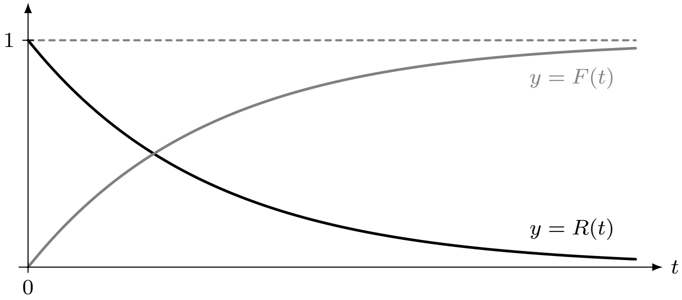
On appelle **fonction de fiabilité**, la fonction R, définie pour tout $t \geqslant 0$ par $R(t) = 1 - F(t)$



On a alors : $P(T > t) = P\left(\overline{T \leqslant t}\right) = 1 - P(T \leqslant t) = 1 - F(t)$. Il s'en suit la définition suivante :

Définition:

On appelle **fonction de fiabilité**, la fonction R, définie pour tout $t \geqslant 0$ par $R(t) = 1 - F(t)$



☞ $R(t)$ représente la probabilité qu'un dispositif choisi au hasard dans la population n'ait pas de défaillance avant l'instant t.

2. Estimation de $F(t)$ et de $R(t)$.

Dans la pratique, pour un dispositif donné, nous ne connaissons pas les valeurs exactes de $F(t)$ et de $R(t)$ pour une valeur donnée de t. Aussi sommes-nous amenés à **estimer** les $F(t)$ et $R(t)$ à partir de valeurs observées sur un échantillon.

2. Estimation de $F(t)$ et de $R(t)$.

Dans la pratique, pour un dispositif donné, nous ne connaissons pas les valeurs exactes de $F(t)$ et de $R(t)$ pour une valeur donnée de t. Aussi sommes-nous amenés à **estimer** les $F(t)$ et $R(t)$ à partir de valeurs observées sur un échantillon.

Exemple n° 1 : On a mesuré pour 20 aspirateurs du même type le temps en heures écoulé avant la première panne :

2. Estimation de $F(t)$ et de $R(t)$.

Dans la pratique, pour un dispositif donné, nous ne connaissons pas les valeurs exactes de $F(t)$ et de $R(t)$ pour une valeur donnée de t. Aussi sommes-nous amenés à **estimer** les $F(t)$ et $R(t)$ à partir de valeurs observées sur un échantillon.

Exemple n° 1 : On a mesuré pour 20 aspirateurs du même type le temps en heures écoulé avant la première panne :

Intervalle de temps en heures	$[0;500]$	$]500;1000]$	$]1000;1500]$	$]1500;2000]$	$]2000;2500]$	$]2500;3000]$	$]3000;4000]$
Nombre d'appareils	7	4	3	2	2	1	1

2. Estimation de $F(t)$ et de $R(t)$.

Dans la pratique, pour un dispositif donné, nous ne connaissons pas les valeurs exactes de $F(t)$ et de $R(t)$ pour une valeur donnée de t. Aussi sommes-nous amenés à **estimer** les $F(t)$ et $R(t)$ à partir de valeurs observées sur un échantillon.

Exemple n° 1 : On a mesuré pour 20 aspirateurs du même type le temps en heures écoulé avant la première panne :

Intervalle de temps en heures	$[0; 500]$	$]500; 1000]$	$]1000; 1500]$	$]1500; 2000]$	$]2000; 2500]$	$]2500; 3000]$	$]3000; 4000]$
Nombre d'appareils	7	4	3	2	2	1	1

On souhaite estimer les valeurs de la fonction de défaillance F suivant les valeurs de t.

2. Estimation de $F(t)$ et de $R(t)$.

Dans la pratique, pour un dispositif donné, nous ne connaissons pas les valeurs exactes de $F(t)$ et de $R(t)$ pour une valeur donnée de t. Aussi sommes-nous amenés à **estimer** les $F(t)$ et $R(t)$ à partir de valeurs observées sur un échantillon.

Exemple nº 1 : On a mesuré pour 20 aspirateurs du même type le temps en heures écoulé avant la première panne :

Intervalle de temps en heures	$[0; 500]$	$]500; 1000]$	$]1000; 1500]$	$]1500; 2000]$	$]2000; 2500]$	$]2500; 3000]$	$]3000; 4000]$
Nombre d'appareils	7	4	3	2	2	1	1

On souhaite estimer les valeurs de la fonction de défaillance F suivant les valeurs de t.

On note n_i le nombre de dispositifs défaillants à l'instant t_i et n l'effectif total de l'échantillon.

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs bruts :**

   On calcule les valeurs de F grâce à la formule $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i}{n}}$

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Effectifs cumulés	7	11	14	16	18	19	20
$F(t)$							
$R(t)$							

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs bruts :**

On calcule les valeurs de F grâce à la formule $\boxed{F(t_i) = \frac{n_i}{n}}$

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Effectifs cumulés	7	11	14	16	18	19	20
$F(t)$	$0,35$						
$R(t)$	$0,65$						

$\frac{7}{20} = 0,35$ et $1 - 0,35 = 0,65$

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs bruts :**

On calcule les valeurs de F grâce à la formule $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i}{n}}$

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Effectifs cumulés	7	11	14	16	18	19	20
$F(t)$	$0,35$	$0,55$					
$R(t)$	$0,65$	$0,45$					

$\dfrac{7}{20} = 0,35$ et $1 - 0,35 = 0,65$

$\dfrac{11}{20} = 0,55$ et $1 - 0,55 = 0,45$

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs bruts :**

On calcule les valeurs de F grâce à la formule $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i}{n}}$

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Effectifs cumulés	7	11	14	16	18	19	20
$F(t)$	$0,35$	$0,55$	$0,70$				
$R(t)$	$0,65$	$0,45$	$0,30$				

$\dfrac{7}{20} = 0,35$ et $1 - 0,35 = 0,65$

$\dfrac{11}{20} = 0,55$ et $1 - 0,55 = 0,45$

$\dfrac{14}{20} = 0,70$ et $1 - 0,70 = 0,30$

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs bruts :**

On calcule les valeurs de F grâce à la formule $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i}{n}}$

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Effectifs cumulés	7	11	14	16	18	19	20
$F(t)$	$0,35$	$0,55$	$0,70$	$0,80$			
$R(t)$	$0,65$	$0,45$	$0,30$	$0,20$			

$$\frac{7}{20} = 0,35 \text{ et } 1 - 0,35 = 0,65$$

$$\frac{11}{20} = 0,55 \text{ et } 1 - 0,55 = 0,45$$

$$\frac{14}{20} = 0,70 \text{ et } \ 1 - 0,70 = 0,30$$

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs bruts :**

On calcule les valeurs de F grâce à la formule $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i}{n}}$

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Effectifs cumulés	7	11	14	16	18	19	20
$F(t)$	$0,35$	$0,55$	$0,70$	$0,80$	$0,90$		
$R(t)$	$0,65$	$0,45$	$0,30$	$0,20$	$0,10$		

$\dfrac{7}{20} = 0,35$ et $1 - 0,35 = 0,65$

$\dfrac{11}{20} = 0,55$ et $1 - 0,55 = 0,45$

$\dfrac{14}{20} = 0,70$ et $1 - 0,70 = 0,30$

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs bruts :**

On calcule les valeurs de F grâce à la formule $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i}{n}}$

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Effectifs cumulés	7	11	14	16	18	19	20
$F(t)$	$0,35$	$0,55$	$0,70$	$0,80$	$0,90$	$0,95$	
$R(t)$	$0,65$	$0,45$	$0,30$	$0,20$	$0,10$	$0,05$	

$\dfrac{7}{20} = 0,35$ et $1 - 0,35 = 0,65$

$\dfrac{11}{20} = 0,55$ et $1 - 0,55 = 0,45$

$\dfrac{14}{20} = 0,70$ et $1 - 0,70 = 0,30$

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs bruts :**

On calcule les valeurs de F grâce à la formule $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i}{n}}$

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Effectifs cumulés	7	11	14	16	18	19	20
$F(t)$	$0,35$	$0,55$	$0,70$	$0,80$	$0,90$	$0,95$	1
$R(t)$	$0,65$	$0,45$	$0,30$	$0,20$	$0,10$	$0,05$	0

$\dfrac{7}{20} = 0,35$ et $1 - 0,35 = 0,65$

$\dfrac{11}{20} = 0,55$ et $1 - 0,55 = 0,45$

$\dfrac{14}{20} = 0,70$ et $1 - 0,70 = 0,30$

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs moyens :**

   Avec la méthode précédente, la probabilité qu'un dispositif n'ait pas eu de défaillance à l'instant $t = 4000$ est estimée à

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs moyens :**

   Avec la méthode précédente, la probabilité qu'un dispositif n'ait pas eu de défaillance à l'instant $t = 4000$ est estimée à $R(4000) = 0$:

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs moyens :**

   Avec la méthode précédente, la probabilité qu'un dispositif n'ait pas eu de défaillance à l'instant $t = 4000$ est estimée à $R(4000) = 0$: Aucun dispositif n'aurait une durée de vie supérieure à 4000 heures.

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs moyens :**
   Avec la méthode précédente, la probabilité qu'un dispositif n'ait pas eu de défaillance à l'instant $t = 4000$ est estimée à $R(4000) = 0$: Aucun dispositif n'aurait une durée de vie supérieure à 4000 heures. Ce qui dans la réalité semble exagéré.

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs moyens :**
   Avec la méthode précédente, la probabilité qu'un dispositif n'ait pas eu de défaillance à l'instant $t = 4000$ est estimée à $R(4000) = 0$: Aucun dispositif n'aurait une durée de vie supérieure à 4000 heures. Ce qui dans la réalité semble exagéré. En effet, si on considère un grand nombre de dispositifs, certains devraient survivre à 4000 heures.

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs moyens :**
   Avec la méthode précédente, la probabilité qu'un dispositif n'ait pas eu de défaillance à l'instant $t = 4000$ est estimée à $R(4000) = 0$: Aucun dispositif n'aurait une durée de vie supérieure à 4000 heures. Ce qui dans la réalité semble exagéré. En effet, si on considère un grand nombre de dispositifs, certains devraient survivre à 4000 heures.Pour remédier à ce problème, en particulier lorsque l'échantillon est petit, on peut prendre $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i}{n+1}}$:

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs moyens :**

Avec la méthode précédente, la probabilité qu'un dispositif n'ait pas eu de défaillance à l'instant $t = 4000$ est estimée à $R(4000) = 0$: Aucun dispositif n'aurait une durée de vie supérieure à 4000 heures. Ce qui dans la réalité semble exagéré. En effet, si on considère un grand nombre de dispositifs, certains devraient survivre à 4000 heures.Pour remédier à ce problème, en particulier lorsque l'échantillon est petit, on peut prendre $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i}{n+1}}$:

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$			$0,67$	$0,76$			

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs moyens :**

Avec la méthode précédente, la probabilité qu'un dispositif n'ait pas eu de défaillance à l'instant $t = 4000$ est estimée à $R(4000) = 0$: Aucun dispositif n'aurait une durée de vie supérieure à 4000 heures. Ce qui dans la réalité semble exagéré. En effet, si on considère un grand nombre de dispositifs, certains devraient survivre à 4000 heures.Pour remédier à ce problème, en particulier lorsque l'échantillon est petit, on peut prendre $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i}{n+1}}$:

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$	$\dfrac{7}{21} = 0,33$		$0,67$	$0,76$			

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs moyens :**

   Avec la méthode précédente, la probabilité qu'un dispositif n'ait pas eu de défaillance à l'instant $t = 4000$ est estimée à $R(4000) = 0$: Aucun dispositif n'aurait une durée de vie supérieure à 4000 heures. Ce qui dans la réalité semble exagéré. En effet, si on considère un grand nombre de dispositifs, certains devraient survivre à 4000 heures.Pour remédier à ce problème, en particulier lorsque l'échantillon est petit, on peut prendre $\boxed{F(t_i) = \frac{n_i}{n+1}}$:

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$	$\frac{7}{21} = 0,33$	$\frac{11}{21} = 0,52$	$0,67$	$0,76$			

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs moyens :**

Avec la méthode précédente, la probabilité qu'un dispositif n'ait pas eu de défaillance à l'instant $t = 4000$ est estimée à $R(4000) = 0$: Aucun dispositif n'aurait une durée de vie supérieure à 4000 heures. Ce qui dans la réalité semble exagéré. En effet, si on considère un grand nombre de dispositifs, certains devraient survivre à 4000 heures.Pour remédier à ce problème, en particulier lorsque l'échantillon est petit, on peut prendre $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i}{n+1}}$:

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$	$\frac{7}{21} = 0,33$	$\frac{11}{21} = 0,52$	$0,67$	$0,76$	$0,86$		

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs moyens :**

Avec la méthode précédente, la probabilité qu'un dispositif n'ait pas eu de défaillance à l'instant $t = 4000$ est estimée à $R(4000) = 0$: Aucun dispositif n'aurait une durée de vie supérieure à 4000 heures. Ce qui dans la réalité semble exagéré. En effet, si on considère un grand nombre de dispositifs, certains devraient survivre à 4000 heures.Pour remédier à ce problème, en particulier lorsque l'échantillon est petit, on peut prendre $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i}{n+1}}$:

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$	$\dfrac{7}{21} = 0,33$	$\dfrac{11}{21} = 0,52$	$0,67$	$0,76$	$0,86$	$0,90$	

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des rangs moyens :**

Avec la méthode précédente, la probabilité qu'un dispositif n'ait pas eu de défaillance à l'instant $t = 4000$ est estimée à $R(4000) = 0$: Aucun dispositif n'aurait une durée de vie supérieure à 4000 heures. Ce qui dans la réalité semble exagéré. En effet, si on considère un grand nombre de dispositifs, certains devraient survivre à 4000 heures.Pour remédier à ce problème, en particulier lorsque l'échantillon est petit, on peut prendre $\boxed{F(t_i) = \frac{n_i}{n+1}}$:

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$	$\frac{7}{21} = 0,33$	$\frac{11}{21} = 0,52$	$0,67$	$0,76$	$0,86$	$0,90$	$0,95$

On peut utiliser 3 méthodes :

2. **Méthode des rangs moyens :**

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$	$\frac{7}{21} = 0,33$	$\frac{11}{21} = 0,52$	$0,67$	$0,76$	$0,86$	$0,90$	$0,95$

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- On peut relier « harmonieusement » les points à la main, et lire les valeurs prises par F graphiquement sur la courbe. On oublie par de tracer l'asymptote $y = 1$.

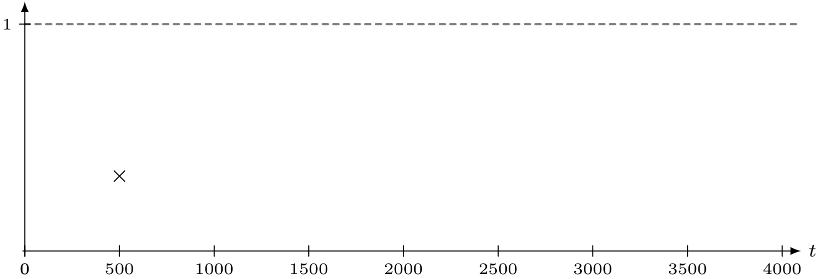
On peut utiliser 3 méthodes :

2. **Méthode des rangs moyens :**

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$	$\frac{7}{21}=0,33$	$\frac{11}{21}=0,52$	$0,67$	$0,76$	$0,86$	$0,90$	$0,95$

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- On peut relier « harmonieusement » les points à la main, et lire les valeurs prises par F graphiquement sur la courbe. On oublie par de tracer l'asymptote $y=1$.



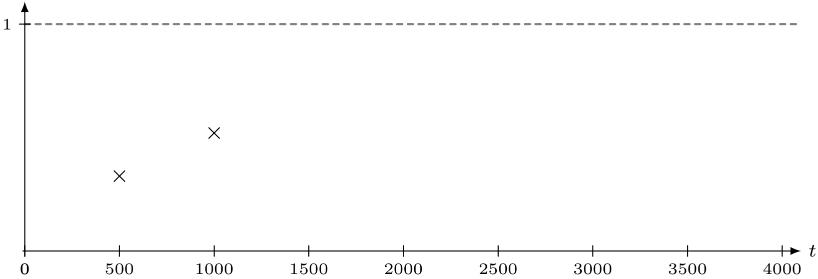
On peut utiliser 3 méthodes :

❷ Méthode des rangs moyens :

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$	$\frac{7}{21} = 0,33$	$\frac{11}{21} = 0,52$	$0,67$	$0,76$	$0,86$	$0,90$	$0,95$

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- On peut relier « harmonieusement » les points à la main, et lire les valeurs prises par F graphiquement sur la courbe. On oublie par de tracer l'asymptote $y = 1$.



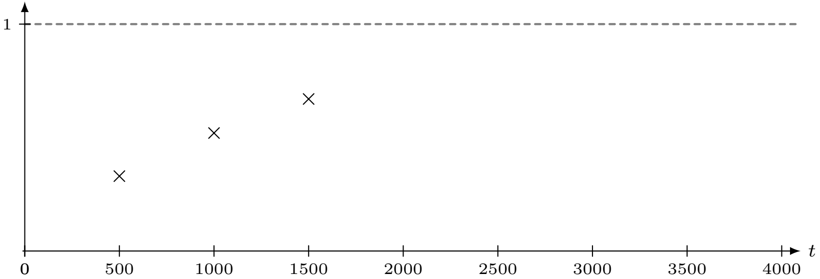
On peut utiliser 3 méthodes :

2. **Méthode des rangs moyens :**

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$	$\frac{7}{21}=0,33$	$\frac{11}{21}=0,52$	$0,67$	$0,76$	$0,86$	$0,90$	$0,95$

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- On peut relier « harmonieusement » les points à la main, et lire les valeurs prises par F graphiquement sur la courbe. On oublie par de tracer l'asymptote $y=1$.



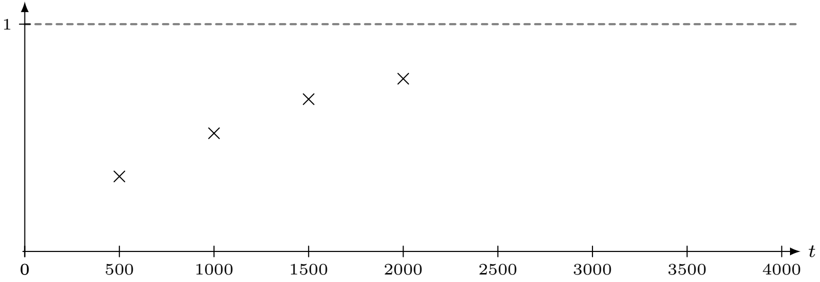
On peut utiliser 3 méthodes :

2. **Méthode des rangs moyens :**

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$	$\frac{7}{21} = 0,33$	$\frac{11}{21} = 0,52$	$0,67$	$0,76$	$0,86$	$0,90$	$0,95$

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- On peut relier « harmonieusement » les points à la main, et lire les valeurs prises par F graphiquement sur la courbe. On oublie par de tracer l'asymptote $y = 1$.



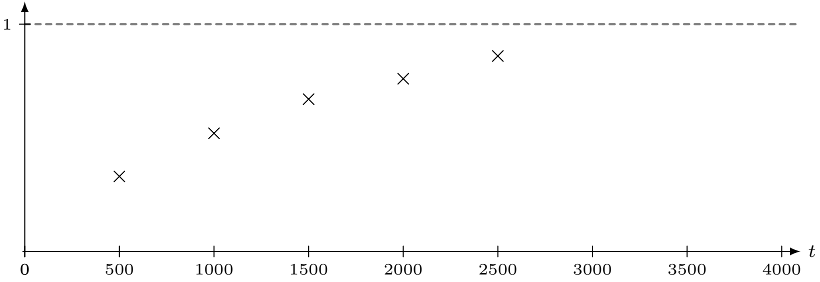
On peut utiliser 3 méthodes :

2. **Méthode des rangs moyens :**

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$	$\frac{7}{21}=0,33$	$\frac{11}{21}=0,52$	$0,67$	$0,76$	$0,86$	$0,90$	$0,95$

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- On peut relier « harmonieusement » les points à la main, et lire les valeurs prises par F graphiquement sur la courbe. On oublie par de tracer l'asymptote $y=1$.



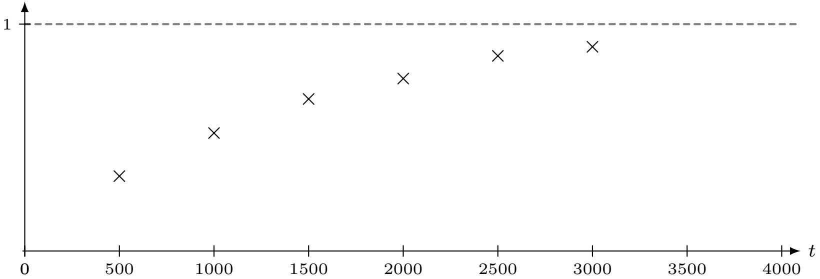
On peut utiliser 3 méthodes :

2. **Méthode des rangs moyens :**

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$	$\frac{7}{21} = 0,33$	$\frac{11}{21} = 0,52$	$0,67$	$0,76$	$0,86$	$0,90$	$0,95$

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- On peut relier « harmonieusement » les points à la main, et lire les valeurs prises par F graphiquement sur la courbe. On oublie par de tracer l'asymptote $y = 1$.



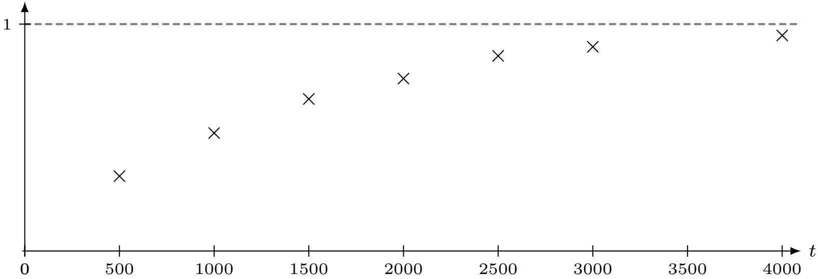
On peut utiliser 3 méthodes :

2. **Méthode des rangs moyens :**

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$	$\frac{7}{21} = 0,33$	$\frac{11}{21} = 0,52$	$0,67$	$0,76$	$0,86$	$0,90$	$0,95$

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- On peut relier « harmonieusement » les points à la main, et lire les valeurs prises par F graphiquement sur la courbe. On oublie par de tracer l'asymptote $y = 1$.



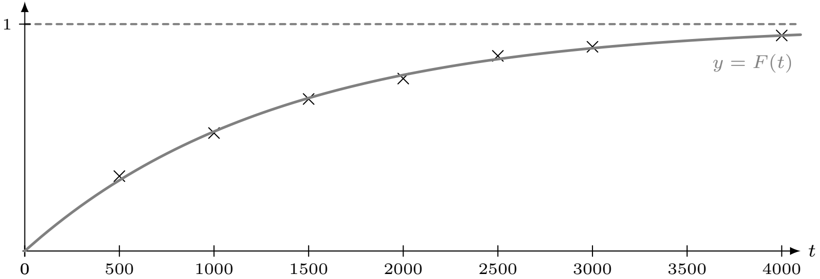
On peut utiliser 3 méthodes :

2. **Méthode des rangs moyens :**

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$	$\frac{7}{21}=0,33$	$\frac{11}{21}=0,52$	$0,67$	$0,76$	$0,86$	$0,90$	$0,95$

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- On peut relier « harmonieusement » les points à la main, et lire les valeurs prises par F graphiquement sur la courbe. On oublie par de tracer l'asymptote $y = 1$.



Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

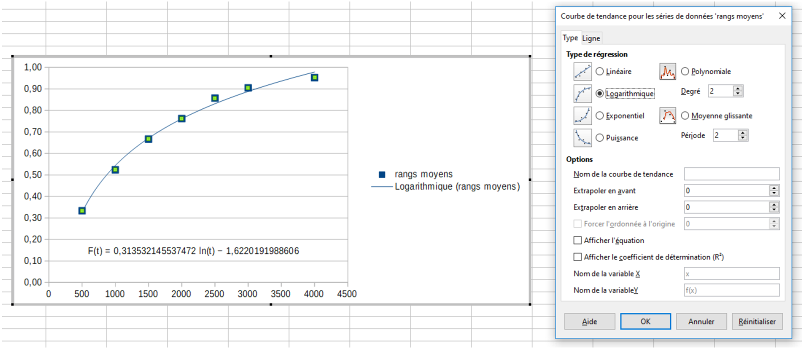
- Utiliser la méthode des moindres carrés pour déterminer une régression linéaire, exponentielle, quadratique, etc.

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- Utiliser la méthode des moindres carrés pour déterminer une régression linéaire, exponentielle, quadratique, etc.
- Utiliser un tableur, et lui demander d'« insérer une courbe de tendance » :

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- Utiliser la méthode des moindres carrés pour déterminer une régression linéaire, exponentielle, quadratique, etc.
- Utiliser un tableur, et lui demander d'« insérer une courbe de tendance » :



Le tableur de « LibreOffice » propose $F(t) \simeq 0,3135\ln(t) - 1,622$.

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- Reconnaître la fonction de répartition d'une loi de probabilité connue.

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- Reconnaître la fonction de répartition d'une loi de probabilité connue.

  Les points semble suivre la fonction de répartition d'une loi **exponentielle** dont l'expression de la fonction de répartition est :

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- Reconnaître la fonction de répartition d'une loi de probabilité connue.

  Les points semble suivre la fonction de répartition d'une loi **exponentielle** dont l'expression de la fonction de répartition est : $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$. On sait que $F(4000) = 0,95$ donc :

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- Reconnaître la fonction de répartition d'une loi de probabilité connue.

  Les points semble suivre la fonction de répartition d'une loi **exponentielle** dont l'expression de la fonction de répartition est : $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$. On sait que $F(4000) = 0,95$ donc :

$$1 - \mathrm{e}^{-4000\lambda} = 0,95$$

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- Reconnaître la fonction de répartition d'une loi de probabilité connue.

  Les points semble suivre la fonction de répartition d'une loi **exponentielle** dont l'expression de la fonction de répartition est : $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$. On sait que $F(4000) = 0,95$ donc :

$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{e}^{-4000\lambda} &= 0{,}95 \\ -4000\lambda &= \ln(0,05) \end{aligned}$$

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- Reconnaître la fonction de répartition d'une loi de probabilité connue.

  Les points semble suivre la fonction de répartition d'une loi **exponentielle** dont l'expression de la fonction de répartition est : $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$. On sait que $F(4000) = 0,95$ donc :

$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{e}^{-4000\lambda} &= 0{,}95 \\ -4000\lambda &= \ln(0,05) \\ \lambda &= \frac{-\ln(0,05)}{4000} \end{aligned}$$

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- Reconnaître la fonction de répartition d'une loi de probabilité connue.

  Les points semble suivre la fonction de répartition d'une loi **exponentielle** dont l'expression de la fonction de répartition est : $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$. On sait que $F(4000) = 0,95$ donc :

$$\begin{aligned}
1 - \mathrm{e}^{-4000\lambda} &= 0{,}95 \\
-4000\lambda &= \ln(0,05) \\
\lambda &= \frac{-\ln(0,05)}{4000} \\
\lambda &\simeq 0,000749
\end{aligned}$$

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- Reconnaître la fonction de répartition d'une loi de probabilité connue.

  Les points semble suivre la fonction de répartition d'une loi **exponentielle** dont l'expression de la fonction de répartition est : $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$. On sait que $F(4000) = 0,95$ donc :

$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{e}^{-4000\lambda} &= 0{,}95 \\ -4000\lambda &= \ln(0,05) \\ \lambda &= \frac{-\ln(0,05)}{4000} \\ \lambda &\simeq 0,000749 \end{aligned}$$

d'où $F(t) \simeq 1 - \mathrm{e}^{-0,000749t}$

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- Reconnaître la fonction de répartition d'une loi de probabilité connue.

  Les points semble suivre la fonction de répartition d'une loi **exponentielle** dont l'expression de la fonction de répartition est : $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$. On sait que $F(4000) = 0,95$ donc :

$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{e}^{-4000\lambda} &= 0{,}95 \\ -4000\lambda &= \ln(0,05) \\ \lambda &= \frac{-\ln(0,05)}{4000} \\ \lambda &\simeq 0,000749 \end{aligned}$$

d'où $F(t) \simeq 1 - \mathrm{e}^{-0,000749t}$

Ainsi, la probabilité qu'un dispositif n'ait pas de défaillance avant 1233 heures est :

Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- Reconnaître la fonction de répartition d'une loi de probabilité connue.

  Les points semble suivre la fonction de répartition d'une loi **exponentielle** dont l'expression de la fonction de répartition est : $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$. On sait que $F(4000) = 0,95$ donc :

$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{e}^{-4000\lambda} &= 0{,}95 \\ -4000\lambda &= \ln(0,05) \\ \lambda &= \frac{-\ln(0,05)}{4000} \\ \lambda &\simeq 0,000749 \end{aligned}$$

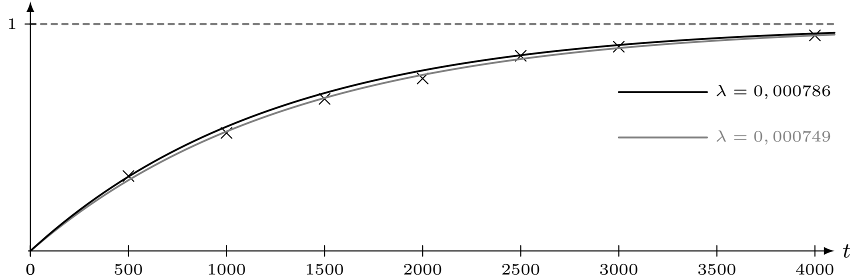
d'où $F(t) \simeq 1 - \mathrm{e}^{-0,000749t}$

Ainsi, la probabilité qu'un dispositif n'ait pas de défaillance avant 1233 heures est :

$$R(1233) \simeq 1 - F(1233) = \mathrm{e}^{-0,000749 \times 1233} = 60,3\%$$

Remarque : On a choisit de déterminer λ en posant $F(4000) = 0,95$. Ce choix est arbitraire, on aurait pu prendre $F(2500) = 0,86$, ce qui nous aurait conduit à $\lambda \simeq 0,000786$.

Remarque : On a choisit de déterminer λ en posant $F(4000) = 0,95$. Ce choix est arbitraire, on aurait pu prendre $F(2500) = 0,86$, ce qui nous aurait conduit à $\lambda \simeq 0,000786$.



Les différentes estimations des fonctions de défaillances suivant les valeurs de λ.

3. **Méthode des rangs médians :**

Enfin, quand l'échantillon est **petit**, on peut prendre $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i - 0,3}{n + 0,4}}$

3. **Méthode des rangs médians :**

Enfin, quand l'échantillon est **petit**, on peut prendre $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i - 0,3}{n + 0,4}}$

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$			$0,67$	$0,77$	$0,87$	$0,92$	$0,97$

3. **Méthode des rangs médians :**

Enfin, quand l'échantillon est **petit**, on peut prendre $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i - 0,3}{n + 0,4}}$

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$	$\dfrac{6,7}{20,4} \simeq 0,33$		$0,67$	$0,77$	$0,87$	$0,92$	$0,97$

3. **Méthode des rangs médians :**

Enfin, quand l'échantillon est **petit**, on peut prendre $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i - 0,3}{n + 0,4}}$

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$	$\dfrac{6,7}{20,4} \simeq 0,33$	$\dfrac{10,7}{20,4} \simeq 0,52$	$0,67$	$0,77$	$0,87$	$0,92$	$0,97$

3. Taux d'avarie.

a. Approche statistique.

Reprenons notre exemple :

Instants en heures	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Nombre d'appareils en fonctionnement	$20-7=13$	9	6	4	2	1	0

3. Taux d'avarie.

a. Approche statistique.

Reprenons notre exemple :

Instants en heures	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Nombre d'appareils en fonctionnement	$20 - 7 = 13$	9	6	4	2	1	0

- Entre 1000 et 1500 heures,

3. Taux d'avarie.

a. Approche statistique.

Reprenons notre exemple :

Instants en heures	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Nombre d'appareils en fonctionnement	$20-7=13$	9	6	4	2	1	0

- Entre 1000 et 1500 heures, $9-6=3$ aspirateurs sont tombés en panne sur 9.

3. Taux d'avarie.

a. Approche statistique.

Reprenons notre exemple :

Instants en heures	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Nombre d'appareils en fonctionnement	$20 - 7 = 13$	9	6	4	2	1	0

- Entre 1000 et 1500 heures, $9 - 6 = 3$ aspirateurs sont tombés en panne sur 9.

  Donc, le taux d'**avarie moyen** entre 1000 et 1500 heures est

3. Taux d'avarie.

a. Approche statistique.

Reprenons notre exemple :

Instants en heures	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Nombre d'appareils en fonctionnement	$20 - 7 = 13$	9	6	4	2	1	0

- Entre 1000 et 1500 heures, $9 - 6 = 3$ aspirateurs sont tombés en panne sur 9.

  Donc, le taux d'**avarie moyen** entre 1000 et 1500 heures est $\dfrac{3}{9} = 0,33$

3. Taux d'avarie.

a. Approche statistique.

Reprenons notre exemple :

Instants en heures	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Nombre d'appareils en fonctionnement	$20 - 7 = 13$	9	6	4	2	1	0

- Entre 1000 et 1500 heures, $9 - 6 = 3$ aspirateurs sont tombés en panne sur 9.

  Donc, le taux d'**avarie moyen** entre 1000 et 1500 heures est $\frac{3}{9} = 0,33$, autrement dit,

  33% des aspirateurs sont tombés en panne dans l'intervalle $]1000; 1500]$.

3. Taux d'avarie.

a. Approche statistique.

Reprenons notre exemple :

Instants en heures	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Nombre d'appareils en fonctionnement	$20-7=13$	9	6	4	2	1	0

- Entre 1000 et 1500 heures, $9-6=3$ aspirateurs sont tombés en panne sur 9.

  Donc, le taux d'**avarie moyen** entre 1000 et 1500 heures est $\dfrac{3}{9}=0,33$, autrement dit, 33% des aspirateurs sont tombés en panne dans l'intervalle $]1000;1500]$.

  Le taux d'**avarie moyen par unité de temps** entre 1000 et 1500 heures est donc de

$$\frac{0,33}{500}=0,00066 \text{ aspirateurs par heure.}$$

Reprenons notre exemple :

Instants en heures	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Nombre d'appareils en fonctionnement	$20 - 7 = 13$	9	6	4	2	1	0

Reprenons notre exemple :

Instants en heures	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Nombre d'appareils en fonctionnement	$20-7=13$	9	6	4	2	1	0

- Entre 2000 et 2500 heures, $4-2=2$ aspirateurs sont tombés en panne sur 4.

Reprenons notre exemple :

Instants en heures	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Nombre d'appareils en fonctionnement	$20-7=13$	9	6	4	2	1	0

- Entre 2000 et 2500 heures, $4-2=2$ aspirateurs sont tombés en panne sur 4.

  Donc, le taux d'**avarie moyen** entre 2000 et 2500 heures est

Reprenons notre exemple :

Instants en heures	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Nombre d'appareils en fonctionnement	$20 - 7 = 13$	9	6	4	2	1	0

- Entre 2000 et 2500 heures, $4 - 2 = 2$ aspirateurs sont tombés en panne sur 4.

  Donc, le taux d'**avarie moyen** entre 2000 et 2500 heures est $\dfrac{2}{4} = 50\%$.

Reprenons notre exemple :

Instants en heures	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Nombre d'appareils en fonctionnement	$20 - 7 = 13$	9	6	4	2	1	0

- Entre 2000 et 2500 heures, $4 - 2 = 2$ aspirateurs sont tombés en panne sur 4.

  Donc, le taux d'**avarie moyen** entre 2000 et 2500 heures est $\frac{2}{4} = 50\%$.

  Le taux d'avarie moyen par unité de temps entre 1000 et 1500 heures est de

Reprenons notre exemple :

Instants en heures	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Nombre d'appareils en fonctionnement	$20-7=13$	9	6	4	2	1	0

- Entre 2000 et 2500 heures, $4-2=2$ aspirateurs sont tombés en panne sur 4.

  Donc, le taux d'**avarie moyen** entre 2000 et 2500 heures est $\dfrac{2}{4}=50\%$.

  Le taux d'avarie moyen par unité de temps entre 1000 et 1500 heures est de

  $$\frac{0,5}{500}=0,001 \text{ aspirateurs par heure.}$$

Intervalle de temps en heures	$[0; 500]$	$]500; 1000]$	$]1000; 1500]$
Taux d'avarie moyen	$0,35$	$0,31$	$0,33$
Taux d'avarie moyen par heure	$0,07\%$	$0,062\%$	$0,066\%$

Intervalle de temps en heures	$]1500; 2000]$	$]2000; 2500]$	$]2500; 3000]$	$]3000; 4000]$
Taux d'avarie moyen	$0,33$	$0,50$	$0,50$	1
Taux d'avarie moyen par heure	$0,066\%$	$0,1\%$	$0,1\%$	$0,1\%$

b. Approche probabiliste.

Notons N l'effectif totale de notre échantillon, et plaçons-nous dans l'intervalle $[t,\, t+h]$:

b. Approche probabiliste.

Notons N l'effectif totale de notre échantillon, et plaçons-nous dans l'intervalle $[t,\, t+h]$:

- $F(t) \times N$ est le nombre d'aspirateurs défaillants à l'instant t.

b. Approche probabiliste.

Notons N l'effectif totale de notre échantillon, et plaçons-nous dans l'intervalle $[t, t+h]$:

- $F(t) \times N$ est le nombre d'aspirateurs défaillants à l'instant t.
- $F(t+h) \times N$ est le nombre d'aspirateurs défaillants à l'instant $t+h$.

b. Approche probabiliste.

Notons N l'effectif totale de notre échantillon, et plaçons-nous dans l'intervalle $[t,\, t+h]$:

- $F(t) \times N$ est le nombre d'aspirateurs défaillants à l'instant t.
- $F(t+h) \times N$ est le nombre d'aspirateurs défaillants à l'instant $t+h$.
- $\big(F(t+h) - F(t)\big) \times N$ est le nombre d'aspirateurs défaillants dans l'intervalle $[t,\, t+h]$.

b. Approche probabiliste.

Notons N l'effectif totale de notre échantillon, et plaçons-nous dans l'intervalle $[t,\, t+h]$:

- $F(t) \times N$ est le nombre d'aspirateurs défaillants à l'instant t.
- $F(t+h) \times N$ est le nombre d'aspirateurs défaillants à l'instant $t+h$.
- $\big(F(t+h) - F(t)\big) \times N$ est le nombre d'aspirateurs défaillants dans l'intervalle $[t,\, t+h]$.
- $R(t) \times N$ est le nombre d'aspirateurs en fonctionnement à l'instant t.

b. Approche probabiliste.

Notons N l'effectif totale de notre échantillon, et plaçons-nous dans l'intervalle $[t,\, t+h]$:

- $F(t) \times N$ est le nombre d'aspirateurs défaillants à l'instant t.
- $F(t+h) \times N$ est le nombre d'aspirateurs défaillants à l'instant $t+h$.
- $\big(F(t+h) - F(t)\big) \times N$ est le nombre d'aspirateurs défaillants dans l'intervalle $[t,\, t+h]$.
- $R(t) \times N$ est le nombre d'aspirateurs en fonctionnement à l'instant t.

Définition:

Dans l'intervalle de temps $[t\,, t+h]$, le **taux d'avarie (ou de défaillance)**

- moyen est $\dfrac{F(t+h) - F(t)}{R(t)}$
- moyen par unité de temps est $\dfrac{F(t+h) - F(t)}{h \times R(t)}$
- **instantanée** est $\dfrac{f(t)}{R(t)}$

Le taux d'avarie instantanée à l'instant t est noté $\lambda(t)$.

Définition:

Dans l'intervalle de temps $[t\,,t+h]$, le **taux d'avarie (ou de défaillance)**

- moyen est $\dfrac{F(t+h)-F(t)}{R(t)}$
- moyen par unité de temps est $\dfrac{F(t+h)-F(t)}{h \times R(t)}$
- **instantanée** est $\dfrac{f(t)}{R(t)}$

Le taux d'avarie instantanée à l'instant t est noté $\lambda(t)$.

Définition:

Dans l'intervalle de temps $[t\,, t+h]$, le **taux d'avarie (ou de défaillance)**

- moyen est $\dfrac{F(t+h)-F(t)}{R(t)}$
- moyen par unité de temps est $\dfrac{F(t+h)-F(t)}{h \times R(t)}$
- **instantanée** est $\dfrac{f(t)}{R(t)}$

Le taux d'avarie instantanée à l'instant t est noté $\lambda(t)$.

Démonstration

Le taux d'avarie instantanée est $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\big(F(t+h)-F(t)\big) \times N}{h \times R(t) \times N} = \frac{F'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$.

On en déduit que :

Propriété

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \; ; \; \lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} \; ; \; \text{et } \lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

On en déduit que :

Propriété

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \; ; \; \lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} \; ; \; \text{ et } \lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

Ces égalités permettent de relier le taux d'avarie instantanée à la fonction de défaillance ou à la fonction de fiabilité.

On en déduit que :

Propriété

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \; ; \; \lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} \; ; \; \text{ et } \lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

Ces égalités permettent de relier le taux d'avarie instantanée à la fonction de défaillance ou à la fonction de fiabilité.

En résolvant ces égalités qui sont des équations différentielles on obtient :

On en déduit que :

Propriété

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \; ; \; \lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} \; ; \; \text{ et } \lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

Ces égalités permettent de relier le taux d'avarie instantanée à la fonction de défaillance ou à la fonction de fiabilité.

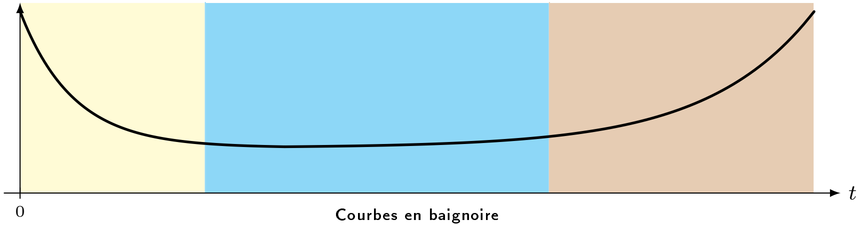
En résolvant ces égalités qui sont des équations différentielles on obtient :

Propriété

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)\,\mathrm{d}x\right) \text{ et } F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

On constate expérimentalement que, pour la plupart des matériels, la courbe représentative du taux d'avarie instantané $t \mapsto \lambda(t)$ a la forme donnée par la figure ci-dessous. Elle est appelée « courbe en baignoire » et comporte trois parties distinctes :

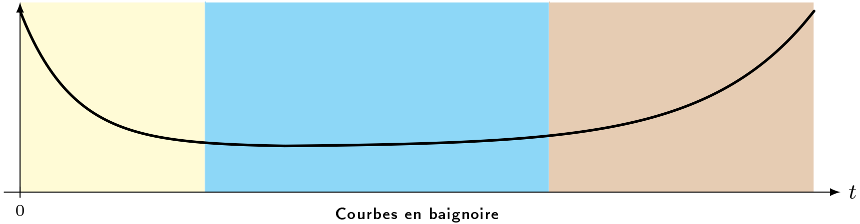
On constate expérimentalement que, pour la plupart des matériels, la courbe représentative du taux d'avarie instantané $t \mapsto \lambda(t)$ a la forme donnée par la figure ci-dessous. Elle est appelée « courbe en baignoire » et comporte trois parties distinctes :



Courbes en baignoire

I. Premières notions de fiabilité.

On constate expérimentalement que, pour la plupart des matériels, la courbe représentative du taux d'avarie instantané $t \mapsto \lambda(t)$ a la forme donnée par la figure ci-dessous. Elle est appelée « courbe en baignoire » et comporte trois parties distinctes :

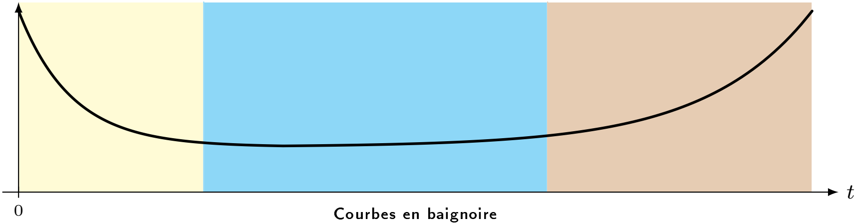


Courbes en baignoire

Pannes précoces : la période de début de fonctionnement, où le taux d'avarie instantané décroît avec le temps, car les pannes précoces dues à des défauts de fabrication ou de conception sont de moins en moins nombreuses.

I. Premières notions de fiabilité.

On constate expérimentalement que, pour la plupart des matériels, la courbe représentative du taux d'avarie instantané $t \mapsto \lambda(t)$ a la forme donnée par la figure ci-dessous. Elle est appelée « courbe en baignoire » et comporte trois parties distinctes :

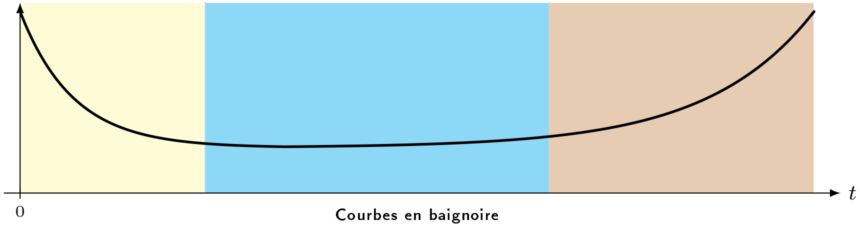


Courbes en baignoire

Pannes précoces : la période de début de fonctionnement, où le taux d'avarie instantané décroît avec le temps, car les pannes précoces dues à des défauts de fabrication ou de conception sont de moins en moins nombreuses.

Vie utile : la période de maturité, ou « vie utile », où le taux d'avarie instantané reste à peu près constant ; pendant cette période, les pannes paraissent dues au hasard.

On constate expérimentalement que, pour la plupart des matériels, la courbe représentative du taux d'avarie instantané $t \mapsto \lambda(t)$ a la forme donnée par la figure ci-dessous. Elle est appelée « courbe en baignoire » et comporte trois parties distinctes :



Courbes en baignoire

Pannes précoces : la période de début de fonctionnement, où le taux d'avarie instantané décroît avec le temps, car les pannes précoces dues à des défauts de fabrication ou de conception sont de moins en moins nombreuses.

Vie utile : la période de maturité, ou « vie utile », où le taux d'avarie instantané reste à peu près constant ; pendant cette période, les pannes paraissent dues au hasard.

Usure : la période d'usure, où le taux d'avarie instantané augmente avec le temps, car les pannes sont dues à l'usure croissante du matériel.

c. MTBF.

Définition:

Le **T**emps **M**oyen de **B**on **F**onctionnement (Mean Time Between Failure) est l'espérance de T :

$$\text{MTBF} = E(T) = \int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$$

c. MTBF.

Définition:

Le **T**emps **M**oyen de **B**on **F**onctionnement (Mean Time Between Failure) est l'espérance de T :

$$\text{MTBF} = E(T) = \int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$$

L'espérance, $E(T)$ de la variable aléatoire T représente la **durée de vie moyenne** d'un dispositif avant sa première défaillance.

- **Fiabilité d'un système monté en série :**

II. Fiabilité d'un système.

- **Fiabilité d'un système monté en série :**

$$-\boxed{1}-\boxed{2}-\boxed{3}- \quad \cdots \quad -\boxed{n-2}-\boxed{n-1}-\boxed{n}-$$

Pour un système constitués de n composants montés en série (le bon fonctionnement de chacun étant indépendant du bon fonctionnement des autres),

II. Fiabilité d'un système.

- **Fiabilité d'un système monté en série :**

Pour un système constitués de n composants montés en série (le bon fonctionnement de chacun étant indépendant du bon fonctionnement des autres), on montre que l'on a :

- **Fiabilité d'un système monté en série :**

$$—\boxed{1}—\boxed{2}—\boxed{3}— \quad \cdots \quad —\boxed{n-2}—\boxed{n-1}—\boxed{n}—$$

Pour un système constitués de n composants montés en série (le bon fonctionnement de chacun étant indépendant du bon fonctionnement des autres), on montre que l'on a :

$$\boxed{R(T) = R_1(t) \times R_2(t) \times \cdots \times R_n(t)}$$

II. Fiabilité d'un système.

- **Fiabilité d'un système monté en série :**

$$-\boxed{1}-\boxed{2}-\boxed{3}-\quad\cdots\quad-\boxed{n-2}-\boxed{n-1}-\boxed{n}-$$

Pour un système constitués de n composants montés en série (le bon fonctionnement de chacun étant indépendant du bon fonctionnement des autres), on montre que l'on a :

$$\boxed{R(T) = R_1(t) \times R_2(t) \times \cdots \times R_n(t)}$$

où R_1, R_2, ..., R_n sont les fonctions de fiabilités respectives des n composants.

- **Fiabilité d'un système monté en série :**

$$-\boxed{1}-\boxed{2}-\boxed{3}- \quad \cdots \quad -\boxed{n-2}-\boxed{n-1}-\boxed{n}-$$

Pour un système constitués de n composants montés en série (le bon fonctionnement de chacun étant indépendant du bon fonctionnement des autres), on montre que l'on a :

$$\boxed{R(T) = R_1(t) \times R_2(t) \times \cdots \times R_n(t)}$$

où R_1, R_2, ..., R_n sont les fonctions de fiabilités respectives des n composants.

Remarque : En effet, le système est défaillant dès qu'un seul composant est défaillant.

II. Fiabilité d'un système.

- **Fiabilité d'un système monté en série :**

$$-\boxed{1}-\boxed{2}-\boxed{3}- \quad \cdots \quad -\boxed{n-2}-\boxed{n-1}-\boxed{n}-$$

Pour un système constitués de n composants montés en série (le bon fonctionnement de chacun étant indépendant du bon fonctionnement des autres), on montre que l'on a :

$$\boxed{R(T) = R_1(t) \times R_2(t) \times \cdots \times R_n(t)}$$

où R_1, R_2, ..., R_n sont les fonctions de fiabilités respectives des n composants.

Remarque : En effet, le système est défaillant dès qu'un seul composant est défaillant.

Démonstration

En notant T_i la variable aléatoire durée de vie avant une défaillance du composant i, on a :

$$P(T > t) = P\big((T_1 > t) \cap (T_2 > t) \cap \ldots \cap (T_n > t)\big)$$

Le bon fonctionnement de chacun des composants étant indépendant du bon fonctionnement des autres, on a :

$$P(T > t) = P(T_1 > t) \times P(T_2 > t) \times \ldots \times P(T_n > t) = R_1(t) \times R_2(t) \times \cdots \times R_n(t)$$

- **Fiabilité d'un système monté en parallèle :**

- **Fiabilité d'un système monté en parallèle :**

En parallèles, il y a deux modes différents :

- **Fiabilité d'un système monté en parallèle :**

  En parallèles, il y a deux modes différents :

  - **Redondance active** :

- **Fiabilité d'un système monté en parallèle :**

En parallèles, il y a deux modes différents :

- **Redondance active** : tous les composants fonctionnent dès le temps $t = 0$.

- **Fiabilité d'un système monté en parallèle :**

En parallèles, il y a deux modes différents :

- **Redondance active** : tous les composants fonctionnent dès le temps $t = 0$. Il suffit qu'au moins un composant fonctionne pour que le système au complet fonctionne.

- **Fiabilité d'un système monté en parallèle :**

En parallèles, il y a deux modes différents :

- **Redondance active** : tous les composants fonctionnent dès le temps $t = 0$. Il suffit qu'au moins un composant fonctionne pour que le système au complet fonctionne. La durée de vie T du système est

$$T = max\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$$

- **Fiabilité d'un système monté en parallèle :**

En parallèles, il y a deux modes différents :

- **Redondance active** : tous les composants fonctionnent dès le temps $t = 0$. Il suffit qu'au moins un composant fonctionne pour que le système au complet fonctionne. La durée de vie T du système est

$$T = max\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$$

- **Redondance passive** :

- **Fiabilité d'un système monté en parallèle :**

En parallèles, il y a deux modes différents :

- **Redondance active** : tous les composants fonctionnent dès le temps $t = 0$. Il suffit qu'au moins un composant fonctionne pour que le système au complet fonctionne. La durée de vie T du système est
$$T = max\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$$
- **Redondance passive** : Seul le premier composant est mis en marche à $t = 0$.

- **Fiabilité d'un système monté en parallèle :**

En parallèles, il y a deux modes différents :

- **Redondance active** : tous les composants fonctionnent dès le temps $t = 0$. Il suffit qu'au moins un composant fonctionne pour que le système au complet fonctionne. La durée de vie T du système est

$$T = max\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$$

- **Redondance passive** : Seul le premier composant est mis en marche à $t = 0$. Une fois en panne, le deuxième composant prend le relai et ainsi de suite.

- **Fiabilité d'un système monté en parallèle :**

En parallèles, il y a deux modes différents :

- **Redondance active** : tous les composants fonctionnent dès le temps $t = 0$. Il suffit qu'au moins un composant fonctionne pour que le système au complet fonctionne. La durée de vie T du système est

$$T = max\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$$

- **Redondance passive** : Seul le premier composant est mis en marche à $t = 0$. Une fois en panne, le deuxième composant prend le relai et ainsi de suite. Le système au complet tombe en panne quand le dernier composant tombe en panne.

- **Fiabilité d'un système monté en parallèle :**

En parallèles, il y a deux modes différents :

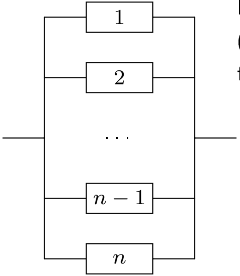
- **Redondance active** : tous les composants fonctionnent dès le temps $t = 0$. Il suffit qu'au moins un composant fonctionne pour que le système au complet fonctionne. La durée de vie T du système est

$$T = max\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$$

- **Redondance passive** : Seul le premier composant est mis en marche à $t = 0$. Une fois en panne, le deuxième composant prend le relai et ainsi de suite. Le système au complet tombe en panne quand le dernier composant tombe en panne.

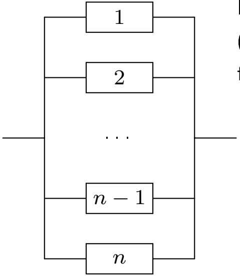
Dans ce cours, nous nous placerons toujours en redondance active.

- **Fiabilité d'un système monté en parallèle :**



Pour un système constitués de n composants montés en parallèles (le bon fonctionnement de chacun étant indépendant du bon fonctionnement des autres), on montre que l'on a

- **Fiabilité d'un système monté en parallèle :**

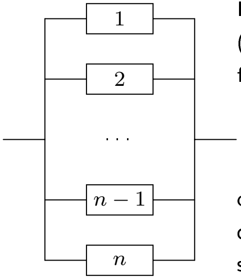


Pour un système constitués de n composants montés en parallèles (le bon fonctionnement de chacun étant indépendant du bon fonctionnement des autres), on montre que l'on a

$$\boxed{F(T) = F_1(t) \times F_2(t) \times \cdots \times F_n(t)}$$

II. Fiabilité d'un système.

- **Fiabilité d'un système monté en parallèle :**



Pour un système constitués de n composants montés en parallèles (le bon fonctionnement de chacun étant indépendant du bon fonctionnement des autres), on montre que l'on a

$$\boxed{F(T) = F_1(t) \times F_2(t) \times \cdots \times F_n(t)}$$

où F_1, F_2, ..., F_n sont les fonctions de défaillances respectives des n composants. En effet, le système est fonctionnel dès qu'un seul composant est fonctionnel.

$$\boxed{F(T) = F_1(t) \times F_2(t) \times \cdots \times F_n(t)}$$

Démonstration

Pour que le système monté en parallèles soit défaillant,

$$\boxed{F(T) = F_1(t) \times F_2(t) \times \cdots \times F_n(t)}$$

Démonstration

Pour que le système monté en parallèles soit défaillant, il faut que tous les composants le soit, donc :

$$P(T \leqslant t) = P\big((T_1 \leqslant t) \cap (T_2 \leqslant t) \cap \ldots \cap (T_n \leqslant t)\big)$$

$$\boxed{F(T) = F_1(t) \times F_2(t) \times \cdots \times F_n(t)}$$

Démonstration

Pour que le système monté en parallèles soit défaillant, il faut que tous les composants le soit, donc :

$$P(T \leqslant t) = P\big((T_1 \leqslant t) \cap (T_2 \leqslant t) \cap \ldots \cap (T_n \leqslant t)\big)$$

Le bon fonctionnement de chacun des composants étant indépendant du bon fonctionnement des autres,

$$\boxed{F(T) = F_1(t) \times F_2(t) \times \cdots \times F_n(t)}$$

Démonstration

Pour que le système monté en parallèles soit défaillant, il faut que tous les composants le soit, donc :

$$P(T \leqslant t) = P\big((T_1 \leqslant t) \cap (T_2 \leqslant t) \cap \ldots \cap (T_n \leqslant t)\big)$$

Le bon fonctionnement de chacun des composants étant indépendant du bon fonctionnement des autres, donc* le mauvais fonctionnement de chacun des composants étant indépendant du mauvais fonctionnement des autres, et on a :

$$\boxed{F(T) = F_1(t) \times F_2(t) \times \cdots \times F_n(t)}$$

Démonstration

Pour que le système monté en parallèles soit défaillant, il faut que tous les composants le soit, donc :

$$P(T \leqslant t) = P\big((T_1 \leqslant t) \cap (T_2 \leqslant t) \cap \ldots \cap (T_n \leqslant t)\big)$$

Le bon fonctionnement de chacun des composants étant indépendant du bon fonctionnement des autres, donc* le mauvais fonctionnement de chacun des composants étant indépendant du mauvais fonctionnement des autres, et on a :

$$P(T \leqslant t) = P(T_1 \leqslant t) \times P(T_2 \leqslant t) \times \ldots \times P(T_n \leqslant t) = F_1(t) \times F_2(t) \times \cdots \times F_n(t)$$

(*) Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ aussi.

III. Application avec la loi exponentielle.

Dans un certain nombre de cas, à partir des valeurs numériques de fiabilité ou de défaillance établies grâce à un échantillonnage et par exemple la méthode des rangs, on peut utiliser une loi de probabilité pour décrire les données.

III. Application avec la loi exponentielle.

Dans un certain nombre de cas, à partir des valeurs numériques de fiabilité ou de défaillance établies grâce à un échantillonnage et par exemple la méthode des rangs, on peut utiliser une loi de probabilité pour décrire les données.

On peut utiliser n'importe quelle loi de probabilité pourvu qu'elle décrive les données. Dans la pratique, on retient en général quatre lois :

Dans un certain nombre de cas, à partir des valeurs numériques de fiabilité ou de défaillance établies grâce à un échantillonnage et par exemple la méthode des rangs, on peut utiliser une loi de probabilité pour décrire les données.

On peut utiliser n'importe quelle loi de probabilité pourvu qu'elle décrive les données. Dans la pratique, on retient en général quatre lois :

- la loi exponentielle ;

III. Application avec la loi exponentielle.

Dans un certain nombre de cas, à partir des valeurs numériques de fiabilité ou de défaillance établies grâce à un échantillonnage et par exemple la méthode des rangs, on peut utiliser une loi de probabilité pour décrire les données.

On peut utiliser n'importe quelle loi de probabilité pourvu qu'elle décrive les données. Dans la pratique, on retient en général quatre lois :

- la loi exponentielle ;
- la loi normale ;

Dans un certain nombre de cas, à partir des valeurs numériques de fiabilité ou de défaillance établies grâce à un échantillonnage et par exemple la méthode des rangs, on peut utiliser une loi de probabilité pour décrire les données.

On peut utiliser n'importe quelle loi de probabilité pourvu qu'elle décrive les données. Dans la pratique, on retient en général quatre lois :

- la loi exponentielle ;
- la loi normale ;
- la loi log-normale ;

Dans un certain nombre de cas, à partir des valeurs numériques de fiabilité ou de défaillance établies grâce à un échantillonnage et par exemple la méthode des rangs, on peut utiliser une loi de probabilité pour décrire les données.

On peut utiliser n'importe quelle loi de probabilité pourvu qu'elle décrive les données. Dans la pratique, on retient en général quatre lois :

- la loi exponentielle ;
- la loi normale ;
- la loi log-normale ;
- la loi de Weibull.

III. Application avec la loi exponentielle.

Dans un certain nombre de cas, à partir des valeurs numériques de fiabilité ou de défaillance établies grâce à un échantillonnage et par exemple la méthode des rangs, on peut utiliser une loi de probabilité pour décrire les données.

On peut utiliser n'importe quelle loi de probabilité pourvu qu'elle décrive les données. Dans la pratique, on retient en général quatre lois :

- la loi exponentielle ;
- la loi normale ;
- la loi log-normale ;
- la loi de Weibull.

Dans tout cette section, nous allons nous concentré sur la loi exponentielle.

III. Application avec la loi exponentielle.

Dans un certain nombre de cas, à partir des valeurs numériques de fiabilité ou de défaillance établies grâce à un échantillonnage et par exemple la méthode des rangs, on peut utiliser une loi de probabilité pour décrire les données.

On peut utiliser n'importe quelle loi de probabilité pourvu qu'elle décrive les données. Dans la pratique, on retient en général quatre lois :

- la loi exponentielle ;
- la loi normale ;
- la loi log-normale ;
- la loi de Weibull.

Dans tout cette section, nous allons nous concentré sur la loi exponentielle. Ainsi, la densité de la variable aléatoire T sera toujours : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ avec $\lambda > 0$.

Dans un certain nombre de cas, à partir des valeurs numériques de fiabilité ou de défaillance établies grâce à un échantillonnage et par exemple la méthode des rangs, on peut utiliser une loi de probabilité pour décrire les données.

On peut utiliser n'importe quelle loi de probabilité pourvu qu'elle décrive les données. Dans la pratique, on retient en général quatre lois :

- la loi exponentielle ;
- la loi normale ;
- la loi log-normale ;
- la loi de Weibull.

Dans tout cette section, nous allons nous concentré sur la loi exponentielle. Ainsi, la densité de la variable aléatoire T sera toujours : $f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ avec $\lambda > 0$.

Cette loi concerne tous les matériels pendant une durée de leur **« vie utile »** (voir la courbe en baignoire)

Dans un certain nombre de cas, à partir des valeurs numériques de fiabilité ou de défaillance établies grâce à un échantillonnage et par exemple la méthode des rangs, on peut utiliser une loi de probabilité pour décrire les données.

On peut utiliser n'importe quelle loi de probabilité pourvu qu'elle décrive les données. Dans la pratique, on retient en général quatre lois :

- la loi exponentielle ;
- la loi normale ;
- la loi log-normale ;
- la loi de Weibull.

Dans tout cette section, nous allons nous concentré sur la loi exponentielle. Ainsi, la densité de la variable aléatoire T sera toujours : $f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ avec $\lambda > 0$.

Cette loi concerne tous les matériels pendant une durée de leur **« vie utile »** (voir la courbe en baignoire) et les matériels électroniques pendant presque toute leur vie.

Propriété

La loi exponentielle est la loi suivie par la variable aléatoire T lorsque le taux d'avarie est **constant**. Autrement dit, on a :

$$\forall t \geqslant 0\,,\ \lambda(t) = \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \forall t \geqslant 0\,,\ f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

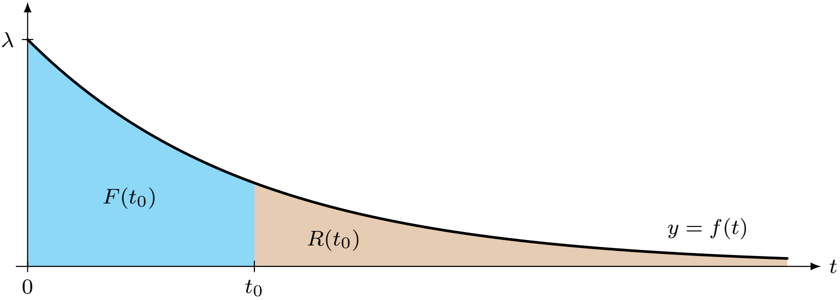
où λ est une constante réelle strictement positive.

Propriété

- La fonction de fiabilité est définie pour tout $t \geqslant 0$ par $R(t) = e^{-\lambda t}$.
- La fonction de défaillance est définie pour tout $t \geqslant 0$ par $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- La densité de probabilité de la variable aléatoire T est définie pour tout $t \geqslant 0$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Propriété

- La fonction de fiabilité est définie pour tout $t \geqslant 0$ par $R(t) = e^{-\lambda t}$.
- La fonction de défaillance est définie pour tout $t \geqslant 0$ par $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- La densité de probabilité de la variable aléatoire T est définie pour tout $t \geqslant 0$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.



Propriété

- Le temps moyen de bon fonctionnement est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$
- L'écart-type de la variable aléatoire T est $\sigma_T = \dfrac{1}{\lambda}$