Chapitre 2 - Probabilités.

Soient A, B, et C trois événements d'un univers Ω, on a les propriétés suivantes :

Soient A, B, et C trois événements d'un univers Ω, on a les propriétés suivantes :

- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, et , $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

Soient A, B, et C trois événements d'un univers Ω, on a les propriétés suivantes :

- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, et , $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

I. Rappels

Soient A, B, et C trois événements d'un univers Ω, on a les propriétés suivantes :

- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, et , $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles.

Soient A, B, et C trois événements d'un univers Ω, on a les propriétés suivantes :

- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, et , $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles.
- Si $P(B) \neq 0$ alors la probabilité de A sachant B est $\boldsymbol{P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

Subjectivement, on pourrait dire que A est indépendant de B si $P_B(A) =$

Subjectivement, on pourrait dire que A est indépendant de B si $P_B(A) = \boldsymbol{P(A)}$.

Subjectivement, on pourrait dire que A est indépendant de B si $P_B(A) = \boldsymbol{P(A)}$.

Mais dans ce cas, $P_A(B)$ est-elle égale à $P(B)$?

Subjectivement, on pourrait dire que A est indépendant de B si $P_B(A) = \boldsymbol{P(A)}$.

Mais dans ce cas, $P_A(B)$ est-elle égale à $P(B)$?

$$P_B(A) = P(A) \iff P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Subjectivement, on pourrait dire que A est indépendant de B si $P_B(A) = \boldsymbol{P(A)}$.

Mais dans ce cas, $P_A(B)$ est-elle égale à $P(B)$?

$$P_B(A) = P(A) \iff P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\iff \boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Subjectivement, on pourrait dire que A est indépendant de B si $P_B(A) = \boldsymbol{P(A)}$.
Mais dans ce cas, $P_A(B)$ est-elle égale à $P(B)$?

$$
\begin{aligned}
P_B(A) = P(A) \quad & \iff \quad P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
& \iff \quad \boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)} \\
& \iff \quad P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}
\end{aligned}
$$

Subjectivement, on pourrait dire que A est indépendant de B si $P_B(A) = \boldsymbol{P(A)}$.

Mais dans ce cas, $P_A(B)$ est-elle égale à $P(B)$?

$$
\begin{aligned}
P_B(A) = P(A) \quad &\Longleftrightarrow \quad P(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \boxed{P(A\cap B) = P(A)P(B)} \\
&\Longleftrightarrow \quad P(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \\
&\Longleftrightarrow \quad P_A(B) = P(B)
\end{aligned}
$$

Subjectivement, on pourrait dire que A est indépendant de B si $P_B(A) = \boldsymbol{P(A)}$.

Mais dans ce cas, $P_A(B)$ est-elle égale à $P(B)$?

$$\begin{aligned} P_B(A) = P(A) \quad &\Longleftrightarrow \quad P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)} \\ &\Longleftrightarrow \quad P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &\Longleftrightarrow \quad P_A(B) = P(B) \end{aligned}$$

Définition:

Deux événements A et B sont **indépendants** si $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$.

Exemple n° 1 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1er dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2e dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des ... couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Exemple n° 1 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1er dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2e dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Exemple n° 1 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1^er^ dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2^e^ dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

1. **Etudions l'indépendance de S et Q :**
   - $P(Q) =$

Exemple n° 1 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1^er^ dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2^e^ dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

1. **Etudions l'indépendance de S et Q :**
   - $P(Q) = \frac{1}{6}$
   - $P(S) =$

Exemple n° 1 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1er dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2e dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

1. **Etudions l'indépendance de S et Q :**
   - $P(Q) = \frac{1}{6}$
   - $P(S) = \frac{\# \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}}{36} =$

Exemple n° 1 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1^er dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2^e dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

1. **Etudions l'indépendance de S et Q :**
   - $P(Q) = \frac{1}{6}$
   - $P(S) = \frac{\#\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
   - $P(Q \cap S) =$

Exemple n° 1 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1er dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2e dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

1. **Etudions l'indépendance de S et Q :**
   - $P(Q) = \frac{1}{6}$
   - $P(S) = \frac{\#\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
   - $P(Q \cap S) = \frac{\#\{(4,3)\}}{36} = \frac{1}{36}$

   $P(Q) \times P(S) = P(Q \cap S)$: ....

Exemple n° 1 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1er dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2e dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

1. **Etudions l'indépendance de S et Q :**
   - $P(Q) = \frac{1}{6}$
   - $P(S) = \frac{\#\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
   - $P(Q \cap S) = \frac{\#\{(4,3)\}}{36} = \frac{1}{36}$

   $P(Q) \times P(S) = P(Q \cap S)$: **les événements S et Q sont indépendants.**

Exemple n° 2 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1er dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2e dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

2. **Etudions l'indépendance de S et T :**

   $P(S) =$ ... , $P(T) =$ ... , et $P(S \cap T) =$ ....

   $P(T) \times P(S)$ ...... $P(T \cap S)$: ....

Exemple n° 2 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1^er^ dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2^e^ dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

2. **Etudions l'indépendance de S et T :**

   $P(S) = \mathbf{\frac{1}{6}}$, $P(T) =$ ... , et $P(S \cap T) =$ ....

   $P(T) \times P(S)$ ...... $P(T \cap S)$: ....

Exemple n° 2 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1^er^ dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2^e^ dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

2. **Etudions l'indépendance de S et T :**

$P(S) = \mathbf{\frac{1}{6}}$, $P(T) = \mathbf{\frac{1}{6}}$, et $P(S \cap T) =$ ....

$P(T) \times P(S)$ ...... $P(T \cap S)$: ....

Exemple n° 2 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1er dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2e dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

2. **Etudions l'indépendance de S et T :**

$$P(S) = \frac{1}{6}\ ,\ P(T) = \frac{1}{6}\ ,\ \text{et } P(S \cap T) = \frac{\#\,\{(4,3)\}}{36} = \frac{1}{36}$$

$P(T) \times P(S)$ ...... $P(T \cap S)$: ....

Exemple n° 2 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1er dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2e dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

2. **Etudions l'indépendance de S et T :**

$$P(S) = \frac{1}{6} \text{ , } P(T) = \frac{1}{6} \text{ , et } P(S \cap T) = \frac{\#\{(4,3)\}}{36} = \frac{1}{36}$$

$P(T) \times P(S) = P(T \cap S)$: ....

Exemple n° 2 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1er dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2e dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

2. **Etudions l'indépendance de S et T :**

$$P(S) = \frac{1}{6} \text{ , } P(T) = \frac{1}{6} \text{ , et } P(S \cap T) = \frac{\#\{(4,3)\}}{36} = \frac{1}{36}$$

$P(T) \times P(S) = P(T \cap S)$: **les événements S et T sont indépendants.**

Exemple n° 3 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1er dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2e dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

3. **Etudions l'indépendance de S et $Q \cap T$:**

   - $P(Q \cap T) =$ ....
   - ....

$P(Q \cap T) \times P(S) =$ .... , donc $P(S \cap (Q \cap T))$ ... $P(Q \cap T) \times P(S)$:

les événements $Q \cap T$ et S ....

Exemple n° 3 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1er dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2e dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

3. **Etudions l'indépendance de S et $Q \cap T$:**

   - $P(Q \cap T) = \frac{\# \{(4,3)\}}{36} = \frac{1}{36}$
   - ....

$P(Q \cap T) \times P(S) =$ .... , donc $P(S \cap (Q \cap T))$ ... $P(Q \cap T) \times P(S)$:

les événements $Q \cap T$ et S ....

Exemple n° 3 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1er dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2e dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

3. **Etudions l'indépendance de S et $Q \cap T$:**

   - $P(Q \cap T) = \dfrac{\# \{(4,3)\}}{36} = \dfrac{1}{36}$
   - $P(S \cap (Q \cap T)) = P(Q \cap T) = \dfrac{1}{36}$

$P(Q \cap T) \times P(S) =$ .... , donc $P(S \cap (Q \cap T))$ ... $P(Q \cap T) \times P(S)$:

les événements $Q \cap T$ et S ....

Exemple n° 3 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1^er^ dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2^e^ dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

3. **Etudions l'indépendance de S et $Q \cap T$:**

   - $P(Q \cap T) = \dfrac{\# \{(4,3)\}}{36} = \dfrac{1}{36}$

   - $P(S \cap (Q \cap T)) = P(Q \cap T) = \dfrac{1}{36}$

$$P(Q \cap T) \times P(S) = \frac{1}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$, donc $P(S \cap (Q \cap T))$ ... $P(Q \cap T) \times P(S)$:

les événements $Q \cap T$ et S ....

Exemple n° 3 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1er dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2e dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

3. **Etudions l'indépendance de S et $Q \cap T$:**

   - $P(Q \cap T) = \dfrac{\# \{(4,3)\}}{36} = \dfrac{1}{36}$
   - $P(S \cap (Q \cap T)) = P(Q \cap T) = \dfrac{1}{36}$

$P(Q \cap T) \times P(S) = \dfrac{1}{36} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{216}$, donc $P(S \cap (Q \cap T)) \neq P(Q \cap T) \times P(S)$:

les événements $Q \cap T$ et S ....

Exemple n° 3 : Lançons deux dés équilibrés, de couleurs différentes. Considérons les événements suivants :

- Q : « le 1^er^ dé, le dé vert, donne 4. »
- T : « le 2^e^ dé, le dé rouge, donne 3. »
- S : « la somme des deux dés donne 7. »

L'univers Ω est constitués des **36** couples (a, b) où $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Etudions l'indépendance des événements suivants :

3. **Etudions l'indépendance de S et $Q \cap T$:**

   - $P(Q \cap T) = \dfrac{\# \{(4,3)\}}{36} = \dfrac{1}{36}$
   - $P(S \cap (Q \cap T)) = P(Q \cap T) = \dfrac{1}{36}$

$P(Q \cap T) \times P(S) = \dfrac{1}{36} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{216}$, donc $P(S \cap (Q \cap T)) \neq P(Q \cap T) \times P(S)$:

les événements $Q \cap T$ et S **ne sont pas indépendants.**

Théorème

Soient A et B deux événements. Si A et B sont indépendants, alors il est en de même de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, et $\overline{A}$ et B, et de A et $\overline{B}$.

Théorème

Soient A et B deux événements. Si A et B sont indépendants, alors il est en de même de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, et $\overline{A}$ et B, et de A et $\overline{B}$.

Démonstration

On a $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ et cette réunion est disjointe

Théorème

Soient A et B deux événements. Si A et B sont indépendants, alors il est en de même de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, et $\overline{A}$ et B, et de A et $\overline{B}$.

Démonstration

On a $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ et cette réunion est disjointe, d'où par additivité :

Théorème

Soient A et B deux événements. Si A et B sont indépendants, alors il est en de même de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, et $\overline{A}$ et B, et de A et $\overline{B}$.

Démonstration

On a $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ et cette réunion est disjointe, d'où par additivité :

$$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$$

Théorème

Soient A et B deux événements. Si A et B sont indépendants, alors il est en de même de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, et $\overline{A}$ et B, et de A et $\overline{B}$.

Démonstration

On a $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ et cette réunion est disjointe, d'où par additivité :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) \\ P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Théorème

Soient A et B deux événements. Si A et B sont indépendants, alors il est en de même de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, et $\overline{A}$ et B, et de A et $\overline{B}$.

Démonstration

On a $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ et cette réunion est disjointe, d'où par additivité :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) \\ P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \end{aligned}$$

Théorème

Soient A et B deux événements. Si A et B sont indépendants, alors il est en de même de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, et $\overline{A}$ et B, et de A et $\overline{B}$.

Démonstration

On a $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ et cette réunion est disjointe, d'où par additivité :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) \\ P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \end{aligned}$$

Théorème

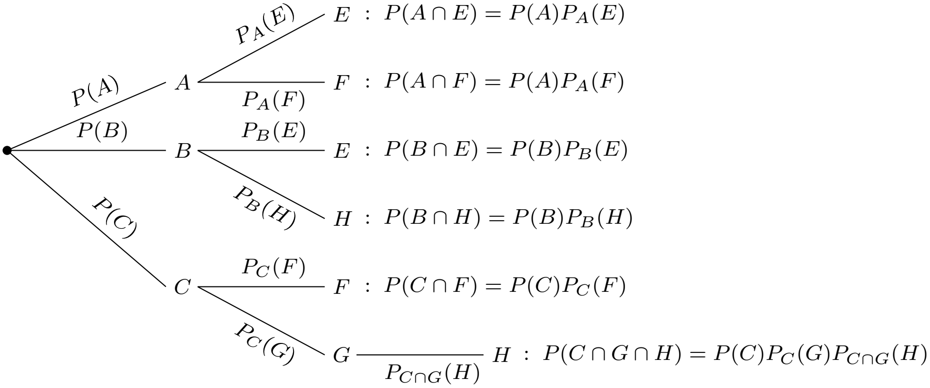
Soient A et B deux événements. Si A et B sont indépendants, alors il est en de même de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, et $\overline{A}$ et B, et de A et $\overline{B}$.

Démonstration

On a $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ et cette réunion est disjointe, d'où par additivité :

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) \\
P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\
&= P(A) - P(A)P(B) \\
&= P(A)(1 - P(B)) \\
&= P(A)P(\overline{B})
\end{aligned}$$

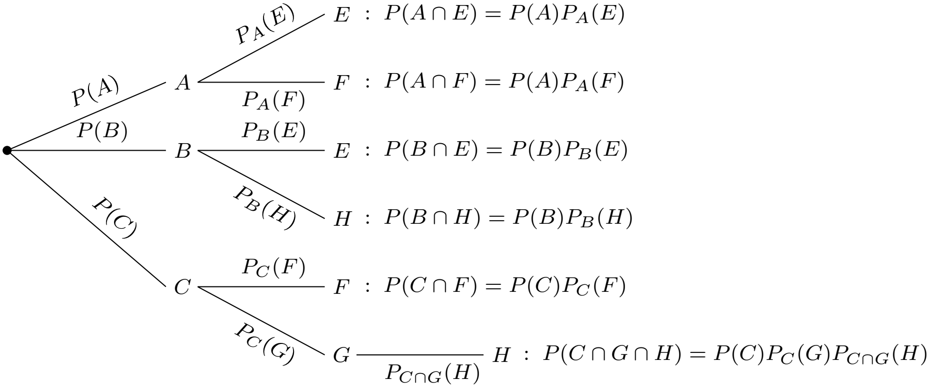
III. Arbres pondérés



Propriété

La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

III. Arbres pondérés

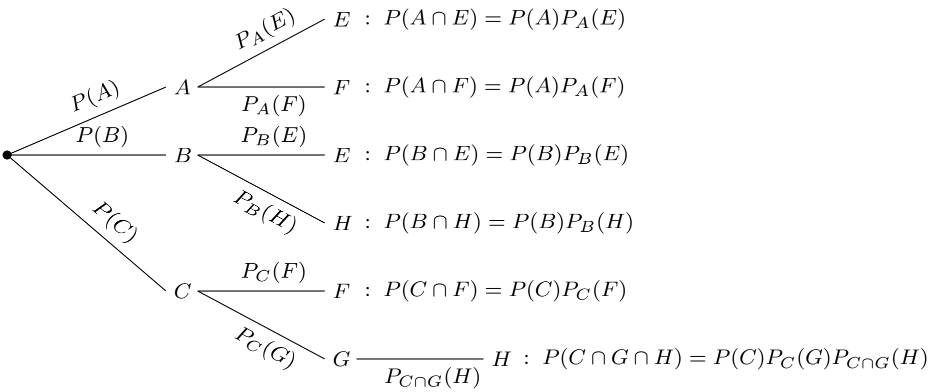


Propriété

La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemple n° 4 :

- Au nœud racine :

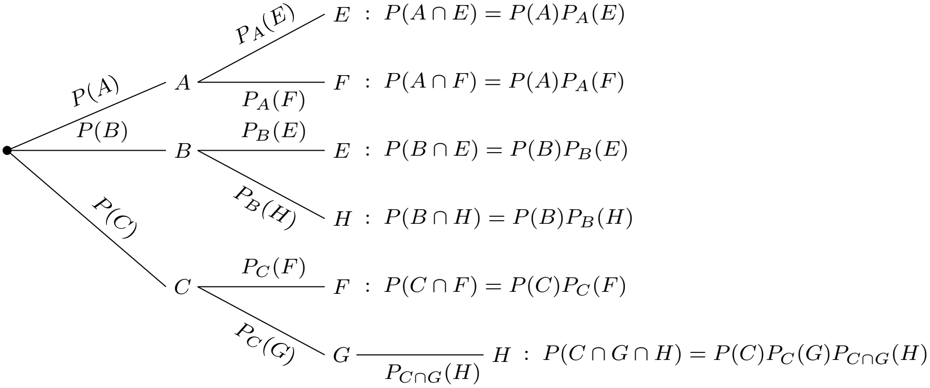


Propriété

La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemple n° 4 :

- Au nœud racine : $P(A) + P(B) + P(C) = 1$



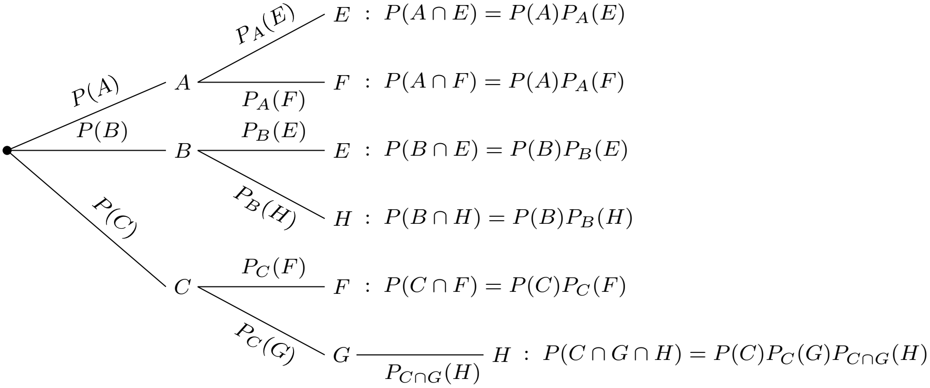
Propriété

La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemple n° 4 :

- Au nœud racine : $P(A) + P(B) + P(C) = 1$
- Au nœud C :

III. Arbres pondérés

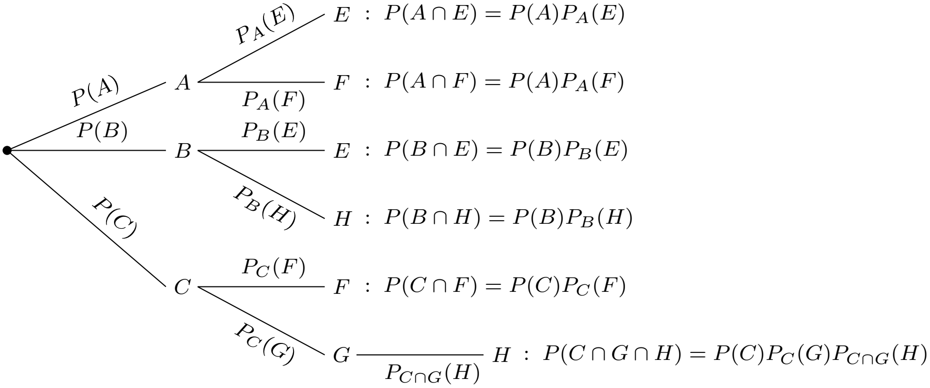


Propriété

La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemple n° 4 :

- Au nœud racine : $P(A) + P(B) + P(C) = 1$
- Au nœud C : $P_C(F) + P_C(G) = 1$.

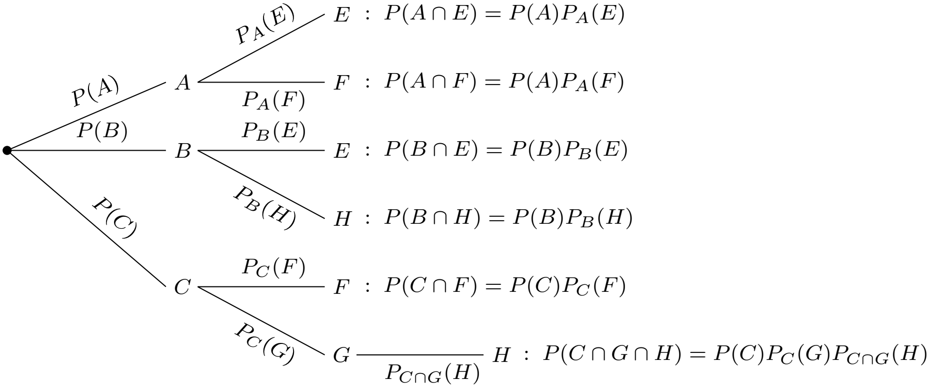


Propriété

La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

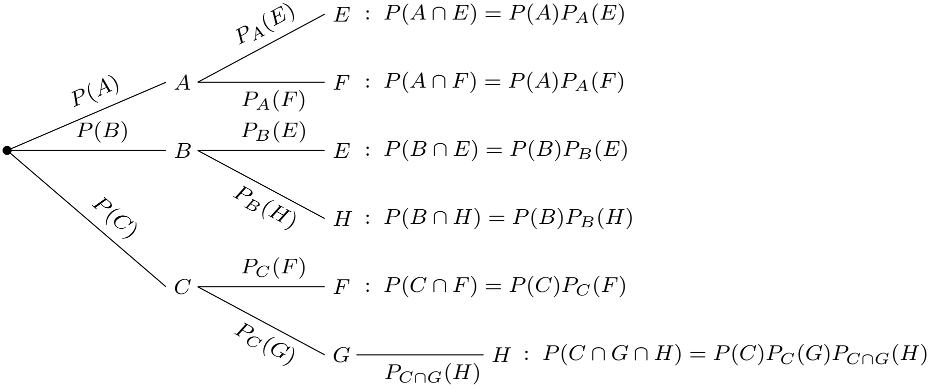
Exemple n° 4 :

- Au nœud racine : $P(A) + P(B) + P(C) = 1$
- Au nœud C : $P_C(F) + P_C(G) = 1$.



Propriété

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.

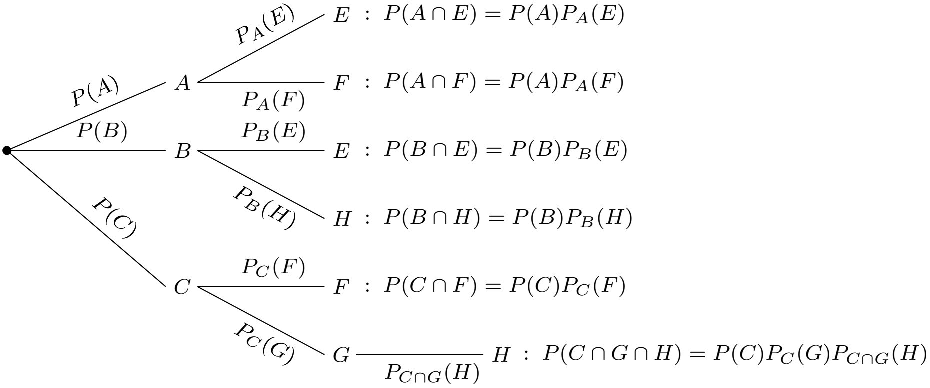


Propriété

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.

Exemple n° 5 :

- Au chemin $A \cap F$:



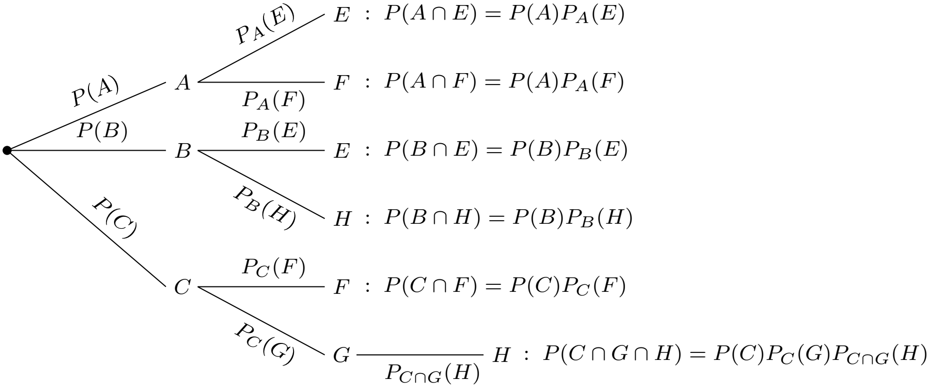
Propriété

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.

Exemple n° 5 :

- Au chemin $A\cap F$: $P(A\cap F) = P(A)P_A(F)$

III. Arbres pondérés

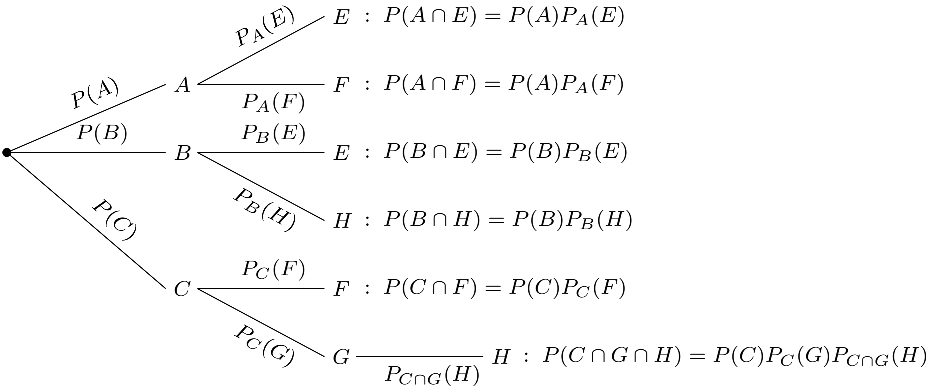


Propriété

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.

Exemple n° 5 :

- Au chemin $A\cap F$: $P(A\cap F) = P(A)P_A(F)$
- Au chemin $C\cap G\cap H$:



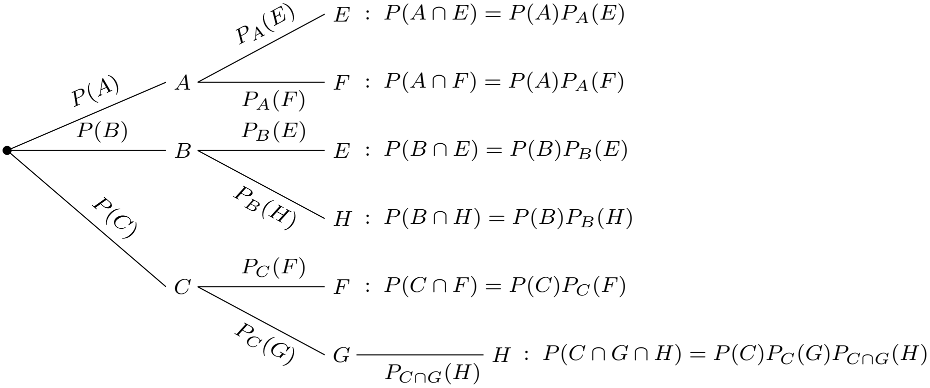
Propriété

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.

Exemple n° 5 :

- Au chemin $A\cap F$: $P(A\cap F) = P(A)P_A(F)$
- Au chemin $C\cap G\cap H$: $P(C\cap G\cap H) = P(C)P_C(G)P_{C\cap G}(H)$

III. Arbres pondérés

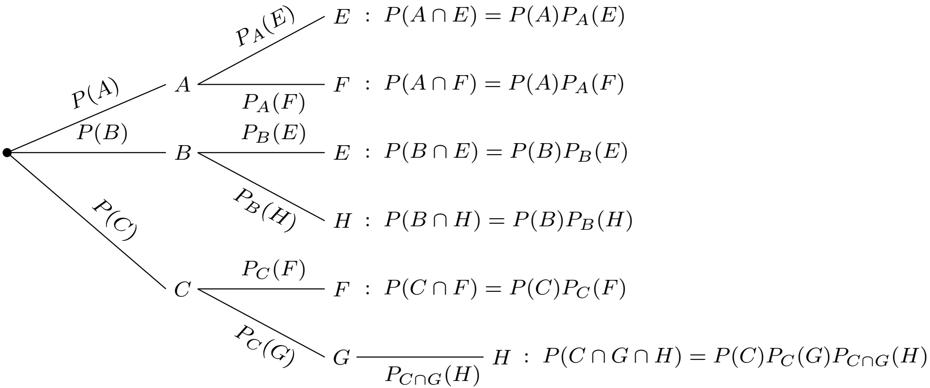


Propriété

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.

Exemple n° 5 :

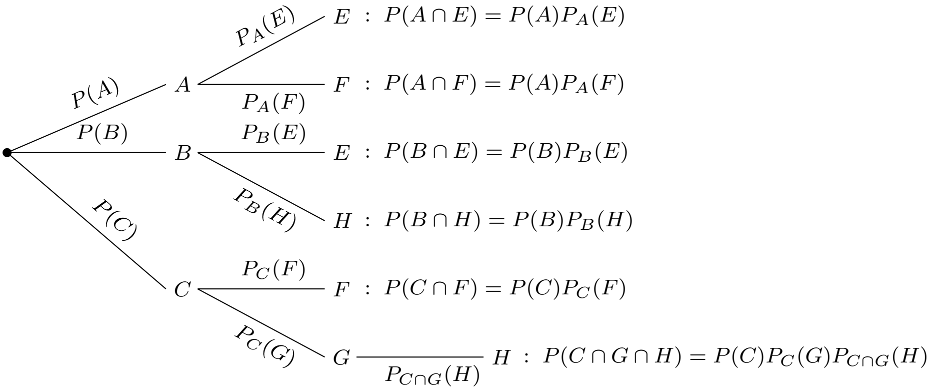
- Au chemin $A \cap F$: $P(A \cap F) = P(A)P_A(F)$
- Au chemin $C \cap G \cap H$: $P(C \cap G \cap H) = P(C)P_C(G)P_{C\cap G}(H)$



Formule des probabilités totales :

la probabilité d'une feuille est la somme des probabilités des chemins menant à cette feuille.

III. Arbres pondérés

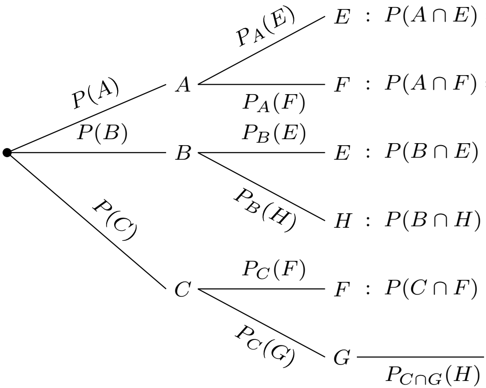


Formule des probabilités totales :

la probabilité d'une feuille est la somme des probabilités des chemins menant à cette feuille.

Exemple n° 6 : Il y a deux chemins menant à la feuille F :

III. Arbres pondérés



E : $P(A \cap E) = P(A)P_A(E)$

F : $P(A \cap F) = P(A)P_A(F)$

E : $P(B \cap E) = P(B)P_B(E)$

H : $P(B \cap H) = P(B)P_B(H)$

F : $P(C \cap F) = P(C)P_C(F)$

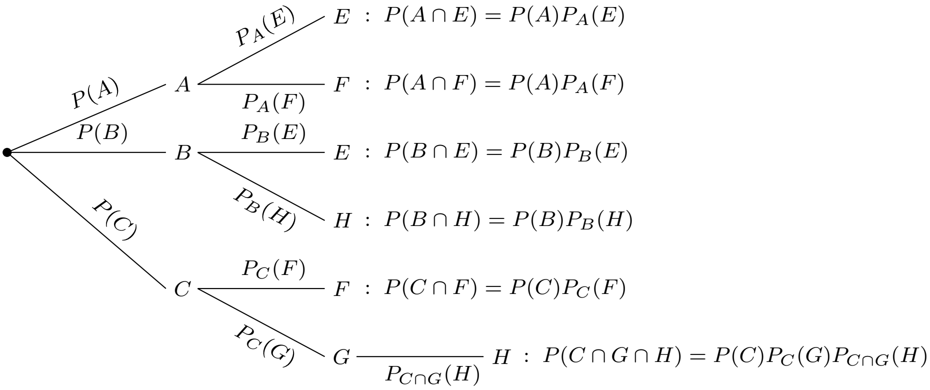
H : $P(C \cap G \cap H) = P(C)P_C(G)P_{C\cap G}(H)$

Formule des probabilités totales :

la probabilité d'une feuille est la somme des probabilités des chemins menant à cette feuille.

Exemple n° 6 : Il y a deux chemins menant à la feuille F : $A \cap F$ et $C \cap F$

III. Arbres pondérés



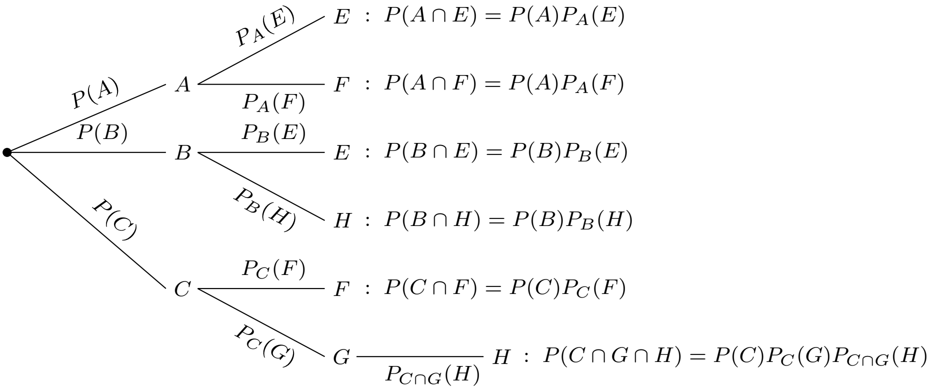
Formule des probabilités totales :

la probabilité d'une feuille est la somme des probabilités des chemins menant à cette feuille.

Exemple n° 6 : Il y a deux chemins menant à la feuille F : $A\cap F$ et $C\cap F$

$$P(F)=P(A\cap F)+P(C\cap F)=$$

III. Arbres pondérés



Formule des probabilités totales :

la probabilité d'une feuille est la somme des probabilités des chemins menant à cette feuille.

Exemple n° 6 : Il y a deux chemins menant à la feuille F : $A\cap F$ et $C\cap F$

$$P(F) = P(A\cap F) + P(C\cap F) = P(A)P_A(F) + P(C)P_C(F)$$

Exercice n° 1: Aline adore la confiture aux prunes de sa grand-mère. Quand elle tartine sa tranche de brioche, au petit déjeuner, la cuillerée de confiture va directement dans sa bouche une fois sur trois. Pour obtenir une tranche de brioche correctement recouverte de confiture, il faut y étaler le contenu de trois cuillers.

Exercice n° 2: Aline adore la confiture aux prunes de sa grand-mère. Quand elle tartine sa tranche de brioche, au petit déjeuner, la cuillerée de confiture va directement dans sa bouche une fois sur trois. Pour obtenir une tranche de brioche correctement recouverte de confiture, il faut y étaler le contenu de trois cuillers.

On note les événements :

- B_i : « la i$^{\text{ème}}$ cuillerée de confiture va directement dans sa bouche » ;
- A : « Aline a avalé directement au moins deux cuillerées de confiture lorsque la tranche de brioche sera prête à être consommée. »

Exercice n° 3: Aline adore la confiture aux prunes de sa grand-mère. Quand elle tartine sa tranche de brioche, au petit déjeuner, la cuillerée de confiture va directement dans sa bouche une fois sur trois. Pour obtenir une tranche de brioche correctement recouverte de confiture, il faut y étaler le contenu de trois cuillers.

On note les événements :

- B_i : « la i$^{\text{ème}}$ cuillerée de confiture va directement dans sa bouche » ;
- A : « Aline a avalé directement au moins deux cuillerées de confiture lorsque la tranche de brioche sera prête à être consommée. »

Calcule la probabilité de l'événement A.

<u>**Considérons l'expérience aléatoire suivante**</u> **:** On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V, et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V, et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

1er tirage \ 2nd tirage	R	V	B
R	(R, R)	(R, V)	(R, B)
V	(V, R)	(V, V)	(V, B)
B	(B, R)	(B, V)	(B, B)

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V, et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

2nd tirage / 1er tirage	R	V	B
R	(R, R)	(R, V)	(R, B)
V	(V, R)	(V, V)	(V, B)
B	(B, R)	(B, V)	(B, B)

On est en situation d'équiprobabilité donc la probabilité d'avoir au moins une boule bleue est :

. . . .

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V, et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

2nd tirage / 1er tirage	R	V	B
R	(R, R)	(R, V)	(R, B)
V	(V, R)	(V, V)	(V, B)
B	(B, R)	(B, V)	(B, B)

On est en situation d'équiprobabilité donc la probabilité d'avoir au moins une boule bleue est :

$$P\left(\{(R, B), (V, B), (B, R), (B, V), (B, B)\}\right) = \frac{5}{9}$$

Complétons l'énoncé :

- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

Complétons l'énoncé :

- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

Notons G la variable aléatoire qui à un tirage de deux boules associe le gain du joueur :

$$\begin{array}{rccc} G : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (R, B) & \longmapsto & \dots \end{array}$$

Complétons l'énoncé :

- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

Notons G la variable aléatoire qui à un tirage de deux boules associe le gain du joueur :

$$\begin{array}{rccc} G: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (R,B) & \longmapsto & \mathbf{-2} \end{array}$$

Complétons l'énoncé :

- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

Notons G la variable aléatoire qui à un tirage de deux boules associe le gain du joueur :

$$\begin{array}{cccc} G: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (R,B) & \longmapsto & \mathbf{-2} \end{array}$$

Les valeurs prises par G sont $G(\Omega) = \{$ ....

Complétons l'énoncé :

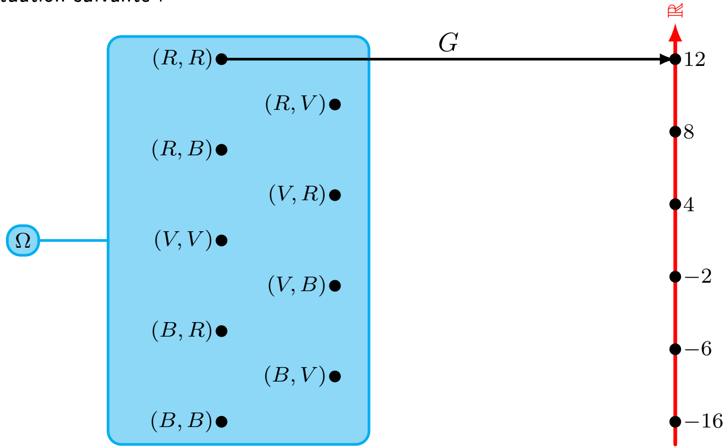
- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

Notons G la variable aléatoire qui à un tirage de deux boules associe le gain du joueur :

$$\begin{array}{rccc} G: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (R,B) & \longmapsto & \mathbf{-2} \end{array}$$

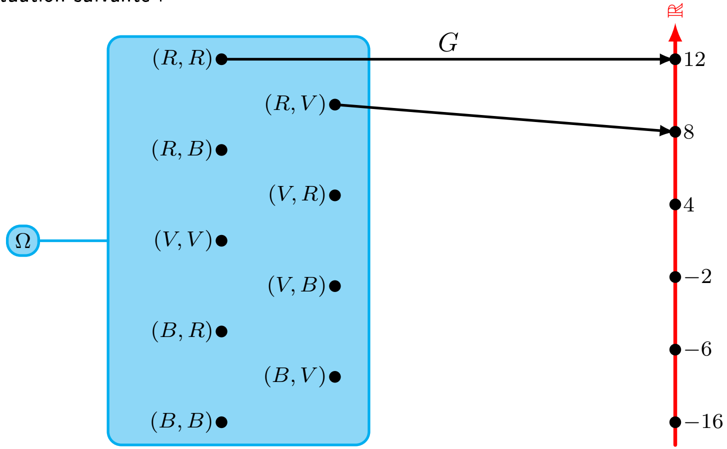
Les valeurs prises par G sont $G(\Omega) = \{ -16, -6, -2, 4, 8, 12\}$

On a la situation suivante :



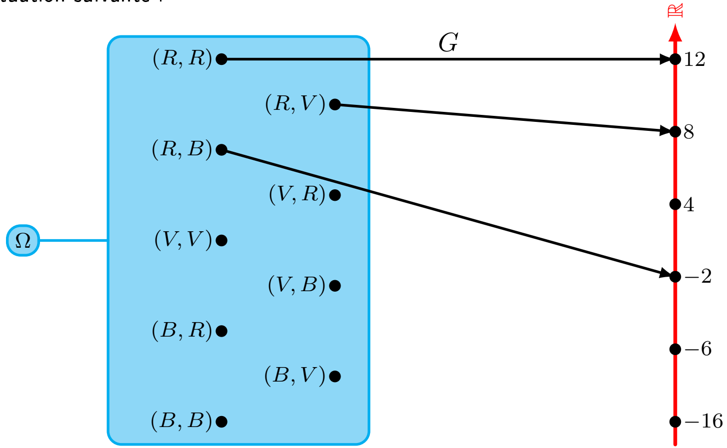
$$P(G=8) = P\Big(\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}\Big) =$$

On a la situation suivante :



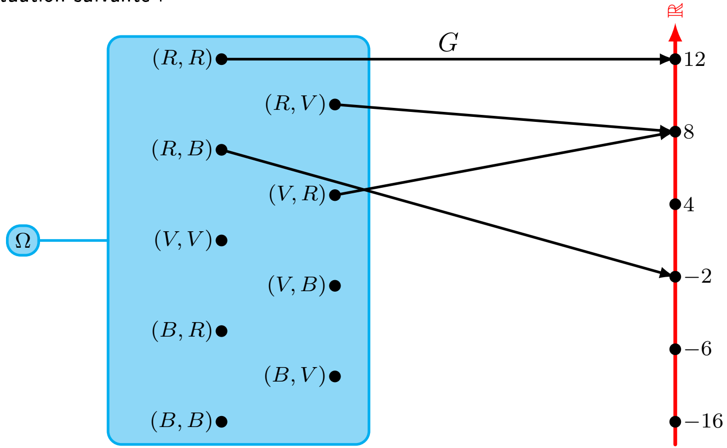
$$P(G=8) = P\Big(\{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}\Big) =$$

On a la situation suivante :



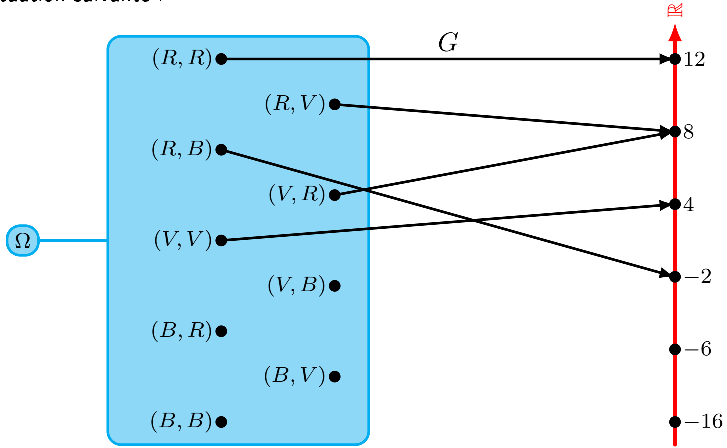
$$P(G=8) = P\Big(\{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}\Big) =$$

On a la situation suivante :



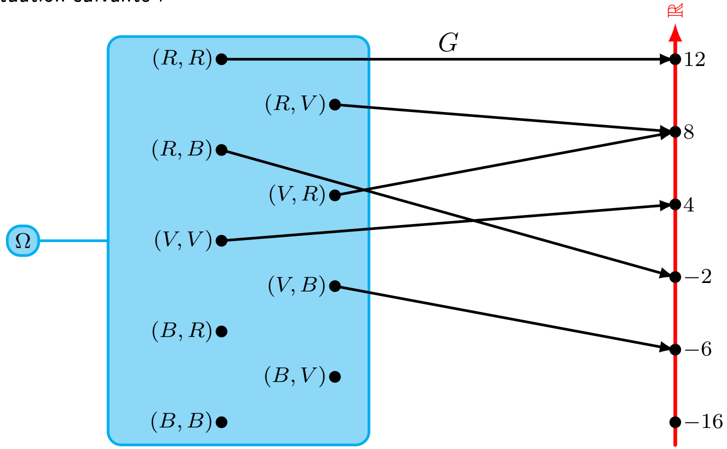
$$P(G=8) = P\Big(\{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}\Big) =$$

On a la situation suivante :



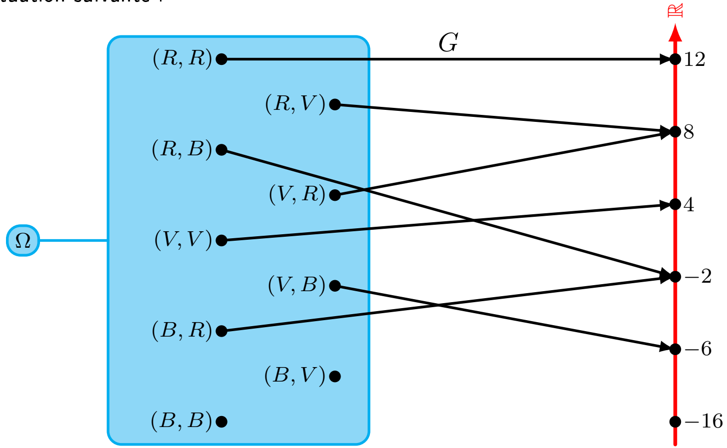
$$P(G=8) = P\Big(\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}\Big) =$$

On a la situation suivante :



$$P(G=8) = P\Big(\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}\Big) =$$

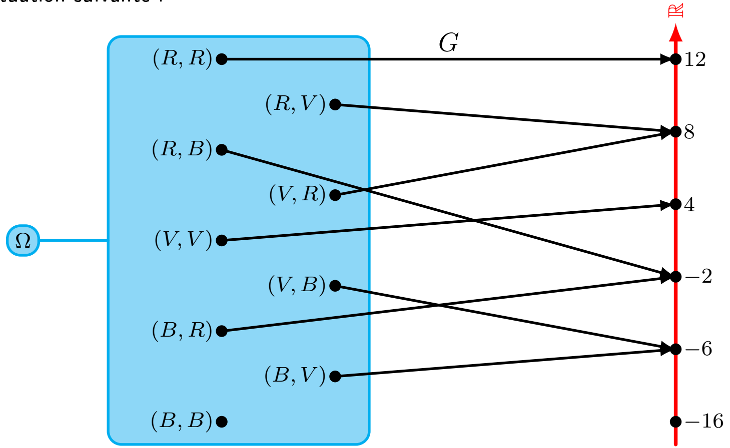
On a la situation suivante :



$$P(G=8) = P\Big(\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}\Big) =$$

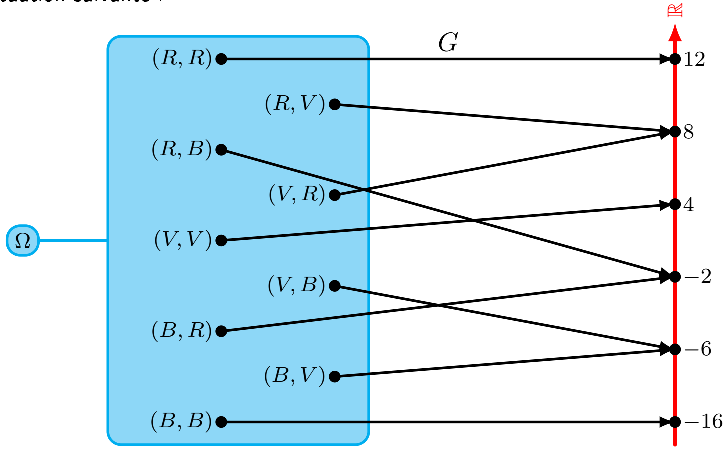
IV. Variables aléatoires discrètes

On a la situation suivante :



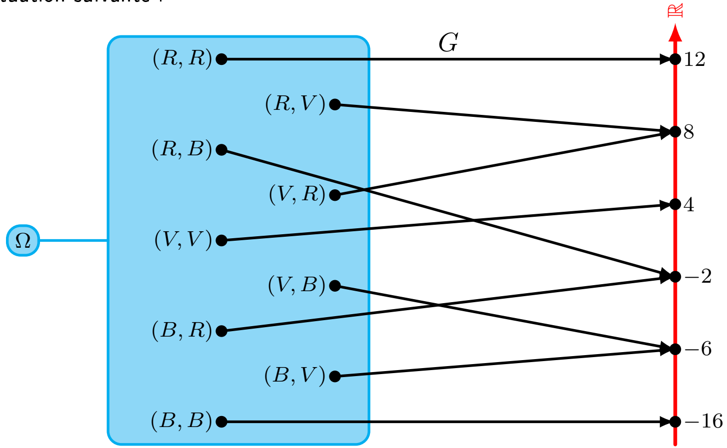
$$P(G=8) = P\Big(\{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}\Big) =$$

On a la situation suivante :



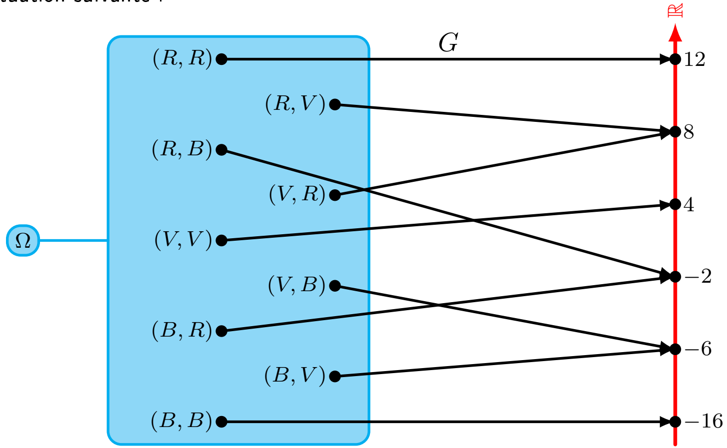
$$P(G=8)=P\Big(\{\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,\}\Big)=$$

On a la situation suivante :



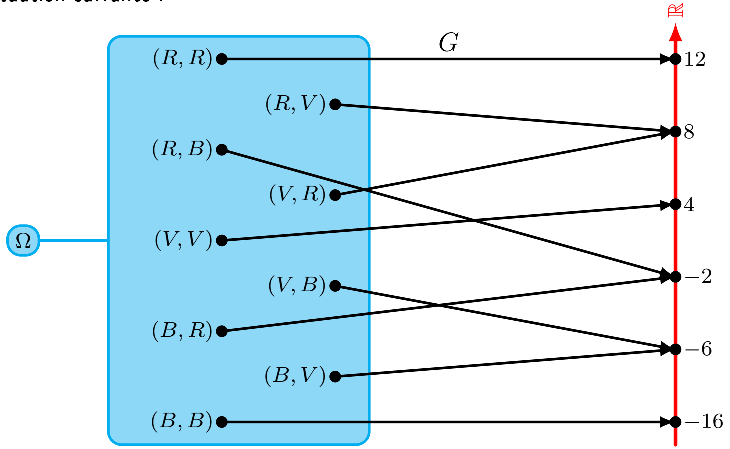
$$P(G=8) = \boldsymbol{P\Big(\{(R,V),(V,R)\}\Big) = \frac{2}{9}}$$

On a la situation suivante :



L'espérance de la variable aléatoire G est :

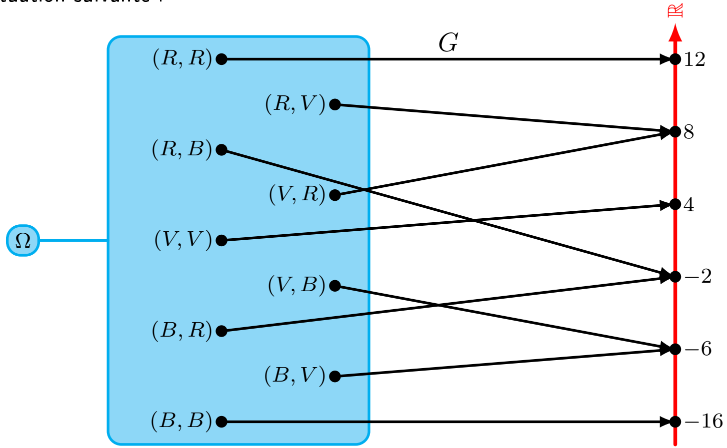
On a la situation suivante :



L'espérance de la variable aléatoire G est :

☞ $E(G) =$ ....

On a la situation suivante :



L'espérance de la variable aléatoire G est :

☞ $E(G) = 12 \times \dfrac{1}{9} + 8 \times \dfrac{2}{9} + 4 \times \dfrac{1}{9} + (-2) \times \dfrac{2}{9} + (-6) \times \dfrac{2}{9} + (-16) \times \dfrac{1}{9} = 0$

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$E(G^2) =$

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

☞ $V(G) =$

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

☞ $V(G) = E(G^2) - E(G)^2 =$

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

☞ $V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3$

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

☞ $V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3$ et $\sigma_G =$

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

☞ $V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3$ et $\sigma_G = \sqrt{69,3} \simeq 8,3$

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

☞ $V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3$ et $\sigma_G = \sqrt{69,3} \simeq 8,3$

Finalement, grande différence entre les statistiques descriptives et les probabilités, c'est que dans le premier cas, l'expérience aléatoire à déjà eu lieu.

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

☞ $V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3$ et $\sigma_G = \sqrt{69,3} \simeq 8,3$

Finalement, grande différence entre les statistiques descriptives et les probabilités, c'est que dans le premier cas, l'expérience aléatoire à déjà eu lieu.

- En statistique descriptive, on prélève un échantillon de 100 parties, on mesure la moyenne des gains.

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

☞ $V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3$ et $\sigma_G = \sqrt{69,3} \simeq 8,3$

Finalement, grande différence entre les statistiques descriptives et les probabilités, c'est que dans le premier cas, l'expérience aléatoire à déjà eu lieu.

- En statistique descriptive, on prélève un échantillon de 100 parties, on mesure la moyenne des gains.
- En probabilités, on « espère » une moyenne nulle.

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

☞ $V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3$ et $\sigma_G = \sqrt{69,3} \simeq 8,3$

Finalement, grande différence entre les statistiques descriptives et les probabilités, c'est que dans le premier cas, l'expérience aléatoire à déjà eu lieu.

- En statistique descriptive, on prélève un échantillon de 100 parties, on mesure la moyenne des gains.
- En probabilités, on « espère » une moyenne nulle.

En mélangeant, ces deux branches des mathématiques, on va estimer la moyenne des gains sur 100 parties, on fera alors des statistiques **inférentielles**.

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$$

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$$

Probabilités	Statistiques
$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i)$	$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$$

Probabilités	**Statistiques**
$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i)$	$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$
E est linéaire	La moyenne est linéaire

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$$

Probabilités	**Statistiques**
$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i)$	$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$
E est linéaire	La moyenne est linéaire
$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{N} (E(X) - x_i)^2 P(X = x_i) \\ &= E\left[E(X) - X\right] \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\overline{x} - x_i)^2 \\ &= \overline{(\overline{x} - x)^2} \\ &= \overline{x^2} - \overline{x}^2 \end{aligned}$

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$$

Probabilités	Statistiques
$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i)$	$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$
E est linéaire	La moyenne est linéaire
$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{N} \left(E(X) - x_i\right)^2 P(X = x_i) \\ &= E\left[E(X) - X\right] \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\overline{x} - x_i)^2 \\ &= \overline{(\overline{x} - x)^2} \\ &= \overline{x^2} - \overline{x}^2 \end{aligned}$
$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E\left[\left(E(X) - X\right)\left(E(Y) - Y\right)\right] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$	$\begin{aligned} Cov(x,y) &= \overline{\left(\overline{x} - x_i\right)\left(\overline{y} - y_i\right)} \\ &= \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y} \end{aligned}$

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$$

Probabilités	**Statistiques**
$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i)$	$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$
E est linéaire	La moyenne est linéaire
$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{N} (E(X) - x_i)^2 P(X = x_i) \\ &= E\left[E(X) - X\right] \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\overline{x} - x_i)^2 \\ &= \overline{(\overline{x} - x)^2} \\ &= \overline{x^2} - \overline{x}^2 \end{aligned}$
$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E\left[(E(X) - X)(E(Y) - Y)\right] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$	$\begin{aligned} Cov(x,y) &= \overline{(\overline{x} - x_i)(\overline{y} - y_i)} \\ &= \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y} \end{aligned}$
$V(aX + bY) =$ $a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab\, Cov(X,Y)$	$V(ay + by) =$ $a^2 V(x) + b^2 V(y) + 2ab\, Cov(x,y)$

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$$

Probabilités	**Statistiques**
$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i)$	$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$
E est linéaire	La moyenne est linéaire
$V(X) = \sum_{i=1}^{N} (E(X) - x_i)^2 P(X = x_i)$ $= E\left[E(X) - X\right]$ $= E(X^2) - E(X)^2$	$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\overline{x} - x_i)^2$ $= \overline{(\overline{x} - x)^2}$ $= \overline{x^2} - \overline{x}^2$
$Cov(X, Y) = E\left[(E(X) - X)(E(Y) - Y)\right]$ $= E(XY) - E(X)E(Y)$	$Cov(x, y) = \overline{(\overline{x} - x_i)(\overline{y} - y_i)}$ $= \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}$
$V(aX + bY) =$ $a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab\, Cov(X, Y)$	$V(ay + by) =$ $a^2 V(x) + b^2 V(y) + 2ab\, Cov(x, y)$

Où $E(XY) =$

V. Probabilités et statistiques.

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$$

Probabilités	Statistiques
$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i)$	$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
E est linéaire	La moyenne est linéaire
$V(X) = \sum_{i=1}^{N} (E(X) - x_i)^2 P(X = x_i)$ $= E\left[E(X) - X\right]$ $= E(X^2) - E(X)^2$	$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (\overline{x} - x_i)^2$ $= \overline{(\overline{x} - x)^2}$ $= \overline{x^2} - \overline{x}^2$
$Cov(X, Y) = E\left[(E(X) - X)(E(Y) - Y)\right]$ $= E(XY) - E(X)E(Y)$	$Cov(x, y) = \overline{(\overline{x} - x_i)(\overline{y} - y_i)}$ $= \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}$
$V(aX + bY) =$ $a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,Cov(X, Y)$	$V(ay + by) =$ $a^2V(x) + b^2V(y) + 2ab\,Cov(x, y)$

Où $E(XY) = \sum_{i,j=1}^{N} x_i y_j P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$

Théorème

Si X et Y sont deux variables indépendantes alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y) \; ; \; Cov(X,Y) = 0 \;\; ; V(X+Y) = V(X) + (Y)$$

Exemple n° 7 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

$Y \backslash X$	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
Total	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	1

$$P\big((X = -1) \cap (Y = 0)\big) =$$

Exemple n° 7 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

$Y \backslash X$	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
Total	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	1

$$P\big((X=-1)\cap(Y=0)\big) = \frac{1}{16}$$

$$P\big((X=1)\cap(Y=1)\big) =$$

Exemple n° 7 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

$Y \backslash X$	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
Total	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	1

$$P\big((X=-1)\cap(Y=0)\big) = \frac{1}{16}$$

$$P\big((X=1)\cap(Y=1)\big) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) =$$

Exemple n° 7 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

$Y \backslash X$	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
Total	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	1

$$P\big((X=-1)\cap(Y=0)\big) = \frac{1}{16}$$

$$P\big((X=1)\cap(Y=1)\big) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = \frac{5}{16}$$

$$P(Y=1) =$$

Exemple n° 7 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

Y \ X	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
Total	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	1

$$P\big((X=-1)\cap(Y=0)\big) = \frac{1}{16}$$

$$P\big((X=1)\cap(Y=1)\big) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = \frac{5}{16}$$

$$P(Y=1) = \frac{3}{8}$$

Donc :

Exemple n° 7 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

$Y \backslash X$	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
Total	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	1

$$P\big((X=-1)\cap(Y=0)\big) = \frac{1}{16}$$

$$P\big((X=1)\cap(Y=1)\big) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = \frac{5}{16}$$

$$P(Y=1) = \frac{3}{8}$$

Donc :

$$P\big((X=1)\cap(Y=1)\big) \neq P(X=1)P(Y=1)$$

X et Y

Exemple n° 7 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

$Y \backslash X$	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
Total	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	1

$$P\big((X=-1)\cap(Y=0)\big)=\frac{1}{16}$$

$$P\big((X=1)\cap(Y=1)\big)=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1)=\frac{5}{16}$$

$$P(Y=1)=\frac{3}{8}$$

Donc :

$$P\big((X=1)\cap(Y=1)\big)\neq P(X=1)P(Y=1)$$

X et Y **ne sont pas indépendantes.**

Exemple n° 8 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

$Y \backslash X$	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
Total	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	1

☞ $E(X) =$

Exemple n° 8 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

$Y \backslash X$	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
Total	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	1

☞ $E(X) = -1 \times \frac{5}{16} + 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{5}{16} = 0$

☞ $E(Y) =$

Exemple n° 8 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

$Y \backslash X$	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
Total	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	1

☞ $E(X) = -1 \times \frac{5}{16} + 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{5}{16} = 0$

☞ $E(Y) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$

Ces deux espérances sont

Exemple n° 8 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

$Y \backslash X$	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
Total	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	1

☞ $E(X) = -1 \times \frac{5}{16} + 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{5}{16} = 0$

☞ $E(Y) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$

Ces deux espérances sont **nulles car les lois de X et de Y sont symétriques par rapport à 0.**

Exemple n° 8 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

$Y \backslash X$	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
Total	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	1

☞ $E(X) = -1 \times \frac{5}{16} + 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{5}{16} = 0$

☞ $E(Y) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$

Ces deux espérances sont **nulles car les lois de X et de Y sont symétriques par rapport à 0.**

☞ $E(XY) =$

Exemple n° 8 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

$Y \backslash X$	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
Total	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	1

☞ $E(X) = -1 \times \frac{5}{16} + 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{5}{16} = 0$

☞ $E(Y) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$

Ces deux espérances sont **nulles car les lois de X et de Y sont symétriques par rapport à 0.**

☞ $E(XY) = (-1)(-1) \times \frac{1}{8} + (1)(-1) \times \frac{1}{8} + (-1)(1) \times \frac{1}{8} + (1)(1) \times \frac{1}{8} = 0$

Exemple n° 8 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

$Y \backslash X$	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
Total	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	1

☞ $E(X) = -1 \times \frac{5}{16} + 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{5}{16} = 0$

☞ $E(Y) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$

Ces deux espérances sont **nulles car les lois de X et de Y sont symétriques par rapport à 0.**

☞ $E(XY) = (-1)(-1) \times \frac{1}{8} + (1)(-1) \times \frac{1}{8} + (-1)(1) \times \frac{1}{8} + (1)(1) \times \frac{1}{8} = 0$

☞ $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

Exemple n° 8 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

$Y \backslash X$	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
Total	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	1

☞ $E(X) = -1 \times \frac{5}{16} + 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{5}{16} = 0$

☞ $E(Y) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$

Ces deux espérances sont **nulles car les lois de X et de Y sont symétriques par rapport à 0.**

☞ $E(XY) = (-1)(-1) \times \frac{1}{8} + (1)(-1) \times \frac{1}{8} + (-1)(1) \times \frac{1}{8} + (1)(1) \times \frac{1}{8} = 0$

☞ $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

Une covariance nulle n'entraîne pas l'indépendance.