Chapitre A

Probabilités conditionnelles - Indépendance

Sommaire

I) Vocabulaire des événements 2
1) Vocabulaire 2
2) Intersection et réunion d'événements 2
3) Représentation des événements 3
II) Calcul de probabilités 4
III) Probabilités conditionnelles 5
1) Définition 5
2) Propriétés 6
3) Exemple de calcul de probabilités conditionnelles par différentes méthodes 7
4) Evénements indépendants 9
IV) Exercices divers 11
1) Calcul des probabilités 11
2) Probabilités conditionnelles 11
3) Événements indépendants 12

On fait remonter à la correspondance de 1664 entre Pascal et Fermat, sur un problème de jeu de hasard, l'acte de naissance du calcul des probabilités.

Après trois siècles de recherche, le calcul des probabilités a pu fournir, au début du XX^e siècle, les bases théoriques nécessaires au développement de la statistique et a investi de très nombreux domaines de la vie scientifique, économique et sociale.

Le but des probabilités est d'essayer de rationaliser le hasard : quelles sont les chances d'obtenir un résultat suite à une expérience aléatoire ?
Quelles chances ai-je d'obtenir "pile" en lançant une pièce de monnaie ? Quelles chances ai-je d'obtenir "6" en lançant un dé ? Quelles chances ai-je de valider la grille gagnante du loto ?

I) Vocabulaire des événements

1) Vocabulaire

Éventualité, univers, événement ...:

- Chaque résultat possible et prévisible d'une expérience aléatoire est appelé éventualité liée à l'expérience aléatoire.
- L'ensemble formé par les éventualités est appelé univers, il est très souvent noté Ω.
- Un événement d'une expérience aléatoire est une partie quelconque de l'univers,
- Un événement ne comprenant qu'une seule éventualité est un événement élémentaire.
- L'événement qui ne contient aucune éventualité est l'événement impossible, noté $\varnothing$,
- L'événement composé de toutes les éventualités est appelé événement certain.
- Pour tout événement A il existe un événement noté $\overline{A}$ et appelé événement contraire de A qui est composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.
  On a en particulier $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Exemple:

Lancé d'un dé à 6 faces :

- *"obtenir 2" est une éventualité de cette expérience aléatoire.*
- *Univers :* $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- $A =$ *"obtenir un 5" est un événement élémentaire que l'on peut noter* $A = \{5\}$,
- $B =$ *"obtenir un numéro pair" est un événement que l'on peut noter* $B = \{2; 4; 6\}$.
- *"obtenir 7" est un événement impossible,*
- *"obtenir un nombre positif" est un événement certain.*
- $\overline{B} =$ *"obtenir un nombre impair" est l'événement contraire de* B.

Dans toute la suite du cours, on suppose que Ω est l'univers associé à une expérience aléatoire, et A et B deux événements associés à cet univers.

2) Intersection et réunion d'événements

Intersection et réunion d'évènements:

- Intersection d'événements : événement constitué des éventualités appartenant à A et à B noté $A \cap B$ (se lit "A inter B" ou "A et B"),
- Réunion d'événements : événement constitué des éventualités appartenant à A ou à B noté $A \cup B$ (se lit "A union B" ou "A ou B").

Remarque:

Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que les événements sont disjoints ou incompatibles.

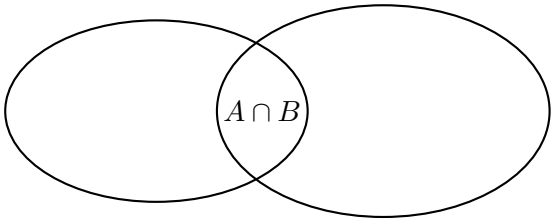
Exemple:

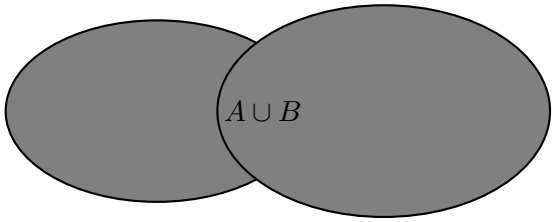
On considère l'ensemble des chiffres.
On note A l'événement "obtenir un chiffre pair" et B l'événement "obtenir un chiffre strictement inférieur à six"

- *$A \cap B$ = "obtenir un chiffre pair et inférieure strictement à six" : $A \cap B = \{0; 2; 4\}$,*
- *$A \cup B$ = "obtenir un chiffre pair ou inférieur strictement à six" : $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8\}$.*

3) Représentation des événements

Diagrammes de Venn ou Patates





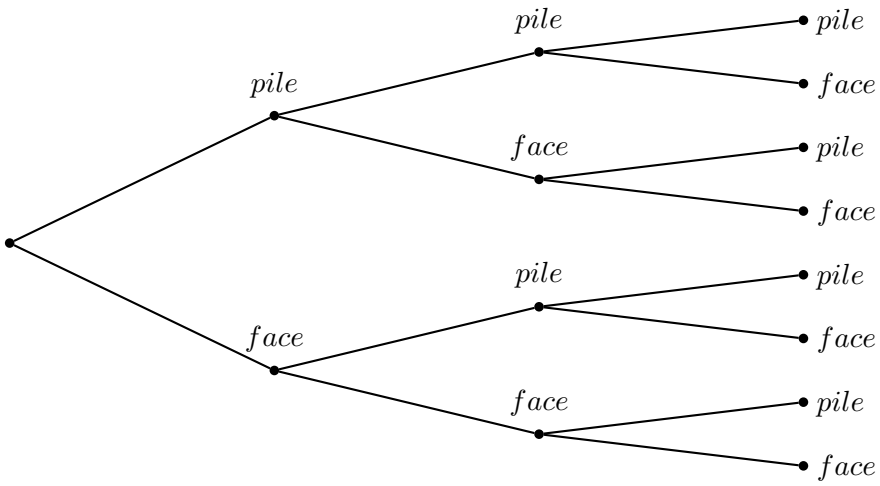
Tableaux

On jette deux dés à quatre faces (tétraèdre régulier) et on calcule le produit obtenu :

	1	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Arbres

On lance une pièce de monnaie trois fois se suite, on peut schématiser cette expérience par un arbre :



II) Calcul de probabilités

probabilité d'un événement:

- La probabilité d'un événement d'univers Ω est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constitue.
- On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.
  Dans ce cas, on a : $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$.

Remarque:

Dans un exercice, pour signifier qu'on est dans une situation d'équiprobabilité on a généralement dans l'énoncé un expression du type :

- *on lance un dé non pipé,*
- *dans une urne, il y a des boules indiscernables au toucher,*
- *on rencontre au hasard une personne parmi . . .*

Propriété A1:

Soit A et B deux événements, on a :

- $P(\varnothing) = 0$.
- $P(\Omega) = 1$.
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple:

On considère l'ensemble E des entiers de 1 à 20. On choisit l'un de ces nombres au hasard.
A est l'événement : « le nombre est multiple de 3 » : $A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$,
B est l'événement : « le nombre est multiple de 2 » : $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$,

Calcul des probabilités :

- $P(A) = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3.$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10} = 0{,}7.$
- $P(B) = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5.$
- $P(A \cap B) = \dfrac{3}{20} = 0{,}15.$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{6}{20} + \dfrac{10}{20} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{13}{20} = 0{,}65.$

III) Probabilités conditionnelles

1) Définition

Probabilité conditionnelle:

On suppose que $P(B) \neq 0$.

- On appelle probabilité conditionnelle de A relativement à B ou de A sachant B la probabilité que l'événement A se réalise sachant que B est réalisé.
- Cette probabilité vaut $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Remarque:

On trouve aussi la notation $P(A/B)$ pour $P_B(A)$.

Exemple:

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à 6 faces, équilibré. On suppose que toutes les faces sont équiprobables, et on définit les événements :

- *B : "la face obtenue porte un numéro pair" ;*
- *A : "la face obtenue porte un numéro multiple de 3".*

Déterminons la probabilité d'obtenir un numéro multiple de 3, sachant qu'on a un numéro pair de deux manières différentes.

- *L'événement (A/B) correspond à l'événement "obtenir un numéro multiple de 3" parmi les éventualités de B, autrement dit parmi $\{2; 4; 6\}$. Il n'y a donc que l'issue "obtenir 6" qui correspond.*
  Et comme on est en situation d'équiprobabilité, on obtient $P_B(A) = \dfrac{1}{3}$.

- *Par le calcul, on a* $P(B) = \dfrac{3}{6}$ *et* $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$ *donc, d'après la formule :* $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

2) Propriétés

Propriété A2:

Pour tous événements A *et* B *de probabilité non nulle, on a :*

$$P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B).$$

Démonstration :

Pour $P(B) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$, on peut écrire :

— $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ d'où $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$.

— $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ d'où $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.

Propriété A3:

Soit S *un événement de probabilité non nulle, on a :*

- $0 \leq P_S(A) \leq 1$;
- $P_S(\Omega) = 1$;
- $P_S(\varnothing) = 0$;
- $P_S(\bar{A}) = 1 - P_S(A)$;
- $P_S(A \cup B) = P_S(A) + P_S(B) - P_S(A \cap B)$;
- *Si* A *et* B *sont des événements incompatibles, alors* $P_S(A \cup B) = P_S(A) + P_S(B)$;
- $P_S(\overline{A} \cap \overline{B}) = P_S(\overline{A \cup B}) = 1 - P_S(A \cup B)$.

Remarque:

Ce théorème revient à dire qu'une probabilité conditionnelle relative à un événement S *a toutes les propriétés habituelles du calcul des probabilités.*

Propriété A4:

Pour tous A *et* B *de probabilité non nulle :*

$$P(A) = P_B(A)P(B) + P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B}).$$

Démonstration :
$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P_B(A)P(B) + P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B})$.

3) Exemple de calcul de probabilités conditionnelles par différentes méthodes

Exemple:

Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 découpent des pièces métalliques identiques. M_1 fournit 60% de la production (parmi lesquelles 6,3% sont défectueuses), le reste étant fourni par M_2 (dont 4% de la production est défectueuse).
La production du jour est constituée des pièces produites par les deux machines, et on en tire en fin de soirée une pièce au hasard (tous les prélèvements sont supposés équiprobables).

1. *Utilisation des formules des probabilités conditionnelles.*
   (a) *Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 ?*
   (b) *Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 ?*
   (c) *Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?*
2. *Utilisation d'un tableau*
   On suppose maintenant que la production est composée de 10000 pièces.
   (a) *Reproduire et compléter le tableau suivant qui décrit la production du jour :*

	Pièces produites par M_1	*Pièces produites par M_2*	*Total*
Défectueuses			
Conformes			
Total			

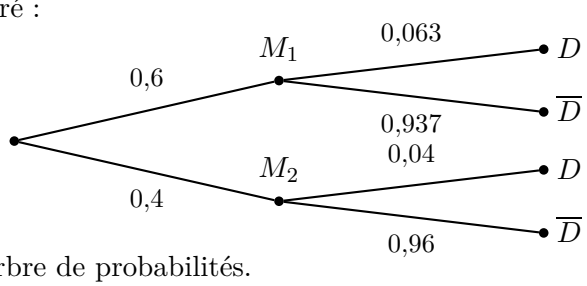
   (b) *Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 ?*
   (c) *Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 ?*
   (d) *Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?*
3. *Utilisation d'un arbre des probabilités conditionnelles*
   (a) *Dresser un arbre des probabilités conditionnelles relatif à la situation proposée.*
   (b) *Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 ?*
   (c) *Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 ?*
   (d) *Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?*

Soit D l'événement "La pièce prélevée est défectueuse"

1. (a) $P_{M_1}(D) = 0{,}063$.
   (b) $P_{M_2}(D) = 0{,}040$.
   (c) $P(D) = P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D)$
   $= P(M_1)P_{M_1}(D) + P(M_2)P_{M_2}(D)$
   $= 0{,}6 \times 0{,}063 + 0{,}4 \times 0{,}040$
   $= 0{,}0538$.
2. (a)

	Pièces produites par M_1	Pièces produites par M_2	Total
Défectueuses	378	160	538
Conformes	5622	3840	9462
Total	6000	4000	10000

   (b) $P_{M_1}(D) = \dfrac{378}{6000} = 0{,}063$.
   (c) $P_{M_2}(D) = \dfrac{1600}{4000} = 0{,}040$.
   (d) $P(D) = \dfrac{538}{10000} = 0{,}0538$.
3. (a) arbre de probabilités pondéré :



   (b) $P_{M_1}(D) = 0{,}063$ d'après l'arbre de probabilités.
   (c) $P_{M_2}(D) = 0{,}040$ d'après l'arbre de probabilités.
   (d) $P(D) = P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D)$
   $= P(M_1)P_{M_1}(D) + P(M_2)P_{M_2}(D)$
   $= 0{,}6 \times 0{,}063 + 0{,}4 \times 0{,}040$
   $= 0{,}0538$.

4) Evénements indépendants

Evénements indépendants:

On dit que A et B sont des événements indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Exemple:

On considère le tirage au hasard d'une carte d'un jeu de 32 cartes.
$A =$ "Tirer un as", $B =$ "Tirer un coeur" et $C =$ "Tirer un as rouge".
Indépendance de A et B :

- $P(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.
- $P(B) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$.
- $P(A \cap B) = \dfrac{1}{32} = P(A) \times P(B)$, *les événements A et B sont donc indépendants.*

Indépendance de B et C :

- $P(B) = \dfrac{1}{4}$.
- $P(C) = \dfrac{2}{32} = \dfrac{1}{16}$.
- $P(B \cap C) = \dfrac{1}{32} \neq P(B) \times P(C)$, *les événements B et C ne sont donc pas indépendants.*

Remarques:

Dans le cas où A et B sont des événements de probabilités non nulles, on a
- $P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B) = P(A).P(B)$, *d'où :*
- $P_B(A) = P(A)$ *et* $P_A(B) = P(B)$.

Propriété A5:

Si A et B sont des événements indépendants, alors : A et $\overline{B}$; $\overline{A}$ et B ; $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également des événements indépendants.

Ce qui suit est indispensable pour survivre dans l'univers des probabilités, voici ...

LA FICHE !!!

Ω désigne l'ensemble des issues élémentaires possibles d'une expérience aléatoire ;A et B sont deux événements composés d'aucune, d'une ou de plusieurs issues de Ω.

Langage des ensembles - Langage des événements

Événement certain	Ω
Événement impossible	$\emptyset$
Événement contraire de A	$\overline{A}$
Le contraire du contraire de A est A lui-même	$\overline{\overline{A}} = A$
Événement A ou B	$A \cup B$
Événement A et B	$A \cap B$

Calcul des probabilités

Probabilité d'un événements certain	$P(\Omega) = 1$
Probabilité d'un événement impossible	$P(\emptyset) = 0$
Probabilité d'un événement A (Si Ω est fini et en cas d'équiprobabilité)	$P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de A}}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$
Probabilité d'un événement contraire	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Probabilité de A ou B	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Probabilités totales	$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
Probabilité de « A sachant B (Si B de probabilité non nulle)	$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Probabilité de A et B (Uniquement si A et B sont **indépendants**)	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

*

IV) Exercices divers

1) Calcul des probabilités

Exercice A1 *Soit un univers* Ω *et deux événements incompatibles* A *et* B *tels que :* $P(A) = 0{,}3$ *et* $P(B) = 0{,}5$. *Calculer* $P(A \cap B)$,$P(A \cup B)$,$P(\overline{A})$,$P(\overline{B})$.

Exercice A2 *Soit un univers* Ω *et deux événements* A *et* B *tels que :* $P(A) = 0{,}3$ *et* $P(B) = 0{,}5$ *et* $P(A \cap B) = 0{,}1$. *Calculer* $P(A \cup B)$,$P(\overline{A})$,$P(\overline{B})$.

2) Probabilités conditionnelles

Exercice A3 *On considère deux événements* A *et* B *tels que* $P(A) = 0{,}4$ $P(B) = 0{,}6$ *et* $P(A \cup B) = 0{,}7$.

1. *Calculer* $P(A \cap B)$.
2. *En déduire les probabilités conditionnelles* $P_A(B)$ *et* $P_B(A)$.

Exercice A4 *On considère deux événements* A *et* B *tels que* $P(A) = 0{,}2$ $P(B) = 0{,}4$ *et* $P(A \cup B) = 0{,}5$.

1. *Calculer* $P(A \cap B)$.
2. *En déduire les probabilités conditionnelles* $P_A(B)$ *et* $P_B(A)$.

Exercice A5 *100 étudiants d'IUT se répartissent de la façon suivante.*

	Filles	***Garçons***	***Total***
Pratiquent un sport	30	50	80
Ne pratiquent aucun sport	12	8	20
Total	42	58	100

On rencontre au hasard un des 100 étudiants. Tous les étudiants ont la même probabilité d'être rencontrés. On considère les événements suivants :
F *:« l'étudiant rencontré est une fille » ;*
G *:« l'étudiant rencontré est un garçon » ;*
S *:« l'étudiant rencontré pratique un sport » ;*
$\overline{S}$ *:« l'étudiant rencontré ne pratique pas de sport ».*

1. *Traduire par une phrase chacun des deux événements* $F \cap S$ *et* $G \cap \overline{S}$.
2. *Calculer les probabilités* $P(S)$, $P(F \cap S)$, $P(\overline{S})$ *et* $P(G \cap \overline{S})$.
3. *Déterminer à l'aide du tableau, les probabilités* $P_S(F)$ *et* $P_{\overline{S}}(G)$.
4. *Vérifier que* $P(F \cap S) = P_S(F) \times P(S)$ *et que* $P(G \cap \overline{S}) = P_{\overline{S}}G) \times P(\overline{S})$.
5. *Calculer la probabilité que, sachant que l'étudiant est un garçon, il pratique un sport. Arrondir le résultat à* 10^{-2}.

Exercice A6 *Une entreprise de produits pharmaceutiques fabrique en très grande quantité un certain type de comprimés. On prélève au hasard un comprimé dans la production d'une journée. La probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard dans la production d'une journée soit conforme est de* 0,9.

1. *On note C l'événement :« le comprimé prélevé est conforme »et $\overline{C}$ l'événement contraire de C. Calculer la probabilité de l'événement $\overline{C}$.*
2. *On contrôle chaque comprimé de la production. On constate que, lorsqu'un comprimé est conforme, il est toujours accepté à l'issue du contrôle ; quand un comprimé n'est pas conforme, il peut néanmoins être accepté avec une probabilité de $\frac{1}{11}$. On note A l'événement « le comprimé est accepté à l'issue du contrôle ».*
   (a) *Montrer en construisant un arbre pondéré, que $P(A \cap C) = \frac{9}{10}$ et que $P(A \cap \overline{C}) = \frac{1}{110}$.*
   (b) *Montrer que $P(A) = \frac{10}{11}$.*
   (c) *Montrer que $P_A(C) = \frac{99}{100}$.*

Exercice A7 *Au cours d'une journée, un commercial se déplace pour visiter deux de ses clients afin de leur proposer l'achat d'un produit de grande consommation. Au vu de son expérience, le commercial estime que :*
- *la probabilité que le premier client visité achète la produit est de* 0,25 *;*
- *si le premier client achète le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à* 0,4 *;*
- *si le premier client n'achète pas le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à* 0,25 *;*

On note A l'événement « le premier client achète le produit ». On note B l'événement « le second client achète le produit ».

1. *Réaliser un arbre pondéré décrivant cette situation.*
2. *Calculer la probabilité de l'événement B.*
3. *Déterminer la probabilité qu'un seul des clients conclut l'achat.*

3) Événements indépendants

Exercice A8 *Soit A et B deux événements liés à une expérience aléatoire. Les probabilités des événements A, B et $A \cap B$ sont donnés par les égalités :*

$$P(A) = \frac{5}{3} \quad P(B) = \frac{3}{4} \quad P(A \cap B) = \frac{2}{5}$$

1. *L'une des données ci-dessus est aberrante, laquelle ? Pourquoi ?*
2. *Modifier cette donnée de façon que les événements A et B soient indépendants.*
3. *En conservant cette nouvelle donnée, déterminer la valeur de $P_A(B)$.*

Exercice A9 *L'objectif de l'exercice est d'étudier les performances d'une photocopieuse dans un centre de soins d'une grande mutuelle. Les copies réalisées avec cette photocopieuse peuvent présenter deux types de défauts :*
- *un défaut noté D_1 lié à la qualité du tambour de la photocopieuse ;*
- *un défaut noté D_2 lié à la qualité de l'encre en poudre utilisée.*

On prélève une copie au hasard dans l'ensemble des copies réalisées pendant une journée donnée.
L'événement D_1 :« la copie prélevée présente le défaut D_1 »a pour probabilité $P(D_1) = 0{,}02$.
L'événement D_2 :« la copie prélevée présente le défaut D_2 »a pour probabilité $P(D_2) = 0{,}04$.
On admet que les événements D_1 et D_2 sont indépendants.

1. *Exprimer en fonction des événements D_1 et D_2 chacun des événements suivants :*
   A :« la copie prélevée présente les deux défauts » ;
   B :« la copie prélevée présente l'un au moins des deux défauts ».

2. *Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.*
3. *Calculer la probabilité de l'événement C :« la copie prélevée ne présente aucun défaut ».*

Exercice A10 *On a posé à un groupe de 36 étudiants de l'IUT la question : « regardez-vous des séries policières à la télévision ? ». Les réponses sont les suivantes :*

	Oui	***Non***
Filles	20	4
Garçons	10	2

Chaque élève a noté sa réponse sur une fiche. On prélève au hasard une fiche parmi les 36. Tous les tirages sont équiprobables.
On considère les événements suivants :
O :« la fiche est celle d'un élève qui a répondu oui » ;
F :« la fiche est celle d'une fille ».
Les événements O et F sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

Exercice A11 *Dans une grande surface, il y a, en stock,* 500 *paires de chaussures de sport dont* 375 *ont été fabriquées à l'étranger,* 1000 *paires de bottes dont* 75% *ont été fabriquées à l'étranger et* 2500 *paires de chaussons dont* 625 *ont été fabriquées en France.*

1. *Recopier et compléter le tableau suivant.*

	Fabriqués en France	***Fabriqués à l'étranger***	***Total***
Paires de chaussures de sport			
Paires de bottes			
Paires de chaussons			
Total			4000

2. *On prélève un article au hasard parmi les articles de ce stock. Tous les articles ont la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants :*
   - *A :« l'article prélevé a été fabriqué à l'étranger » ;*
   - *B :« l'article prélevé est une paire de botte » ;*
   - *C :« l'article prélevé est une paire de chaussons ».*

   Dans cet exercice, sauf indication contraire, on demande les valeurs exactes des probabilités sous forme décimale.
   (a) *Traduire par une phrase chacun des trois événements : $\overline{A}$, $A \cap B$ et $\overline{A} \cap C$.*
   (b) *Calculer les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.*
   (c) *Calculer la probabilité que l'article prélevé ait été fabriqué à l'étranger ou que ce soit une paire de bottes.*
   (d) *Calculer les probabilités $P_B(A)$ et $P_C(A)$.*
   (e) *Calculer la probabilité que, sachant qu'il provient de France, l'article prélevé soit une paire de chaussure de sport.*
3. *Les événements A et B sont-il indépendants ? Justifier la réponse.*

Chapitre B

Variables aléatoire

Sommaire

I) Vocabulaire 15
II) Couple de variables aléatoires 19
1) Exemple de loi conjointe de 2 variables aléatoires 19
2) Exemple de loi conjointe de 2 variables aléatoires indépendantes. 19
3) Exercices sur les couples de variables aléatoires 21

I) Vocabulaire

Partons d'un exemple que nous garderons en tête dans toute cette partie : on tire une boule au hasard dans une urne contenant une boule rouge, une boule verte et une boule bleue. On la remets dans l'urne et on effectue un second tirage d'une boule. Chacune des boules a la même possibilité d'être choisie.

On peut réaliser le tableau suivant pour expliciter l'expérience aléatoire.

(1^{er} tirage ; 2^{nd} tirage)	R	V	B
R	(R ; R)	(R ; V)	(R ; B)
V	(V ; R)	(V ; V)	(V ; B)
B	(B ; R)	(B ; V)	(B ; B)

Chaque événement élémentaire a une probabilité de $\frac{1}{9}$ d'être obtenu.

On ajoute la règle suivante :

- Pour chaque boule rouge obtenue, on gagne 6 €
- Pour chaque boule verte obtenue, on gagne 1 €
- Pour chaque boule bleue obtenue, on perd 4 €.

Pour chaque tirage, on peut donc s'intéresser à la somme gagnée que l'on va noter X. On dit que l'on a défini ainsi une **variable aléatoire**.

univers:

On appelle univers de la variable aléatoire X, l'ensemble des valeurs que peut prendre cette variable. On le note $\Omega(X)$.

Dans notre exemple, on a $\Omega(X) = \{-8; -3; 2; 7; 12\}$.

Loi de probabilité:

Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, c'est donner pour chaque valeur de la variable aléatoire X, la probabilité correspondante.

Souvent, on présente ces résultats dans un tableau :

k	-8	-3	2	7	12
$P(X=k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Exercice B1 *On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire représentant l'écart (absolu) entre les deux faces obtenues. Donner la loi de probabilité de X.*

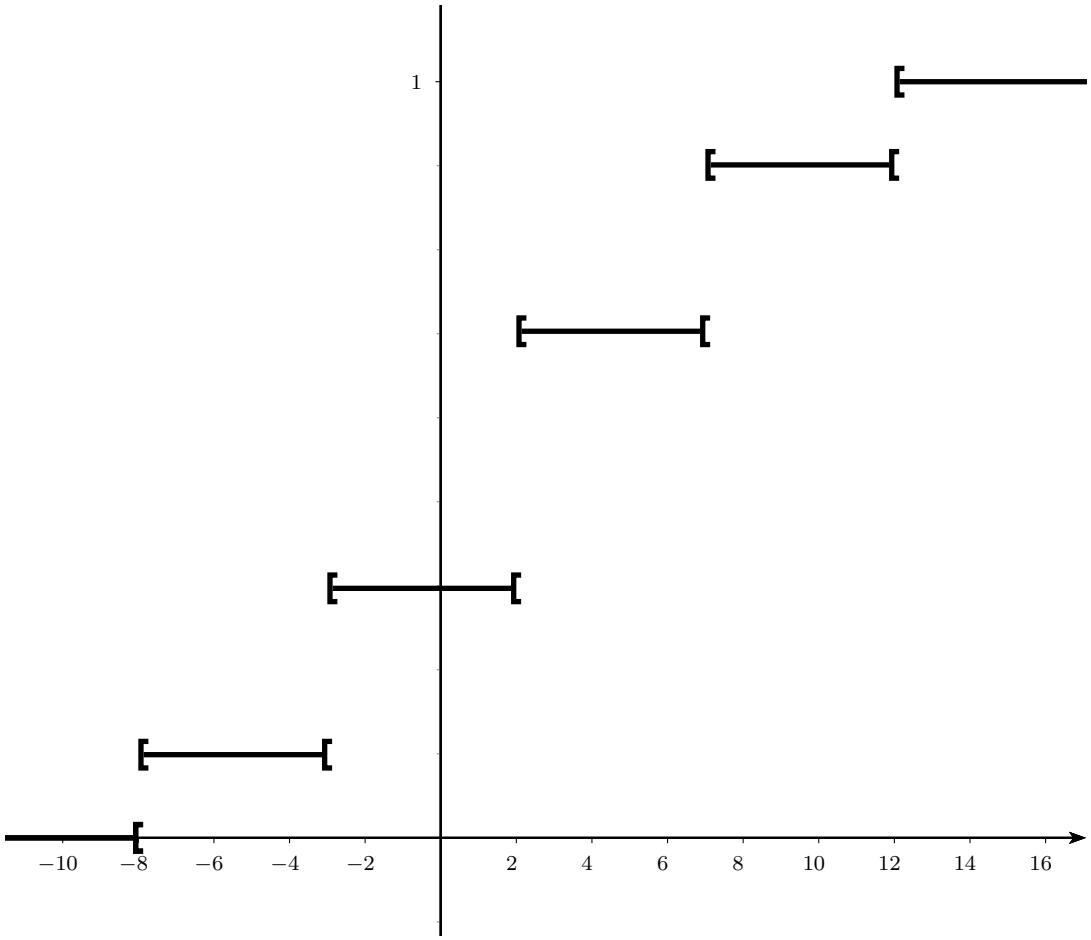
Fonction de répartition:

La fonction de répartition de la variable aléatoire X est la fonction $x \mapsto P(X \leqslant x)$.

Dans notre exemple :

k	-8	-3	2	7	12
$P(X \leqslant k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{9}$

On donne alors sa représentation graphique :



Espérance mathématiques:

L'espérance mathématiques d'une variable aléatoire discrète prenant n valeurs x_i avec les probabilités $p_i = P(X = x_i)$ où $1 \leqslant i \leqslant n$, est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Remarque:

Concrètement, l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X représente la valeur moyenne que celle-ci prend lorsque le nombre de tirage devient très grand.

Exemple:

Dans notre exemple de cours, on a : $E(X) = \frac{1}{9} \times (-8) + \frac{2}{9} \times (-3) + \frac{3}{9} \times 2 + \frac{2}{9} \times 7 + \frac{1}{9} \times 12 = 2$

Propriété B1:

Soient a et b des constantes réelles et X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$:

$$E(aX) = aE(X) \text{ et } E(X + b) = E(X) + b.$$

Ce qui signifie que si l'on augmente les gains de 2€, la moyenne augmente de 2€ aussi et que si l'on multiple les gains par 2, la moyenne se trouve elle aussi multipliée par 2.

Variance & Ecart-type:

- On note $V(X)$ la variance de la variable aléatoire X, que l'on calcule grâce à la formule :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- On note $\sigma(X)$ ou encore σ_X l'écart-type de la variable aléatoire X, que l'on trouve grâce à la formule :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

Propriété B2:

Soient $a > 0$ et b des constantes réelles et X une variable aléatoire d'écart type $\sigma(X)$:

$$\sigma(aX) = |a|\sigma(X) \text{ et } \sigma(X + b) = \sigma(X).$$

Ce qui signifie que si l'on augmente les gains de 2€, l'écart type ne change pas et que si l'on multiple les gains par 2, l'écart type se trouve lui aussi multipliée par 2.

Exemple:

Dans notre exemple de cours, on a : $V(X) = \frac{1}{9} \times (-8)^2 + \frac{2}{9} \times (-3)^2 + \frac{3}{9} \times 2^2 + \frac{2}{9} \times 7^2 + \frac{1}{9} \times 12^2 - 2^2 = \frac{100}{3} \approx 33{,}33$

$\sigma_X = \sqrt{\frac{100}{3}} \approx 5{,}77$

Exercice B2 *Reprendre l'exercice précédent et calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la variable aléatoire donnée.*

Exercice B3 *Au cours d'une kermesse, l'animateur d'un stand dispose, dans un enclos, de douze cages peintes : sept sont blanches, deux noires et les trois autres vertes. L'animateur place alors une souris dans l'enclos. On suppose qu'à chaque jeu, la souris choisit d'entrer au hasard dans une cage et que tous les choix sont équiprobables. Un joueur participe au jeu. Le règlement du jeu est le suivant :*

- *Si la souris entre dans une cage blanche, le joueur perd*
- *Si la souris entre dans une cage noire, le joueur gagne*
- *Si la souris entre dans une cage verte, l'animateur remet la souris dans l'enclos ; si la souris entre alors dans une cage noire, le joueur gagne sinon il perd.*

On suppose que le choix de la deuxième cage est indépendant du choix de la première.

1. *Montrez que la probabilité de l'événement " le joueur gagne " est* $\frac{5}{24}$.
2. *Un joueur ne possède que* 5 *euros qu'il verse pour participer à une partie. S'il gagne, il reçoit* k *euros ; sinon, il ne reçoit rien. Soit* X *la variable aléatoire prenant pour valeur la somme que possède le joueur après la partie.*
   (a) *Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire* X.
   (b) *Calculez, en fonction de* k, *l'espérance mathématique* $E(X)$ *de la variable aléatoire* X.
   (c) *Quelle valeur faut-il donner à* k *pour que le jeu soit équitable ? (c'est à dire pour que ce joueur puisse espérer posséder 5 euros à la fin de la partie)*

Exercice B4 *Dans une kermesse, un jeu est organise de la façon suivante : le joueur mise 10 € puis il réalise un tirage en deux étapes :*

- $1^{\text{ère}}$ *étape : le joueur tire au hasard un billet dans un panier. Dans ce panier, on a placé 10 billets marqués* U_1 *et 2 billets marqués "*U_2.
- $2^{\text{ème}}$ *étape : Si le joueur a obtenu un billet marqué* U_1, *il tire alors un jeton dans une urne* U_1 *où sont placés 10 jetons marques "Perdant" et 2 jetons marqués "Gagnant". Si le joueur a obtenu un billet marqué "*U_2 *", il tire alors un jeton dans une urne* U_2 *où sont places 7 jetons marqués "Perdant" et 5 jetons marques "Gagnant".*

On note :

- U_1 *l'événement : Le joueur a tiré un billet "*U_1 *".*
- U_2 *l'événement : Le joueur a tiré un billet "*U_2 *".*
- G *l'événement : Le joueur a tiré un jeton marque "Gagnant".*

Tous les résultats seront donnes sous forme de fractions irréductibles.

1. *Construire un arbre pondéré qui décrit ce jeu.*
2. *Calculer la probabilité des événements* $(G \cap U_1)$ *et* $(G \cap U_2)$.
3. *Montrer que* $p(G) = \frac{5}{24}$
4. *Avec un jeton gagnant de l'urne* U_1, *le joueur reçoit 25 €. Avec un jeton gagnant de l'urne* U_2, *il reçoit 10 €. Et rien sinon. On notera* X *la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur a l'issue du jeu. Déterminer son espérance mathématique.*

II) Couple de variables aléatoires

Propriété B3:

1. *Pour toutes variables aléatoires X et Y, on a* ***E(X+Y)=E(X)+E(Y)****. Cette propriété est appelée* ***additivité*** *de l'espérance, c'est à dire que l'espérance d'une somme est la somme des espérances.*
2. ***Á condition que les variables aléatoires X et Y soient indépendantes****, on a :*
   - ***E(X×Y)=E(X)×E(Y)****.*
   - ***V(X+Y)=V(X)+V(Y)****. Cette propriété est appelée* ***additivité*** *de la variance, c'est à dire que la variance d'une somme est la somme des variances.*
3. ***Dans tous les cas, il n'y a pas d'additivité des écart-types****. Si* $\sigma(X) \neq 0$ *et* $\sigma(Y) \neq 0$*, on a :* $\sigma(X+Y) \neq \sigma(X) + \sigma(Y)$

1) Exemple de loi conjointe de 2 variables aléatoires

Deux représentants A et B d'une même entreprise travaillent pour proposer des contrats à d'éventuels clients : A est chargé de placer de nouveaux contrats à des clients de l'entreprise, tandis que B prospecte de nouveaux clients. On note :
X : le nombre de contrats obtenus par A en un jour.
Y : le nombre de contrats obtenus par B en un jour.
Le tableau

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0,05	0,15	0,20	0,10
1	0,10	0,20	0,15	0,05

est appelé **tableau de la loi conjointe** de X et Y.
On y lit par exemple : $P(X = 0 \text{ et } Y = 1) = P((X = 0) \cap (Y = 1)) = 0{,}10$

L'entreprise s'intéresse à la variable aléatoire $Z = X + Y$, mesurant le nombre total de contrats obtenus par l'équipe constituée de A et B en un jour.

Exercice B5
1. *Déterminer les lois respectives de X et de Y.*
2. *Déterminer l'espérance et la variance de X et Y.*
3. *Déterminer la loi de Z, puis calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de Z.*
4. *Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*
5. *Comparer E(Z) et V(Z) respectivement à E(X)+E(Y), et V(X)+V(Y).*

2) Exemple de loi conjointe de 2 variables aléatoires indépendantes.

Les pannes du photocopieur. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de pannes d'origine mécanique (par mois), et par Y la variable aléatoire égale au nombre de pannes d'origines électronique (par mois). On suppose de plus que les variables X et Y sont indépendantes. Les lois de X et Y sont données par les tableaux suivants :

Valeurs x_i de X	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,07	0,7	0,23

Valeurs y_i de Y	0	1
$P(Y = y_i)$	0,6	0,4

Les calculs de l'espérance et la variance de X donnent :
$E(X) = 1{,}16$ et $V(X) = 1{,}62 - 1{,}16^2 = 0{,}2744$ d'où $\sigma(X) \simeq 0{,}5238$. On trouve de même :$E(Y) = 0{,}4$ et $V(Y) = 0{,}24$ d'où $\sigma(Y) \simeq 0{,}49$

L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités :
$P((X = 0) \cap (Y = 0)) = P(X = 0) \times P(Y = 0) = 0{,}07 \times 0{,}6 = 0{,}042$
$P((X = 0) \cap (Y = 1)) = P(X = 0) \times P(Y = 1) = 0{,}07 \times 0{,}4 = 0{,}028$ etc...

L'indépendance de X et Y équivaut donc aux 6 formules : $P((X = x_i) \cap P(Y = y_i)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_i)$, pour tous les couples $(i; j)$ avec i compris entre 0 et 2 et j=0 ou 1.

Dans le cas où l'on, suppose X et Y indépendantes, la loi conjointe s'obtient en écrivant la table de multiplication des probabilités de X et Y comme le tableau suivant :

$Y \backslash X$	0	1	2	$p(Y = y_j)$
0	0,042	0,42	0,138	0,6
1	0,028	0,28	0,092	0,4
$p(X = x_i)$	0,07	0,7	0,23	1

Ce tableau est à la fois une **table de multiplication** obtenue à partir de la ligne du bas et de la colonne de droite, et **une table d'addition** par ligne et par colonne.

On cherche maintenant la loi de al variable aléatoire Z égale au nombre total de pannes du photocopieur :$Z = X + Y$. Tableau des valeurs de Z ci-contre :

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3

En appliquant la même méthode qu'au paragraphe 1. :
$p(Z = 0) = p((X = 0) \cap p(Y = 0)) = 0{,}042$
$p(Z = 1) = p((X = 0) \cap p(Y = 1)) + p((X = 1) \cap p(Y = 0)) = 0{,}028 + 0{,}42 = 0{,}448$ etc... ce qui nous donne la loi de Z :

valeurs z_i de Z	0	1	2	3
$p(Z = z_i)$	0,042	0,448	0,418	0,092

On obtient facilement $E(Z) = 1{,}56$ $V(Z) = 0{,}5144$ $\sigma(Z) \simeq 0{,}7172$ et on constate que :

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
- $\sigma(X + Y) \neq \sigma(X) + \sigma(Y)$

Exercice B6 *Espérance de gain sur investissement Une entreprise envisage l'achat d'une machine d'une valeur de 70 000€, et d'une durée de vie de 2 ans. Les dépenses de fonctionnement et de fabrication sont de 42 000€ par an. On peut fabriquer au maximum 1 000 pièces par an avec cette machine.*

L'entrepreneur estime que chaque année la probabilité d'écouler cette production est de 0,9. PAr contre, en cas de récession sur l'une ou l'autre des années, on ne pourra écouler (et on en fabriquera) que 750 pièces. On suppose qu'il y a indépendance entre les quantités vendues chaque année.

D'autre part le prix de vente d'une pièc e (imposé par la concurrence) est de 100 € la première année. Pour la seconde année, il y a une possibilité de 0,5 pour qu'il se maintienne, une probabilité 0,1 pour qu'il augmente de 10% et une probabilité 0,4 pour qu'il baisse de 5% .

On note Q_1 la variable aléatoire égale à la quantité écoulée la première année, Q_2 la quantité écoulée la deuxième année, et $Q = Q_1 + Q_2$ la quantité écoulée totale sur les 2 années.

1. *Calculer l'espérance mathématique et la variance pour la quantité de pièces écoulées pour une année.*

2. *Calculer l'espérance mathématique et la variance pour la quantité de pièces écoulées pour l'ensemble des deux années.*
3. *Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type du chiffre d'affaires réalisé la première année.*
4. *Calculer l'espérance mathématique du chiffre d'affaires réalisé la deuxième année, en supposant de plus que les quantités écoulées et le prix de vente sont deux variables aléatoires indépendantes.*
5. *Quelle est l'espérance mathématiques du gain net procuré par cet investissement sur l'ensemble des deux années ?*

3) Exercices sur les couples de variables aléatoires

Exercice B7 *X et Y sont deux variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :*

$Y \setminus X$	1	3	5	7	9
0	0,01	0,04	0,065	0,07	0,015
2	0,03	0,042	0,108	0,1	0,02
4	0,06	0,068	0,187	0,18	0,005

1. *Faire les tableaux des lois X et Y.*
2. *Calculer E(X), V(X) et σ(X).*
3. *Calculer E(Y), V(Y) et σ(Y).*
4. *Déterminer la probabilité conditionnelle* $P_{Y=2}(X = 7)$.
5. *Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*
6. *Donner la valeur de E(X+Y), sans déterminer la loi de X+Y, en précisant quelle est la propriété utilisée.*
7. *Faire le tableau de la loi de probabilité de X+Y.*
8. *Á l'aide de la calculatrice, calculer E(X+Y), V(X+Y) et σ(X+Y).*
9. *Vérifier qu'il n'y a pas d'additivité de la variance, ni de l'écart-type.*

Exercice B8 *X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, dont les lois sont données par les tableaux :*

Loi de X

x_i	3	4	5
p_i	0,1	0,4	0,5

Loi de Y

y_i	0	1
p_i	0,3	0,7

1. *Faire le tableau de la loi conjointe de X et Y, en expliquant la méthode utilisée.*
2. *Calculer l'espérance, l'écart-type et la variance de X.*
3. *Même question pour Y.*
4. *En déduire la loi de probabilité de Z=X-Y.*
5. *Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X-Y.*
6. *En utilisant les propriétés de l'espérance et de la variance, écrire les formules de calcul de E(X-Y, en fonction de E(X) et E(Y), et celle de V(X-Y) en fonction de V(X) et V(Y), en précisant les éventuelles conditions.*
7. *Vérifier les formules obtenues à la question 5 sur cet exemple.*

Exercice B9 *Un artisan est spécialisé dans la remise à neuf de fauteuils anciens. Cette rénovation nécessite deux étapes successives ; une remise en état du châssis du fauteuil (menuiserie) et une remise en état du siège et du dossier (tapisserie). Pour un fauteuil donné, on appelle X la variable aléatoire égale au temps de menuiserie, et Y la variable aléatoire égala au temps de tapisserie. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, dont les lois sont données par les deux tableaux suivants :*

Loi de X

x_i	2	3	4
p_i	0,3	0,5	0,2

Loi de Y

y_i	3	5	6	8
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

1. *Á l'aide de la calculatrice, déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X et de Y à* 10^{-1} *près.*

2. *Donner le tableau de la loi conjointe de X et de Y.*
3. *Préciser quel est l'ensemble des valeurs de Z=X+Y.*
4. *Faire le tableau de la loi de probabilité de Z.*
5. *Á l'aide de la calculatrice, calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de Z.*
6. *Vérifier les propriétés d'additivité sur cet exemple.*

Exercice B10 *En 2024, une entreprise prévoit de commercialiser un nouveau modèle de montre, qui outre sa capacité à donner l'heure, peut aussi prendre des photos numériques (beaucoup plus discrètement qu'avec un téléphone). La direction commerciale prévoit que la quantité vendue en 2024 pourrait être de 100 000 suer le marché français, avec une probabilité de 0,8 et seulement 80 000 avec une probabilité de 0,2 si une société concurrente proposait un modèle comparable de montre pouvant prendre les photos.*
On note X la variable aléatoire égale à la quantité vendue en 2024, **exprimée en milliers**.
La direction commerciale considère de plus que le prix de vente de cette montre pourra être fixé à 120€ si aucune autre société concurrente ne propose de modèle comparable. Par contre en cas de concurrence (avec une probabilité de 0,2)le prix de vente devra être réduit à 105€ . On note P la variable aléatoire égale au prix de vente d'une montre et Y le chiffre d'affaires (en millions d'euros) réalisable pour le vente de ces montres en 2025.

1. *Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.*
2. *Déterminer l'espérance et l'écart-type de P.*
3. *D'après les informations données dans l'énoncé (sans calcul), peut-on dire ou non que les variables aléatoires X et P sont indépendantes ?*
4. *Exprimer Y en fonction de X et P.*
5. *Déterminer l'espérance de Y.*

Exercice B11 *Une entreprise envisage l'achat d'une machine d'une valeur de 500 000€ , et d'une durée de vie de 3 ans. Les dépenses de fonctionnement du matériel sont de 15 000€ par an. On peut fabriquer au maximum 2 000 pièces par an avec cette machine, à un coût unitaire constant de 15€ par pièce produite, chacune des 3 années.*
L'entrepreneur estime que chaque année la probabilité d'écouler cette production de 2 000 pièces est de 0,8. Par contre, en cas de récession l'une ou l'autre des années, on ne pourra écouler que 1 500 pièces. On admettra qu'il y a indépendance entre les quantités vendues chaque année. On admettra aussi que la quantité produite est exactement égale à la quantité vendue (la production est ajustée à la vente).
D'autre part le prix de vente d'une pièce (imposé par la concurrence) est de 120€ les deux premières années. Pour la troisième année, il y a une probabilité de 0,4 pour qu'il se maintienne, un probabilité de 0,1 pour qu'il augmente de 10% et une probabilité de 0,5 pour qu'il baisse de 5%.
On note Q_1 la variable aléatoire égale à la quantité écoulée l'année i(i=1,2,3), et $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$, la quantité écoulée totale sur les 3 années.

1. *Calculer l'espérance mathématique et la variance pour la quantité de pièces écoulées pour l'une des 3 années.*
2. *En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de la quantité Q des pièces écoulées pour l'ensemble des trois années, en précisant soigneusement les propriétés utilisées.*
3. *Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type des chiffres d'affaires X_1 et X_2 réalisés chacune des deux premières années.*
4. *Calculer l'espérance mathématiques de la variable aléatoire P égale au prix de vente au cours de la troisième année.*
5. *En supposant que les quantités écoulées et el prix de vente sont deux variables indépendantes au cours de la troisième année, déterminez l'espérance du chiffre d'affaires X_3 pour la troisième année.*
6. *Exprimer en fonction de Q la variable aléatoire C égale au total des charges de production (fonctionnement + coût par pièce) pour les 3 années.*
7. *En déduire l'espérance et l'écart-type de C(préciser quelle est la propriété utilisée).*
8. *Quelle est l'espérance mathématique du gain net procuré par cet investissement sur l'ensemble des trois années ?*

Chapitre C

Lois de probabilités discrètes

Sommaire

I) Loi binomiale 24
II) Loi de poisson 26
III) Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson 27
IV) Loi géométrique 28
V) Exercices variés 30

I) Loi binomiale

Exercice C1 *On dispose d'une pièce de monnaie truquée pour laquelle on a 80% de chance d'obtenir face et 20% de chance d'obtenir pile. On lance 3 fois de suite la pièce et on note X la variable aléatoire représentant le nombre de "face" obtenu. Donner la loi de probabilité de X.*

Dans l'exercice précédent, on dit que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $\left(3; \frac{80}{100}\right)$.

Loi binomiale:

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $(n; p)$ lorsque les conditions suivantes sont réunies :

- On répète n fois une expérience aléatoire.
- Les épreuves sont indépendantes les unes des autres.
- A chaque épreuve, il n'y a que deux issues possible :
  - ◇ "Succès" avec une probabilité p
  - ◇ "Echec" avec une probabilité $q = 1 - p$

dans ce cas, on note

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}(n; p)$$

Propriété C1:

Lorsque X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n; p)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, tel que $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Souvent, on note $q = 1 - p$ qui représente la probabilité d'obtenir face. On a alors

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Coefficient binomial:

Le nombre C_n^k peut être calculer :

- Par la formule : $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$.
- Avec une calculette TI : Ex pour $C_5^2 = 10 : 5$ [MATH] [9 : Combinaison] 2
- Avec une calculette CASIO : Ex pour $C_5^2 = 10 : 5$ [OPTN] [PRB] [nCr] 2

Exercice C2 *Calculer :* *1.* C_7^2 *2.* C_5^0 *3.* C_{12}^7

Exercice C3 *On lance 10 fois un dé bien équilibré. On note X le nombre d'apparition de la face 6. donner*

1. $p(X = 0)$
2. $p(X = 4)$
3. $p(X \leqslant 2)$

Propriété C2:

$$E(X) = np \qquad V(X) = npq \qquad \sigma_X = \sqrt{npq} \qquad CV(X) = \frac{\sigma(X)}{E(x)}$$

Exercice C4 *Une urne contient 20 boules : 8 rouges et 12 vertes. On tire une boule, on note sa couleur, on la remet et on recommence l'expérience 6 fois de suite. On note X le nombre de boules rouges obtenues.*

1. *Donner la loi de probabilité de X.*
2. *Calculer son espérance mathématique.*
3. *Donner la variance et l'écart-type de X.*

Remarque:

- *On sait que dans le cas de tirages avec remise, les tirages sont indépendants.*
- *Dans des tirages sans remise, ce n'est plus le cas, mais lorsque que le nombre de tirage (n) est très petit par rapport à l'effectif total (N), on peut considérer tout de même que X suit une loi binomiale. De manière formelle, la condition à respecter est $\frac{n}{N} < 0{,}05$.Dans le cas contraire, la variable aléatoire suit une loi Hypergéométrique de paramètres : $\mathscr{H}(N; n; p)$ qu'on n'étudiera pas cette année.*

Exercice C5 *Un joueur lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que les dés sont non-truqués et donc que pour chaque dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition. Voici les règles :*

- *Si les deux dés donnent le même numéro alors le joueur perd 10 points*
- *Si les deux dès donnent deux numéros de parités différentes (l'un est pair et l'autre impair) alors il perd 5 points.*
- *Dans les autres cas il gagne 15 points.*

1. *Le joueur joue une partie et on note X la variable aléatoire correspond au nombre de points obtenus.*
   (a) *Déterminez la loi de probabilité de X puis calculez l'espérance de X.*
   (b) *Représentez graphiquement la fonction de répartition de X.*
2. *Le joueur effectue 10 parties de suites. Les résultats des parties sont indépendants les uns des autres. On appelle alors Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que le joueur gagne 15 points.*
   (a) *Expliquez pourquoi Y suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de Y ?*
   (b) *Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une fois 15 points ?*
   (c) *Combien de fois le joueur peut espérer gagner 15 points ?*
3. *Le joueur joue n parties de suite.*
   (a) *Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une fois 15 points ?*
   (b) *A partir de quelle valeur de n sa probabilité de gagner au moins une fois 15 points est strictement supérieure à 0,9999 ?*

Propriété C3:

Pour toute variable X_1 et X_2 indépendantes telles que $\begin{cases} X_1 \hookrightarrow B(n_1;p) \\ X_2 \hookrightarrow B(n_2;p) \end{cases}$ *alors* $X_1 + X_2 \hookrightarrow B(n_1+n_2;p)$

II) Loi de poisson

Les valeurs prises par une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson sont des entiers naturel : $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$. Une loi de Poisson est définie par un seul paramètre noté λ(lambda) et s'intéresse "au nombre de fois où un événement se produit sur un espace de temps ou d'espace T".

Remarque:

- *Attention, pour suivre une loi de Poisson l'événement doit avoir une chance faible de se produire sur un espace de temps T, moins de 10% càd une probabilité inférieure à 0,1.*
- *Si l'espace temps t étudié est différent de T, on se ramène à T par proportionnalité.*

Loi de poisson:

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. On note : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}, P(X=k) = \dfrac{e^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!}$ avec $k! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k-1 \times k$.

Remarque:

λ correspond au nombre moyen de fois où l'événement va apparaitre sur l'espace de temps T.

Propriété C4:

Lorsque X suit une loi de poisson de paramètre λ,

$E(X) = \lambda$ $\qquad$ $V(X) = \lambda$ $\qquad$ $\sigma_X = \sqrt{\lambda}$

Exercice C6 *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre* 1,6*. A l'aide de la calculatrice, calculer à 10^{-3} près les probabilités suivantes :*

1. $P(X=3)$
2. $P(X \leqslant 2)$
3. $P(X \geqslant 1)$

Exercice C7 *Un livre de* 300 *pages contient* 225 *fautes d'impression distribuées au hasard. Soit X la variable aléatoire qui mesure le nombre de fautes par page, on suppose que suit une loi de Poisson.*

1. *Déterminer le paramètre de cette loi.*
2. *Déterminer la probabilité pour qu'une page donnée contienne :*

(a) *deux fautes d'impression.*

(b) *moins de deux fautes d'impression.*

(c) *au moins trois fautes d'impression.*

Exercice C8 *On note X la variable aléatoire qui à toute période de 100 jours consécutifs, tirés au hasard dans les jours ouvrables de l'année associe le nombre de pannes d'une machine. Une étude menée par le constructeur permet d'affirmer que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0{,}5$. Déterminer :*

1. $P(X \leqslant 2)$
2. *La probabilité de l'événement : "La machine a au plus quatre pannes pendant la période de 100 jours consécutifs".*
3. *Le plus petit entier n tel que : $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}99$. Traduire cela par une phrase en français.*

Exercice C9 *On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de défauts sur le verre d'une ampoule. On admet que X obéit à la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$. Calculer la probabilité des événements suivants :*

1. *Il n'y a aucun défaut sur l'ampoule.*
2. *Il y a plus de deux défauts sur l'ampoule.*
3. *Le nombre de défauts est compris entre deux et cinq (bornes comprises).*

Propriété C5:

Pour toute variable X_1 et X_2 indépendantes telles que $\begin{cases} X_1 \hookrightarrow P(\lambda_1) \\ X_2 \hookrightarrow P(\lambda_2) \end{cases}$ *alors* $X_1 + X_2 \hookrightarrow P(\lambda_1 + \lambda_2)$

III) Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Dans une entreprise, on considère que la probabilité de fabriquer un article défectueux est 0,05. Lors d'un contrôle de qualité, on prélève un échantillon de 120 pièces. Notons X la variable aléatoire qui correspond au nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon. Comparer la loi de probabilité de cette variable aléatoire

1. En considérant qu'elle suit un loi binomiale.
2. En considérant qu'elle suit une loi de Poisson.
3. Que constate-on ?

Propriété C6:

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Dans certaines conditions ($n \geqslant 30; p \leqslant 0{,}1$ et $np \leqslant 15$), on peut remplacer la loi binomiale suivie par X, par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$

Exercice C10 *Une usine fabrique en grande série des pièces susceptibles de présenter un défaut dans 3% des cas. On prélève au hasard 250 pièces dans la production. Soit X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 250 pièces, fait correspondre le nombre de pièces présentant un défaut.*

1. *Quelle est la loi de probabilité de X ? Justifier.*
2. *(a) Montrer que que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson.*
   (b) En déterminer le paramètre λ.
   (c) Calculer alors la probabilité que, parmi les 250 pièces, il y en ait au plus 3 présentant un défaut.

IV) Loi géométrique

Loi géométrique:

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p lorsque les conditions suivantes sont réunies :

- ◇ On répète n fois une expérience aléatoire.
- ◇ Les épreuves sont indépendantes les unes des autres ou sont des prélèvements avec remise.
- ◇ A chaque épreuve, il n'y a que deux issues possible :
  "Succès" avec une probabilité p
  "Échec" avec une probabilité $q = 1 - p$
- ◇ La variable aléatoire mesure le nombre de tentatives pour obtenir un succès.

dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$

Propriété C7:

- ***Loi de probabilité :*** $P(X = x) = f(x) = (1-p)^{x-1} \times p$
- ***Éléments caractéristiques de caractéristiques :***

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad \sigma(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$$
$$V(X) = \frac{1-p}{p^2} \qquad CV(X) = \sqrt{1-p}$$

Remarques:

1. *Tous les calculs de probabilités d'une variable aléatoire discrète se font à partir de : sa fonction de distribution $f(x) = P(X = x)$ ou de sa fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$. Dans les deux cas, il existe des tables statistiques qui permettent d'éviter les calculs fastidieux.*
2. *On peut montrer que $P(X > x) = (1-p)^x$. Cela signifie que les x premières épreuves sont des échecs, et que le succès arrive au delà de x épreuves.*
3. *On peut aussi montrer que $P_{X>n}(X > n+x) = P(X > x)$. Cela signifie qu'on a déjà fait n réalisations sans succès, et qu'on calcule la probabilité de devoir attendre encore plus de x réalisations pour obtenir enfin un succès.*

Exercice C11 *Une usine fabriquant des jouets emploie 20 personnes dans chacun de ses deux ateliers. Le taux d'absentéisme a été évalué, pour une journée à environ 5% . Au bout de combien de jours en moyenne une personne sera-t-elle absente ?*

Exercice C12 *Bastien rentre chez lui après avoir bien fêté le retour d'un ami. Il arrive avec difficulté à sa porte, et au moment où il sort son trousseau de clés, la lumière tombe en panne. Son trousseau comporte 4 clefs identiques qu'il va essayer au hasard. La variable considérée est le nombre d'essais que Bastien va devoir effectuer avant de pouvoir ouvrir sa porte. Après chaque essai, vu son état et vu l'obscurité, il ne se rappelle pas quelle clé il a déjà essayé. Pour chacune des proposition suivantes, statuer si elles sont vrai ou fausse, en argumentant bien sur.*

1. *La variable aléatoire suit une loi géométrique.*
2. *Bastien a 18,75% de chance d'ouvrir sa porte au deuxième essai.*
3. *Il a 68,36% de chances d'avoir besoin au plus de 4 essais pour ouvrir sa porte.*
4. *Il a 57,81% de chances d'avoir besoin de plus de 4 essais pour ouvrir sa porte.*
5. *Chaque essai durant 30 secondes, Bastien peut espérer ouvrir sa porte en 2 minutes.*
6. *Bastien commence à saturer ... il a déjà effectué 6 tentatives infructueuses, du coup il décide que s'il n'a pas réussi à ouvrir sa porte au 10ème essai, il retournera boire un verre avec son ami. Quelle est cette probabilité ?*
7. *De retour après une pause chez son ami, il décide de faire évoluer sa technique... Après chaque essai négatif, il mettra de côté la clé testée et continuera d'essayer avec celles qui restent...Chaque essai durant 30 secondes, en combien de temps peut-il espérer ouvrir sa porte ?*

Exercice C13 *Dans un contrôle de qualité d'une variété de fil fabriqué dans une usine textile, on prélevé dans un écheveau un segment de longueur spécifiée que l'on soumet à une traction déterminée. Si le fil ne se rompt pas, on fat un nouvel essai. La probabilité que le fil ne se casse pas est de 0,8. Soit X le nombre d'essai effectués lors de ce contrôle.*

1. *Quelle est la loi de probabilité de X si on répète les essais jusqu'à rupture du fil ?*
2. *Que devient la loi de X si on décide d'effectuer au maximum quatre essai ?*
3. *Donner dans les deux cas, un ordre de grandeur du nombre total d'essais à effectuer jusqu'à rupture du fil si on procède à 100 contrôles.*

V) Exercices variés

Exercice C14 *Soit une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale telle que : $X \longrightarrow B(5;0{,}4)$. Calculer :*

1. $P(X = 3)$
2. $P(X \leq 3)$
3. $P(X \geq 3)$
4. $P(1 < X < 5)$
5. $CV(X)$

Exercice C15 *On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes ; la carte tirée est remise dans le jeu après chaque tirage. On répète 4 fois cette expérience aléatoire. Déterminer la probabilité d'obtenir 3 coeurs.*

Exercice C16 *Le dirigeant d'une très grande société constate que 70% des cadres embauchés sont encore dans l'entreprise 5 ans après. Il recrute 6 jeunes cadres. Parmi les propositions suivantes laquelle est inexacte ?*

- *La probabilité que 5 ans après les 6 nouveaux cadres soient encore présent dans l'entreprise est de 0,11765.*
- *La probabilité que 5 ans après les 6 nouveaux cadres aient quitté l'entreprise est de 0,00073.*
- *La probabilité que 5 ans après 4 d'entre eux aient quitté l'entreprise est de 0,05954.*
- *La probabilité que 5 ans après 3 d'entre eux au moins soient encore présents dans l'entreprise est de 0,07047.*
- *On peut espérer que 4,2 cadres soient encore présents dans l'entreprise 5 ans après, avec une dispersion de plus ou moins 1,12 cadres, soit un coefficient de volatilité de 26,73%.*

Exercice C17 *Soit une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $B(20;0{,}6)$.*

1. *Calculer $P(X = 10)$,$P(X = 12)$ et $P(X = 18)$.*
2. *Calculer $P(X \leq 12)$ et $P(X > 12)$.*
3. *Calculer les paramètres caractéristiques de la variable X.*

Exercice C18 *Une usine fabriquant des jouets emploie 20 personnes dans chacun de ses deux ateliers. Le taux d'absentéisme a été évalué, pour une journée à environ 5% . Le chef d'atelier affirme que le risque d'avoir, en une journée, plus de trois absents dans un seul atelier est de 2%. Qu'en est-il de cette affirmation ?*

Exercice C19 *Un joueur lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que les dés sont non-truqués et donc que pour chaque dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition. Voici les règles :*

- *Si les deux dés donnent le même numéro alors le joueur perd 10 points*
- *Si les deux dès donnent deux numéros de parités différentes (l'un est pair et l'autre impair) alors il perd 5 points.*
- *Dans les autres cas il gagne 15 points.*

1. *Le joueur effectue 10 parties de suites. Les résultats des parties sont indépendants les uns des autres. On appelle alors Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que le joueur gagne 15 points.*
   (a) *Expliquez pourquoi Y suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de Y ?*
   (b) *Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une fois 15 points ?*

(c) *Combien de fois le joueur peut espérer gagner 15 points ?*

2. *Le joueur joue n parties de suite.*
   (a) *Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une fois 15 points ?*
   (b) *A partir de quelle valeur de n sa probabilité de gagner au moins une fois 15 points est strictement supérieure à 0,9999 ?*

Exercice C20 *Une machine fabrique des tiges métalliques et environ 3% des pièces produites sont défectueuses. Ces tiges sont livrées par lots de 200 pièces. On s'intéresse alors au nombre de tiges défectueuses dans un lot.*

1. *Quelle probabilité a-t-on de n'avoir aucune tige défectueuse dans un lot ?*
2. *Quelle probabilité a-t-on de trouver au maximum 3 tiges défectueuses dans un lot ?*

Exercice C21 *Soit une variable aléatoire X qui suit une loi hypergéométrique telle que : $X \hookrightarrow H(100; 4; 0{,}8)$. Déterminer les probabilités suivantes :*

1. $P(X = 2)$
2. $P(X = 5)$
3. $P(X > 2)$
4. $P(X < 3)$
5. $P(1 \leq X \leq 5)$

Exercice C22 *On suppose que 5% des articles produits sont défectueux. Un client en achète 4.*

1. *Quelle est la probabilité que le client soit entièrement satisfait ?*
2. *Sachant que le client annulera sa commande i plus d'un article est défectueux, quelle est la probabilité que cela se produise ?*

Exercice C23 *Quatre personnes doivent aller participer à une foire pour présenter la production : elles sont choisies au hasard parmi les 100 salariés de l'usine (40 hommes et 60 femmes). Quelle est la probabilité que la délégation comporte 2 ou 3 femmes ?*

Exercice C24 *Soit une variable aléatoire X qui suit une loi de poisson telle que : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(5)$. Calculer les probabilités suivantes :*

1. $P(X = 3)$
2. $P(X \leq 3)$
3. $P(1 < X < 5)$
4. $CV(X)$

Exercice C25 *La vente d'appartements d'une agence immobilière d'Amiens suit une loi de poisson de paramètre 4. Déterminer si les propositions suivantes sont inexactes. Argumentez.*

1. *La probabilité de ne pas vendre d'appartements est de 0,01832*
2. *La probabilité de vendre 4 appartements est de 0,19537*
3. *La probabilité de vendre au moins un appartement est de 0,98168*
4. *La probabilité de vendre entre 2 et 6 appartements (sens large) est de 0,79775*

Exercice C26 *X est une variable aléatoire qui suit une loi de poisson et $P(X = 0) = 0.0045$. Que peut-on en déduire pour l'espérance de X ?*

Exercice C27 *X suit une loi de poisson de paramètre 7. Déterminer la plus petite valeur vérifiant $P(X \leq k) > 0{,}95$.*

Exercice C28 *Les service d'urgence d'un hôpital sont sollicités en moyenne 2 fois tous les quarts d'heure.*

1. *Calculer la probabilité qu'en une heure, il y ait 12 urgences.*
2. *Calculer la probabilité qu'en une heure il y ait plus de 12 urgences.*

Exercice C29 *Dans un port, un quai peut accueillir 6 bateaux venant de décharger leur cargaison. Le nombre de bateaux arrivant à l'entrée du port, en une journée, pour décharger, est une variable qui obéit à une loi de poisson de paramètre 5. Lorsqu'un bateau arrive, s'il trouve une place à quai, il décharge et repart le soir même. Sinon il attend le lendemain à l'entrée du port.*

1. *Calculer la probabilité d'avoir moins de 4 bateaux arrivant pour décharger, en une journée.*
2. *Si un matin, il n'y a aucun bateau, ni au quai ni en attente, calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun bateau en attente le soir.*
3. *Calculer la probabilité que, sur deux jours consécutifs, il y ait au total un seul bateau en attente.*
4. *Quel devait être le nombre de places à quai pour qu'il y ait environ 93% de chances de n'avoir aucun bateau en attente, sur une journée.*

Exercice C30 *Une usine fabriquant des jouets emploie 20 personnes dans chacun de ses deux ateliers. Le taux d'absentéisme a été évalué, pour une journée à environ 5% . Par ailleurs une vente directe des jouets fabriqués est proposé dans une petite boutique où, entre 14h et 16h il y a en moyenne 40 clients.*

1. *Que devient ce risque d'absentéisme pour l'ensemble de l'atelier d'avoir plus de 3 absents ?*
2. *Quelle est la probabilité qu'en un quart d'heure il y ait exactement 4 client ?*

Exercice C31 *Rick a dû se rendre dans un hôpital pour récupérer du matériel de soin. Pour sortir, il y a 12 portes. A chacune d'entre-elles il y a une probabilité de 0,34 de rencontrer un zombie.*

1. *Combien de zombie peut-il s'attendre à rencontrer ?*
2. *Quel est le nombre de portes d'affilés qu'il peut espérer franchir sans avoir à se battre ?*
3. *Sachant qu'il n'a plus que 7 cartouches pour son fusil à canon scié, et qu'il ne rate aucun tir, qu'elle est la probabilité qu'il doive finir son trajet à coups de crosse ?*
4. *Enfin, sachant qu'il vient de combattre un zombie la porte 7, quelle est sa probabilité de sortir sans encombre ?*

Chapitre D

La loi Normale

Sommaire

I) **Loi normale** **33**
1) Définition et cadre naturel d'apparition 33
2) Calculs d'une probabilité pour une loi normale 35
3) Propriétés de la loi normale 36
II) **Loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0;1)$ **37**
1) Lien avec la loi normale 39
III) **Approximation de la loi binômiale par une loi normale** **41**
IV) **Divers exercices** **42**

I) Loi normale

1) Définition et cadre naturel d'apparition

La loi **normale** (ou de Laplace-Gauss, appelée "normale" par Pearson en 1893) est la loi de certains phénomènes continus qui fluctuent autour d'une valeur moyenne μ de manière aléatoire, résultant d'un grand nombre de causes indépendantes dont les effets s'ajoutent sans que l'un d'eux soit dominant. Par exemple la taille d'un individu en cm, influencée par le sexe, la nourriture, l'environnement, l'hérédité, le lieu géographique ...

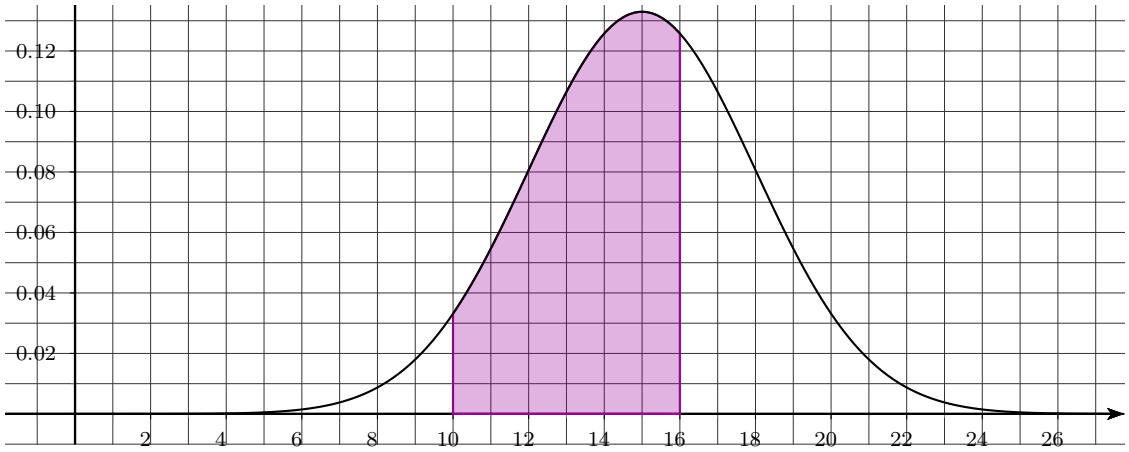
Loi normale:

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une **loi normale** de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ lorsque pour tous réels a et b,

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}x$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma)$.

Exercice D1 *Voici la courbe de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-15}{3}\right)^2}$.

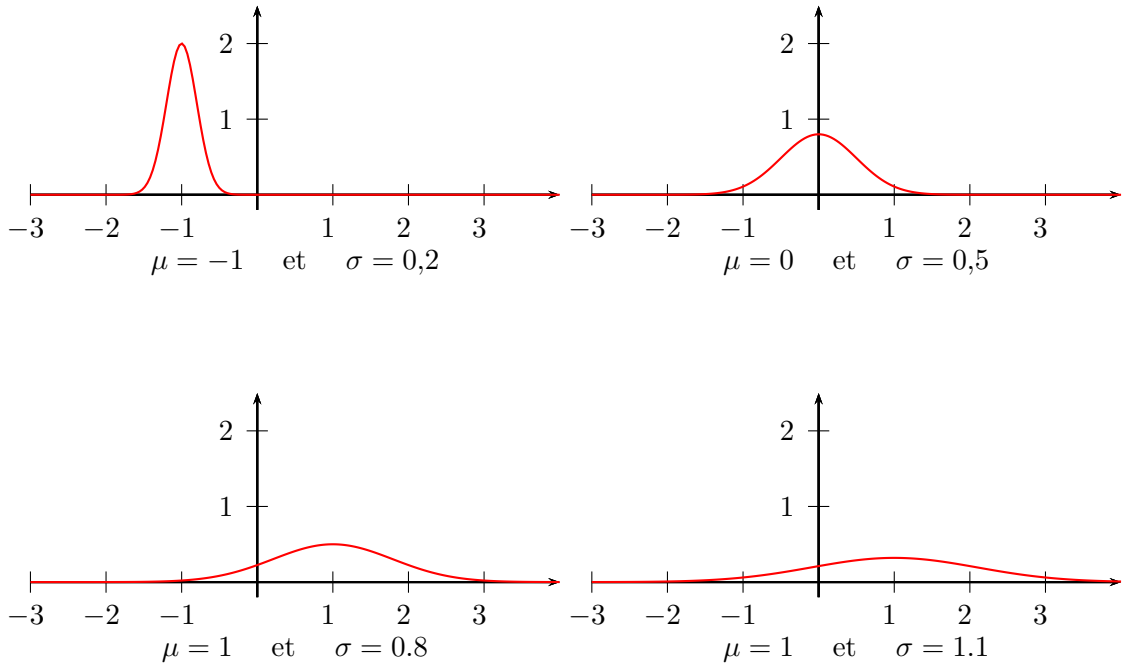


Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(15{,}3)$, estimer les probabilités suivantes :

1. $P(10 \leqslant X \leqslant 16)$
2. $P(X \leqslant 12)$
3. $P(X > 14)$

Dans la pratique, on nous informe que nous sommes en présence d'une loi normale dont on nous précise les paramètres μ et σ, et il nous faut alors calculer certaines probabilités...

Voici des exemples de courbes pour quelques valeurs de μ et σ pour comprendre le rôle des 2 paramètres :



Remarque:

Dans l'exemple précédent, on peut observer que :

- *la courbe admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = \mu$,*
- *le maximum de la courbe est atteint en μ, espérance de la variable X (ce maximum valant $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$),*
- *plus σ est grand, plus la courbe « s'étale » autour de la moyenne, en accord avec la signification de*

- *l'écart-type.*

Propriété D1:

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ alors

$$E(X) = \mu \quad et \quad \sigma(X) = \sigma.$$

Autrement dit, les paramètres d'une loi normale sont en fait son espérance mathématique et son écart-type.

Méthode pratique :

Certaines probabilités de références sont très utiles à connaître car très récurrentes dans les exercices et/ou les cas concrets qu'on sera amené à étudier.
Si $X \hookrightarrow N(\mu;\sigma)$:

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}68$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$

2) Calculs d'une probabilité pour une loi normale

Utilisation de la calculatrice

Méthode pratique :

*La séquence **2nde/distrib/2** permet sur les TI d'accéder à la fonction **normalFRép**, ou à l'assistant de cette fonction sur les calculatrices récentes.*

Pour $X \hookrightarrow N(160;40)$, on obtient par exemple : $P(120 \leq X \leq 180)$ = **normalFRép(120,180,160,40)** $\approx 0{,}532$.

*Les valeurs de la fonction de répartition $P(X \leq x)$ vont s'obtenir elles en remplaçant l'extrémité gauche de l'intervalle par la plus petite valeur négative programmée sur la calculatrice : $-\infty$ ou bien -10^{99}, suivant les modèles. C'est la valeur qui va s'afficher par défaut sur les calculatrices avec assistant. On peut aussi l'obtenir avec la séquence : **(-)/2nde ./(-)/99**.*

Pour $X \hookrightarrow N(160;40)$, on obtient par exemple : $P(X \leq 160)$ = **normalFRép(-1E99,160,160,40)** $\approx 0{,}5$.

Remarque:

***Attention :** la fonction **normalFdp** disponible sur toutes les calculatrices ne donne pas une probabilité, mais la valeur de la fonction de densité...mais ceci est une autre histoire!!!*

Utilisation du tableur

Méthode pratique :

La fonction LOI.NORMALE avec un $4^{ème}$ paramètre VRAI donne la fonction de répartition. Par exemple, si la moyenne et l'écart-type sont dans des cellules nommées respectivement m et sigma :

- $P(X \leq 160) =$ LOI.NORMALE(160 ;m ;sigma ;VRAI)
- $P(120 \leq X \leq 180) =$ LOI.NORMALE(180 ;m ;sigma ;VRAI)−LOI.NORMALE(120 ;m ;sigma ;VRAI)

Exercice D2 *On considère la variable aléatoire X associée à la production journalière, en tonnes, de framboises chez un maraîcher durant la saison. On admet que X suit la loi normale d'espérance 1,6 et d'écart-type 0,3.*

1. *Calculer $P(1 \leq X \leq 2)$. Interprétez ce résultat.*
2. *Il est nécessaire de faire appel à des cueilleurs supplémentaires lorsque la production dépasse 1,9 tonnes. Déterminer la probabilité que cela se produise.*
3. *Sachant que la production dépasse 1,6 tonnes, calculez la probabilité que l'on ait fait appel à des cueilleurs supplémentaires.*

Exercice D3 *Le propriétaire d'un magasin de jouets a relevé le montant des achats de ses clients au cours du mois de décembre. Il a constaté que les montants en euros, étaient distribués suivant la loi normale d'espérance 80 et d'écart-type 25.*

1. *(a) Calculer $P(50 \leq X \leq 140)$, arrondir le résultat au millième.*
   (b) A l'aide des résultats du cours, préciser la valeur de la probabilité $P(30 \leq X \leq 130)$. On pourra esquisser la courbe en cloche et visualiser cette probabilité.
2. *Á l'aide des résultats du cours, déterminer le nombre b tel que $P(X \in [80-b; 80+b]) =\approx 0{,}997$. Interpréter le résultat obtenu.*
3. *Á l'aide de la calculatrice, déterminer el nombre a, tel que $P(X \leq a) = 0{,}12$. Interpréter le résultat.*

3) Propriétés de la loi normale

Propriété D2:

1. *Si $X \hookrightarrow N(\mu; \sigma)$ et si $Y = aX + b$ (a et b deux réels), alors $Y \hookrightarrow N(a\mu + b; |a|\sigma)$. si le réel a est positif, on a plus simplement : $Y \hookrightarrow N(a\mu + b; a\sigma)$*
2. *Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires **indépendantes**, telles que $X_1 \hookrightarrow N(\mu_1; \sigma_1)$ et $X_2 \hookrightarrow N(\mu_2; \sigma_2)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow N\left(\mu_1 + \mu_2; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$*
3. *Si X_1,X_2,...,X_n sont n variables aléatoires **indépendantes deux à deux** suivant toutes la même loi normale de paramètres μ et σ et si $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ alors $X \hookrightarrow N\left(n\mu; \sqrt{n}\sigma\right)$*
4. *Avec les mêmes hypothèses, la moyenne $\bar{X} \hookrightarrow N\left(\mu; \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$*

Exercice D4 *On suppose que la variable aléatoire X égale au montant des achats d'un client venant dans un magasin suit une loi normale de paramètre 160 et 40.*

1. *Esquissez la représentation graphique de cette loi.*
2. *Á l'aide de la calculatrice, calculer $P(40 \leq X \leq 280)$ et interprétez ce résultat à l'aide de la représentation.*
3. *A partir de la figure, ou du cours, précisez les valeurs des probabilités $P(X \geq 160)$ et $P(X \leq 160)$.*

4. *Vérifier ces valeurs à l'aide de la calculatrice. Représenter par une aire la probabilité qu'un client achetant dans le magasin ait un montant d'achat compris entre 100€ et 200€ et calculer cette probabilité.*
5. *Déterminer $P(X \leq 100)$ et $P(X \geq 200)$.*
6. *Sans calcul, que peut-on dire de $P(X \leq 100) + P(100 \leq X \leq 200) + P(X \geq 200)$?*
7. *Calculer $P(120 \leq X \leq 200)$, et comparer avec une valeur usuelle.*
8. *Même question pour $P(80 \leq X \leq 240)$.*
9. *Représenter graphiquement $P(X \leq 200)$ et donner sa valeur avec la calculatrice.*
10. *Déterminer le montant d'achat M, tel que le client ait un montant d'achat inférieur à M soit égal à 0,95, et faire la représentation graphique.*
11. *Déterminer l'intervalle centré sur la moyenne 160, tel que la probabilité qu'un client venant acheter ait un montant d'achat dans cet intervalle, soit égale à 0,90 ; puis représenter cet intervalle.*
12. *Deux clients A et B viennent acheter dans le magasin. On suppose qu'ils font leurs achats en toute indépendance ; quelle est la probabilité que le montant total de leurs achats soit compris entre 200€ et 400€ ?*
13. *81 clients effectuent des achats au cours d'une journée. Quelle est la probabilité que le chiffre d'affaire du magasin soit supérieur à 12 000€ ce jour là ?*
14. *Même question pour 13 000€ ?*

II) Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$

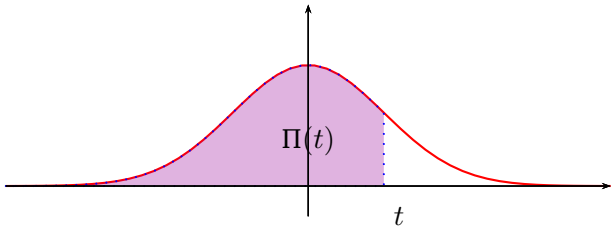
Variable aléatoire centrée réduite:

La variable aléatoire T qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ est dite **variable aléatoire centrée réduite**. Dans ce cas, pour tous réels a et b,

$$P(a \leqslant T \leqslant b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x.$$

Notation : On note Π la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $N(0;1)$. On a donc

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}, P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x.$$



Méthode pratique :

Des formulaires donnent des valeurs de $P(T \leq t)$ pour une variable aléatoire continue suivant une loi normale centrée réduite et pour des valeurs positives de t. En voici un extrait pour comprendre la méthode de lecture :

t	0,05	0,06	0,07
1,1	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9115	0,9131	0,9147

***Calcul de** $P(T \leq 1{,}36)$ **:** Le nombre situé à l'intersection de la colonne 0,06 et de la ligne 1,3 est la valeur de la fonction de répartition de T pour $t = 1{,}3 + 0{,}06 = 1{,}36$. Ainsi, $P(T \leq 1{,}36) = 0{,}9131$.*

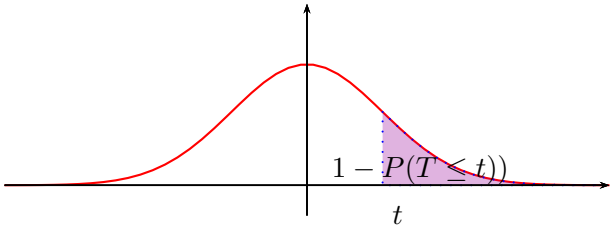
Exercice D5 *Soit X, une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.*

1. *Déterminer $P(X \leqslant 1{,}54)$.*
2. *Même question pour $P(X < 1{,}96)$.*

Propriété D3:
Soit T la variable aléatoire centrée et réduite, $P(T \geq t) = 1 - P(T \leq t)$.

Interprétation graphique :

$$\begin{aligned} P(T \geq t) &= 1 - P(T < t) \\ &= 1 - P(T \leq t). \end{aligned}$$



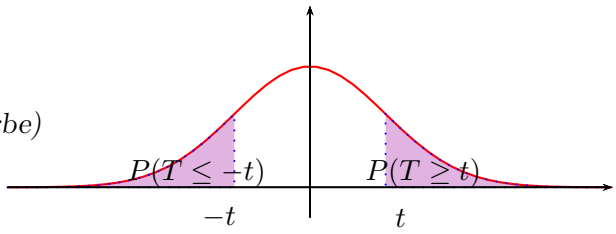
Exercice D6 *Soit X, une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.*

1. *Déterminer $P(X > 2{,}85)$*
2. *Même question pour $P(X \geqslant 1{,}96)$.*

Propriété D4:
Soit T la variable aléatoire centrée et réduite, si t est positif : $P(T \leq -t) = 1 - P(T \leq t)$.

Interprétation graphique :

$$\begin{aligned} P(T \leq -t) &= P(T \geq t) \quad \textit{(par symétrie de la courbe)} \\ &= 1 - P(T < t). \end{aligned}$$



Exercice D7 *Soit X, une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.*

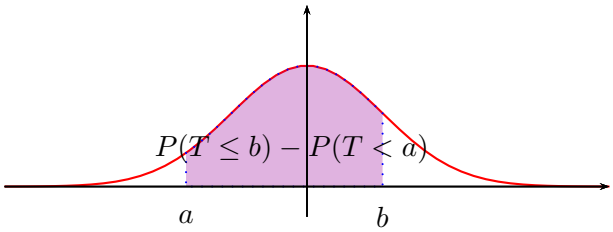
1. *Déterminer $P(X < -2{,}15)$*
2. *Même question pour $P(X \leqslant -1{,}78)$.*

Propriété D5:
Soit T la variable aléatoire centrée et réduite, pour tous $a; b \in \mathbb{R}$, avec $a \leq b$:

$$P(a \leq T \leq b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$$

Interprétation graphique :

$$\begin{aligned} P(a \leq T \leq b) &= P(T \leq b) - P(T < a) \\ &= P(T \leq b) - P(T \leq a). \end{aligned}$$



Exercice D8 *Soit X, une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.*

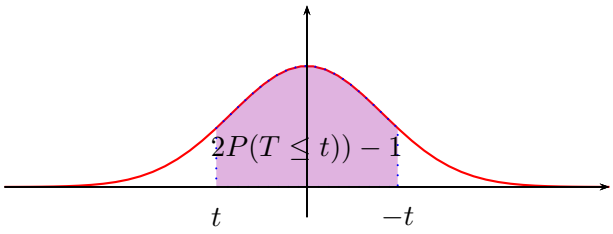
1. *Déterminer $P(1{,}38 < X \leqslant 2{,}32)$*
2. *Même question pour $P(-1 \leqslant X \leqslant 2{,}1)$.*

Propriété D6:

Soit T la variable aléatoire centrée et réduite, pour tout $t \geq 0$, $P(-t \leq T \leq t) = 2P(T \leq t) - 1$.

Interprétation graphique :

$$\begin{aligned} P(-t \leq T \leq t) &= P(T \leq t) - P(T \leq -t) \\ &= P(T \leq t) - [1 - P(T \leq t)] \\ &= 2P(T \leq t)) - 1. \end{aligned}$$



Exercice D9 *Soit X, une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.*

1. *Déterminer $P(-2{,}15 \leqslant X \leqslant 2{,}15)$*
2. *Même question pour $P(-1{,}58 \leqslant X \leqslant 1{,}58)$.*

Exercice D10 *Soit T, une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Calculer les probabilités suivantes :*

1. $P(T \leqslant 1{,}35)$
2. $P(T > 1{,}78)$
3. $P(T < -0{,}76)$
4. $P(T \geqslant -2{,}13)$
5. $P(-1{,}5 \leqslant T \leqslant 1)$
6. $P(-1{,}8 \leqslant T \leqslant 1{,}8)$

1) Lien avec la loi normale

Propriété D7:

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$, alors la variable aléatoire $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

Ce résultat est très important, puisqu'alors il nous suffit d'étudier la loi normale centrée réduite puis de procéder à un changement de variable pour obtenir n'importe quelle loi normale !

Exemple:

On considère une variable X qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 12$ et $\sigma = 3$ et on veut calculer $P(X < 16)$.

- *On pose $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-12}{3}$. On sait alors que T suit une loi $\mathcal{N}(0;1)$.*
- *$X < 16 \iff T < \dfrac{16-12}{3} \iff T < \dfrac{4}{3}$. Donc $P(X < 16) = P(T < 1{,}33)$.*
- *On lit sur la table $P(T < 1{,}33) = 0{,}9082$ donc : $P(X < 16) = 0{,}9082$.*

Exercice D11 *Soit X, une variable aléatoire suivant une normale $\mathcal{N}(13;4)$, calculer les probabilités :*

1. $P(X \leqslant 15)$
2. $P(X < 10)$
3. $P(X > 11)$
4. $P(X \geqslant 17)$
5. $P(11 \leqslant X \leqslant 15)$
6. $P(X = 13)$

Exercice D12 *L'éclairage d'une commune est assuré par 2000 lampes dont la durée de vie moyenne est 1000 heures. Les tests réalisés pour obtenir cette "espérance de vie" ont montré que la durée de vie des lampes suivait une loi normale d'écart type estimé à 200 heures.*

1. *Déterminer le nombre de lampes hors d'usage envisageable au bout de 700 heures.*
2. *Le nombre de lampes à remplacer entre la $900^{ème}$ et la $1300^{ème}$ heure.*

Exercice D13 *Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi normale de paramètres m et σ,*

1. *Montrer que $P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma) \approx 0{,}68$.*
2. *Montrer que $P(m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma) \approx 0{,}95$.*

Exercice D14 *Mr Hicks doit prendre un TGV à Paris Gare de Lyon à 9 heures du matin. Il habite à 35 km de la gare, et utilise son véhicule pour se rendre de son domicile à la gare/ Le temps de trajet, en minutes, entre le domicile et le parking de la gare est une variable aléatoire X_v, de loi normale $N(\mu;\sigma)$, et le temps X_p pour se garer au parking est une variable aléatoire de loi normale $N(6;2)$. Il faut 8 minutes à pied entre le parking et la place assise dans le TGV. Les calculs de durée seront arrondis à la minute prés.*

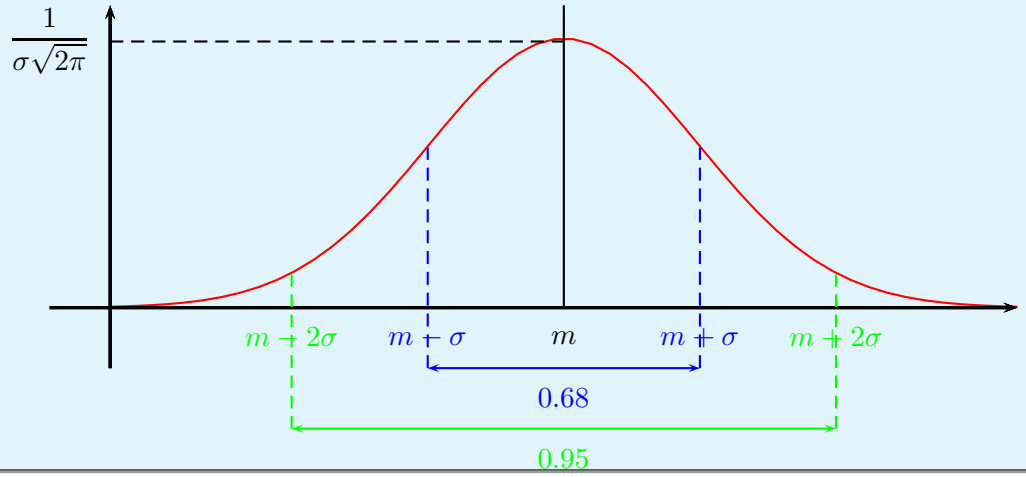
1. *Déterminer μ et σ, sachant que $P(X_v \leq 30) \approx 0{,}1586$ et $P(X_v \geq 35) \approx 0{,}6915$.*
2. *Quelle est la probabilité que le temps de trajet X_v soit inférieur ou égal à 60 min ?*

On note X le temps total entre le moment ou Mr Hicks quitte son domicile et où il atteint sa place dans le TGV.

3. *Exprimer X en fonction de X_v et X_p et préciser quelle est la loi de X.*
4. *Si Mr Hicks quitte son domicile à 8 heures précises, quelle est la probabilité qu'il soit installé à sa place avant le départ du TGV ?*
5. *A quelle heure soit-il quitter son domicile pour que la probabilité d'être installé dans le TGV avant son départ soit au moins égale à 0,95 ?*

Interprétation graphique :

Interprétation graphique :



III) Approximation de la loi binômiale par une loi normale

Dans certaines conditions, une loi binomiale peut être approximée par une loi normale de manière à simplifier les calculs :

Propriété D8:

Si X suit une loi binomiale de paramètre $\mathscr{B}(n,p)$. Alors lorsque

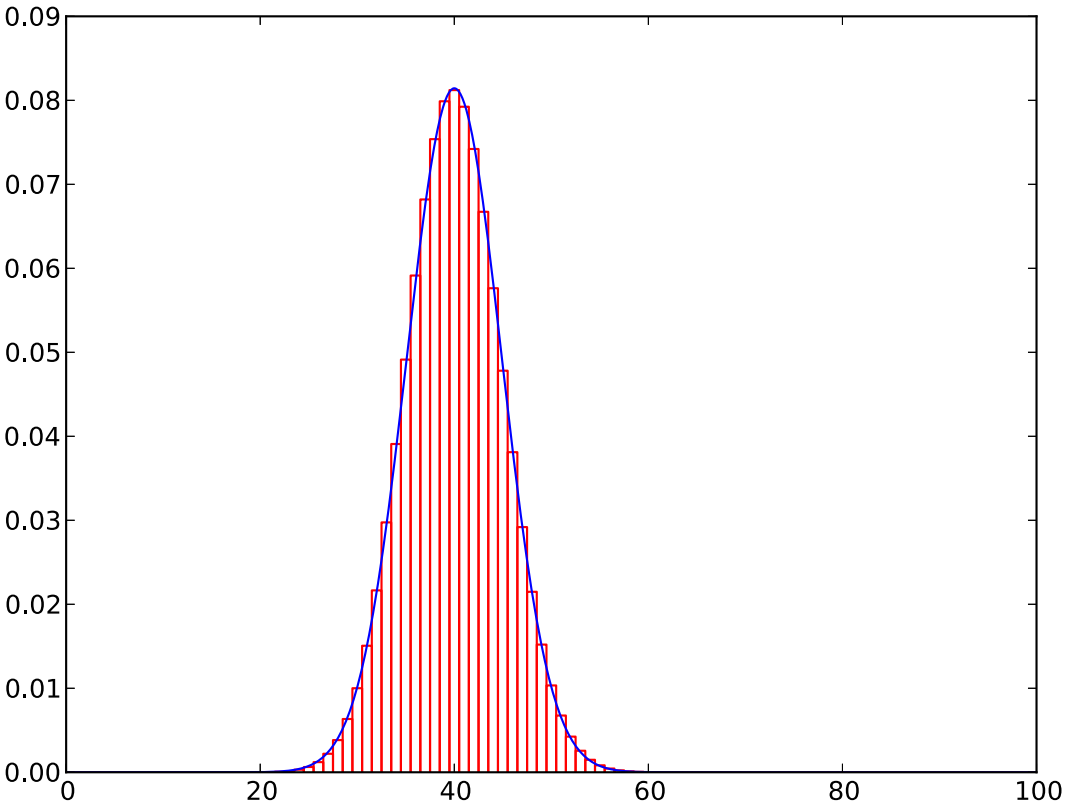
$$n \geqslant 30, np \geqslant 5 \text{ et } n(1-p) \geqslant 5 :$$

On peut approximer la loi de X par une loi normale $\mathscr{N}(\mu,\sigma)$ avec :

$$\mu = np \text{ et } \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Remarque:

Comme une probabilité ponctuelle pour une loi continue est systématiquement nulle,pour approximer $P(X = k)$ quand X suit une loi binomiale, on calculera : $P(k-0{,}5 \leq X \leq k+0{,}5)$ avec la loi normale correspondante.



Approximation d'un loi binomiale $\mathscr{B}(100;0{,}4)$ par une loi normale $\mathscr{N}(40;2\sqrt{6})$

IV) Divers exercices

Exercice D15 ***Calcul de probabilités***

1. *Calculer* $P(X \leq 100)$ *et* $P(X \geq 200)$ *sachant que* X *suit une loi normale de moyenne* 150 *et d'écart-type* 50.
2. *Calculer* $P(X \leq 400)$ *et* $P(X \geq 700)$ *sachant que* X *suit une loi normale de moyenne* 500 *et d'écart-type* 80.
3. *Calculer* $P(60 \leq X \leq 180)$ *et* $P(100 \leq X \leq 2000)$ *et* $P(0 \leq X \leq 120)$ *sachant que* X *suit une loi normale de moyenne* 120 *et d'écart-type* 60.

Exercice D16 *On surveille sur une pièce deux cotes* A *et* B*. Pour qu'une pièce soit acceptable, il faut que :* $A = 25mm \pm 0{,}05mm$ *et* $B = 30mm \pm 0{,}01mm$*. Les cotes* A *et* B *sont indépendantes et suivent respectivement des lois normales, de paramètres* $m = 25{,}003$ *et* $\sigma = 0{,}05$ *pour* A *et* $m' = 30{,}001$ *et* $\sigma' = 0{,}04$ *pour* B*. On prélève au hasard une pièce. Déterminer la probabilité pour que :*

1. *La cote* A *de cette pièce soit acceptable*
2. *La cote* B *de cette pièce soit acceptable*
3. *La pièce soit acceptée.*
4. *En déduire le pourcentage de pièces mises au rebut.*

Exercice D17 *Une machine usine des pièces dont la longueur* X *suit une loi normale de moyenne* $m = 54mm$ *et d'écart type* $\sigma = 0{,}2mm$*. Une pièce est considérée comme non conforme si* $X < 53{,}6$ *ou si* $X > 54{,}3$*.*

1. *Calculer la probabilité pour qu'une pièce soit non conforme.*

2. *Pour vérifier que la machine ne s'est pas déréglée, on détermine des cotes d'alerte $m-h$ et $m+h$ telles que $P(m-h<X<m+h)=0{,}95$. Calculer ces cotes d'alerte.*

Exercice D18 *Une série de tests sur la durée de vie d'un composant électronique a donné les résultats suivants :*

X	$[0;0{,}5[$	$[0{,}5;1[$	$[1;1{,}5[$	$[1{,}5;2[$	$[2;2{,}5[$	$[2{,}5;3[$	$[3;3{,}5[$	$[3{,}5;4[$	$[4;4{,}5[$
n	1	4	8	14	24	38	58	86	70

X	$[4{,}5;5[$	$[5;5{,}5[$	$[5{,}5;6[$	$[6;6{,}5[$	$[6{,}5;7[$	$[7;7{,}5[$	$[7{,}5;8[$	$[8;8{,}5[$	$[8{,}5;9[$
n	55	43	33	25	19	15	12	10	5

1. *Calculer la moyenne m et l'écart type σ de cette série statistique.*
2. *On admet que la durée de vie d'un composant est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètre m et σ.*
   (a) *Calculer la probabilité pour qu'un composant dure au moins 3 ans.*
   (b) *Calculer la durée de vie minimale qu'un composant peut atteindre avec une probabilité de 0,95.*

Exercice D19 *On admet que la durée de vie X mesurée en heures, d'une ampoule électrique d'un certain type est une variable aléatoire qui suit une loi normale. Déterminer ses paramètres, sachant que la probabilité que X soit supérieure à 1 100 est 0,9332 et que la probabilité que X soit inférieure à 1600 est 0,8413.*

Exercice D20 ***L'entreprise de transport***
Une entreprise de transport a un parc total de 150 camions. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque camion choisi au hasard dans le parc, associe la distance en km parcourue en une journée. Une étud statistique permet d'admettre que cette variable aléatoire X suit uen loi normale de moyenne 120 et d'écart-type 14. Déterminer :

1. *à 10^{-4} près la probabilité qu'un camion parcourt en un jour donné une distance comprise entre 110 et 130 km.*
2. *la probabilité que la distance parcourue par un camion soit supérieure à 150 km.*

Exercice D21 *Un groupe industriel produit des petits moteurs destinés au montage des jouets. La variable aléatoire X qui, à chaque moteur tiré au hasard dans la production, associe sa durée de vie exprimée en heures suit la loi normale de moyenne 400 et d'écart type 40.*

1. *Un moteur est déclaré non commercialisable si sa durée de vie est inférieure à 318 heures. Calculer la probabilité p qu'un moteur prélevé au hasard dans la population ne soit pas commercialisable.*
2. *Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 moteurs, associe le nombre de moteurs non commercialisables. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler le prélèvement de 50 moteurs à un prélèvement aléatoire avec remise.*
   (a) *Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier la réponse et donner ses paramètres.*
   (b) *Calculer la probabilité de l'événement : "il y a exactement deux moteurs non commercialisables".*
   (c) *On admet que la loi précédente peut être approchée par une loi de Poisson. Préciser son paramètre et calculer la probabilité de l'événement : "il y a plus de trois moteurs non commercialisables".*

Exercice D22 *On note X la variable aléatoire qui, à chaque homme prélevé au hasard, associe sa taille en centimètres. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 178 et d'écart-type 10.*

1. *Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :*
   (a) *A : « Un homme prélevé au hasard a une taille supérieure strictement à 180 ».*
   (b) *B : « Un homme prélevé au hasard a une taille inférieure ou égale à 150 ».*
   (c) *C : « Un homme prélevé au hasard a une taille comprise entre 160 et 185 inclus ».*
2. (a) *Déterminer le réel a tel que $P(X\geq a)=0{,}80$. Interpréter ce résultat.*
   (b) *Déterminer le réel b tel que $P(176-b\leq X\leq 180+b)=0{,}68$. Interpréter ce résultat.*

(c) *Déterminer une estimation de la taille en dessous de laquelle se situe la moitié de la population.*

Exercice D23 ***Le supermarché***
Les achats effectués par les clients d'un supermarché suivent uen loi normale de moyenne $\mu = 300$ *et d'écart-type* $\sigma = 100$.

1. *Calculer les probabilités des événements suivants :*
   (a) E_1 *:« l'achat effectué est d'un montant supérieur à 530 »*
   (b) E_2 *:« l'achat effectué est d'un montant compris entre 250 et 400 »*
2. *Indiquer la fourchette de montants d'achats, centrée sur la moyenne et couvrant 90% des dépenses.*

Exercice D24 ***Temps d'attente***
Une personne a un rendez-vous à 10h30. Elle doit auparavant se faire examiner par son médecin puis passer acheter ses médicaments dans une pharmacie. On suppose que le temps passé chez le médecin (attente et consultation) est une variable aléatoire normale de moyenne 40mn et d'écart-type 15mn ; que le temps passé dans la pharmacie est aussi une variable aléatoire normale de moyenne 12mn et d'écart-type 3 mn, indépendante de la précédente.
Quelle est la probabilité que la personne arrive à l'heure à son rendez-vous en supposant à la fois :

- *qu'elle était chez son médecin à 9h00*
- *et qu'il lui faut exactement 5 mn pour se rendre du cabinet médical à la pharmacie et 15mn pour se rendre de la pharmacie à son lieu de rendez-vous.*

Exercice D25 ***Durée de réalisation de projets***
Pour la réalisation d'un premier projet, une société doit effectuer successivement deux tâches A et B. Les durées de ces taches sont incertaines. On désigne par X_A *(respectivement* X_B*) la variable aléatoire égale à la durée en jours de la tâche A (respectivement de la tâche B).*
On suppose que les lois de ces deux variables aléatoires sont des lois normales : $X_A \hookrightarrow N(22; 3)$ *et* $X_B \hookrightarrow N(25; 4)$ *et on suppose de plus que ces deux variables sont indépendantes.*

1. *Déterminer la probabilité de réaliser une tâche de type A en plus de 30 jours.*
2. *Déterminer la probabilité qu'une tâche de type B soit réalisée entre 20 et 30 jours.*
3. *On désigne par X la variable aléatoire égale à la durée du premier projet. Quelle est la loi de X ? Déterminer les paramètres de cette loi.*
4. *En déduire la probabilité de réaliser ce premier projet en moins de 50 jours.*

Un deuxième projet nécessite la répétition successive de la tâche A en 16 lieux différents. On suppose que les durées de réalisation de cette tâche A dans ces 16 lieux sont indépendants deux à deux. On suppose aussi que ces deux journées sont nécessaires à la société pour passer d'un lieu où vient de s'achever la tâche A, vers le lieu suivant. On note Y la variable aléatoire égale au temps total de réalisation de ce deuxième projet (succession de 16 fois la tâche A, plus les journées consacrées à changer de lieu).

5. *Préciser quelle est la loi de Y.*
6. *En déduire la probabilité que ce deuxième projet soit réalisé en moins de 400 jours.*

Exercice D26 ***Seuil de rentabilité***
L'entreprise MARLAUD et Cie fabrique et vend des meubles métalliques de rangement, tous constitués par l'assemblage d'un même caisson de base.
Le service commercial considère que la quantité annuelle X de caissons qui pourra être vendue au prix de vente unitaire de 300 € suit une loi normale de moyenne 24 000 unités et d'écart-type 8 000.
le coût unitaire variable (fabrication et distribution) est de 240 € et les charges de structures annuelles relatives à cette ligne de produit sont de 270 000 €.

1. *Déterminer la quantité minimale à produire et vendre pour que cette production soit rentable.*
2. *Déterminer la probabilité de dépasser cette quantité minimale.*

3. *On note Y la variable aléatoire égale à la marge totale annuelle sur la vente des caissons, exprimée en k€. Écrire Y en fonction de X et préciser quelle est la loi de Y, et ses paramètres.*
4. *Quelle est la probabilité que la marge totale annuelle soit supérieure à 1 million d'euros ?*

Exercice D27 ***Loi normale d'écart-type inconnu***
X est une variable aléatoire de loi normale $N(200;\sigma)$, d'écart-type inconnu σ.

1. *Sachant que $P(X \geq 100) = 0{,}9088$, déterminer l'écart-type σ, à 10^{-3} près, puis arrondi à l'entier.*
2. *Avec cette valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche, vérifier le résultat en calculant $P(X \geq 100)$.*

Exercice D28 ***Loi normale de moyenne inconnu***
X est une variable aléatoire de loi normale $N(\mu;100)$, de moyenne inconnue μ.

Sachant que $P(X \leq 497) = 0{,}1515$, déterminer la moyenne μ, à 10^{-3} près, puis arrondie à l'entier.

Avec cette valeur de μ arrondie à l'entier le plus proche, vérifiez le résultat en calculant $P(X \leq 497$.

Exercice D29 ***Loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus***
$X \hookrightarrow N(\mu;\sigma)$. Déterminer les paramètres de cette loi, connaissant les deux probabilités : $P(X < 37) = 0{,}9332$ et $P(X < 23{,}5) = 0{,}2266$.

Exercice D30 ***Le chiffre d'affaires de la société DISTRIB***
La société DISTRIB est une chaine de marché alimentaires. On s'intéresse dans cet exercice aux chiffres d'affaires réalisés dans deux supermarchés de cette chaîne, l'un à Amiens et l'autre à ABBEVILLE. Ces deux villes étant suffisamment distantes, on pourra considérer que les chiffres d'affaires réalisés dans chacune d'elles sont indépendantes l'un de l'autre.
On désigne par X le chiffre d'affaires journalier réalisé dans le supermarché d'Amiens, ***en milliers d'€****. La loi de X peut être considérée comme une loi normale, de moyenne et d'écart-type inconnus, mais on dispose des renseignements suivants : $P(X < 500) = P(X \geq 1100) \approx 0{,}0668$.*

1. *A l'aide d'une figure, et en utilisant la symétrie de la loi normale, déterminer la moyenne de la loi de X.*
2. *En exprimant $P(X \leq 1100)$ à l'aide de la variable Z de la loi normale centrée réduite, déterminer l'écart-type de X.*

Dans la suite de l'exercice, on admettra que $X \hookrightarrow N(800;200)$.

3. *A l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité que le chiffre d'affaires X dans le supermarché d'Amiens soit compris entre 700 et 1000 milliers d'euros.*
4. *Faire une représentation graphique de cette probabilité.*
5. *Déterminer le chiffre d'affaires CA_0 pour lequel $P(X \geq CA_0) = 0{,}9$.*
6. *Déterminer l'intervalle centré sur 800 auquel X appartient avec une probabilité de 80%. Utiliser une figure pour faire le raisonnement permettant le calcul.*
7. *Préciser quelle est la loi de la variable $W=X+Y$.*
8. *Quelle est la probabilité que le chiffre d'affaires sur les deux supermarchés soit inférieur à 1 300 000 € ?*

On note maintenant W_M le chiffre d'affaires réalisés au cours d'un mois de 30 jours par la société DISTRIB dans ses 2 supermarchés d'Amiens et d'Abbeville.

9. *Préciser quelle est la loi de W_M.*
10. *Quelle est la probabilité que ce chiffre d'affaires mensuel dépasse 50 millions d'euros ?*