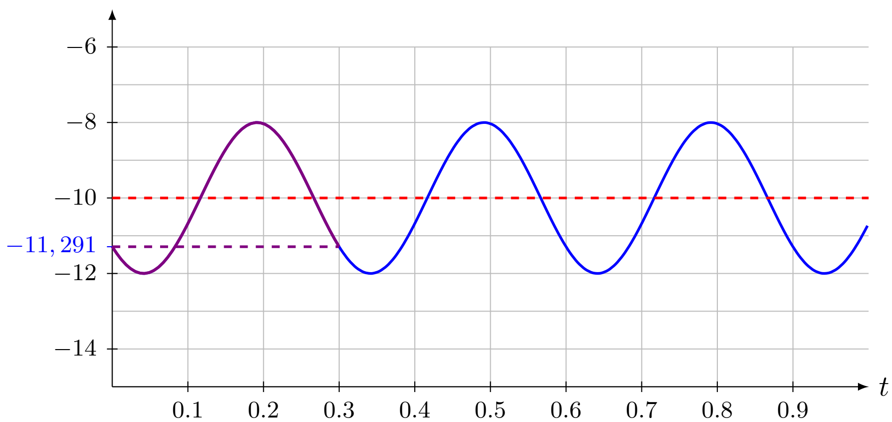
2025 - 2026

Ondes.

Fiche n° 1

I. Rappels de semestre 1.

On a représenter la sinusoïde définie par $f(t) = \lambda + A\sin(\omega t + \varphi)$



☞ sa période est $\boldsymbol{T = 0,3}$

☞ son amplitude est $\boldsymbol{A = 2}$

☞ sa fréquence est $\boldsymbol{f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.3} \simeq 3,33}$ **Hz**

☞ sa pulsation est $\boldsymbol{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \simeq 20,94}$**rad/s**

☞ Avec ses paramètres, expression de f est $f(t) = \boldsymbol{-10 + 2\sin(20,94t + \varphi)}$

☞ Calcule son déphasage φ : $\boldsymbol{f(0) = -11,291 = -10 + 2\sin(\varphi)}$

Donc, $\boldsymbol{\sin(\varphi) = \frac{-11,291 - (-10)}{2} = \frac{-1,291}{2}}$

Et, $\boldsymbol{\varphi = \arcsin\left(\frac{-1,291}{2}\right) \simeq -0,70}$ **ou** $\boldsymbol{\varphi = \pi - \arcsin\left(\frac{-1,291}{2}\right) \simeq 3,84}$

La fonction étant décroissante au voisinage de 0 le déphasage est $\boldsymbol{\varphi = 3,84}$ **rad.**

Mais, $\boldsymbol{3,843 > \pi}$ **donc ce n'est pas une mesure principale :** $\boldsymbol{\varphi \simeq 3,84 - 2\pi \simeq -2,44}$

☞ L'expression de f est $f(t) = \boldsymbol{-10 + 2\sin(20,94t - 2,44)}$

II. Concept d'ondes.

Une variation de grandeur physique qui se propage dans un espace suite à une perturbation constitue une onde. La grandeur physique qui varie est appelée grandeur caractéristique de cette onde. Pour le son, cette grandeur est la **pression**, et pour un champ électromagnétique, les deux grandeurs qui varient sont le champ électrique et le champ magnétique.

1. Perte d'énergie : amortissement.

C'est la perte d'énergie due à l'interaction de l'onde avec **le milieu de propagation** est appelé l'**amortissement** ou l'**atténuation.**

- **Cause :** Le milieu (l'air, l'eau, un câble, etc.) convertit une partie de l'énergie de l'onde en une autre forme, souvent de la chaleur.

- **Conséquence :** L'amplitude de l'onde diminue souvent de manière **exponentielle** avec la distance dans un milieu homogène qui la sépare de sa source.

2. La divergence Géométrique.

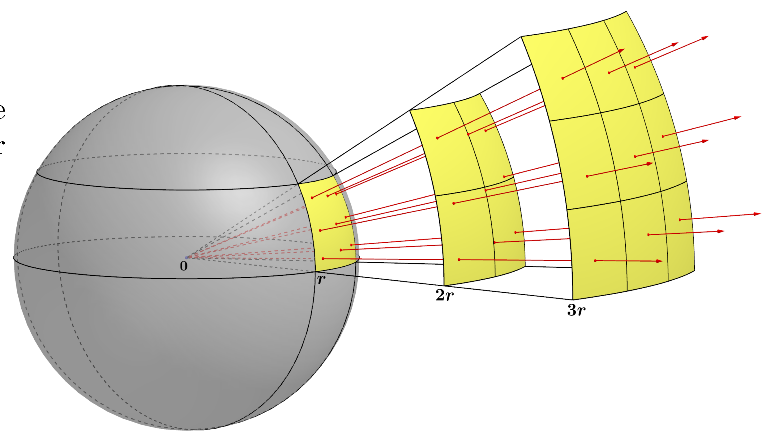
C'est la perte d'**intensité surfacique** due à la répartition de l'énergie sur un front d'onde de plus en plus grand, même dans un milieu non dissipatif. On parle de **dispersion** énergétique. Cette perte n'est pas due à une absorption de l'énergie par le milieu dans lequel l'onde se propage mais à la forme de son front d'onde.

- **Ondes Sphériques (Source ponctuelle) :**

L'énergie totale (E_{tot}) se répartit sur la surface de la sphère ($4\pi r^2$). L'intensité I (puissance par unité de surface) diminue en $1/r^2$:

$$I \propto \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad A \propto \frac{1}{r}$$

où A est l'amplitude de l'onde et r la distance.



Démonstration

L'intensité I d'une onde est définie comme l'énergie par unité de temps et par unité de surface (soit la puissance par unité de surface) : $I = \dfrac{P}{S}$. Donc, $S = \boldsymbol{4\pi r^2}$ donc $I = \dfrac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{4\pi r^2}} \propto \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r^2}}$.

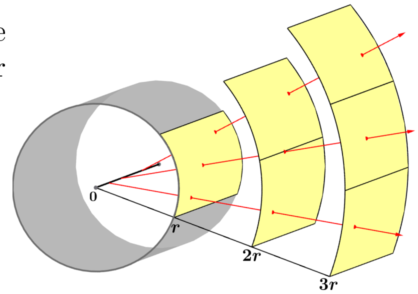
L'intensité I d'une onde est proportionnelle au carré de son amplitude donc $A \propto \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}$

- **Ondes cylindriques :**

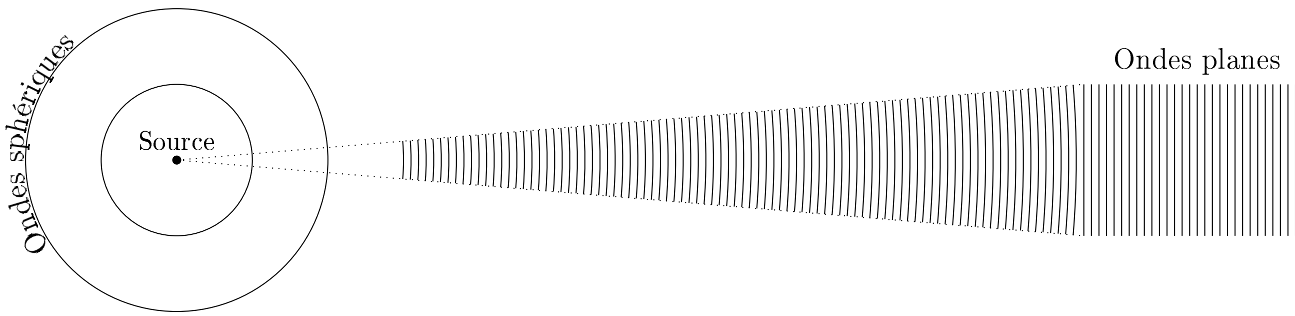
L'énergie totale (E_{tot}) se répartit sur la surface de la sphère ($4\pi r^2$). L'intensité I (puissance par unité de surface) diminue en $1/r$:

$$I \propto \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

où A est l'amplitude de l'onde et r la distance.



- **Ondes Planes (Idéales) :** Elles ne subissent **aucune divergence géométrique**. Si le milieu n'amortit pas, l'amplitude reste **constante**. C'est le seul cas idéalisé d'une propagation sans affaiblissement (dans un milieu sans pertes).



III. Onde progressive non-amortie et non-dispersive.

Définition:

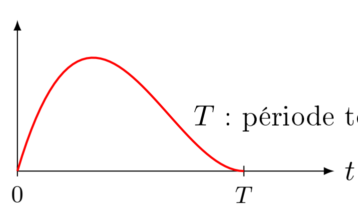
Une onde progressive est le phénomène de propagation d'une perturbation (ou déformation) dans un milieu, avec transport d'énergie mais sans transport global de matière.

Caractéristiques :

- **Propagation de la perturbation :** La déformation se déplace dans l'espace et le temps.
- **Transport d'énergie :** L'onde transmet de l'énergie d'un point à un autre.
- **Absence de transport de matière :** Le milieu lui-même (les molécules, les particules) ne se déplace pas globalement avec l'onde. Chaque élément du milieu oscille localement autour de sa position d'équilibre. Par exemple, une vague fait monter et descendre un bouchon, mais ne le transporte pas durablement vers le rivage.
- **Célérité (c) :** C'est la vitesse à laquelle la perturbation se propage dans le milieu. Elle dépend des propriétés du milieu (densité, température, tension, etc.).

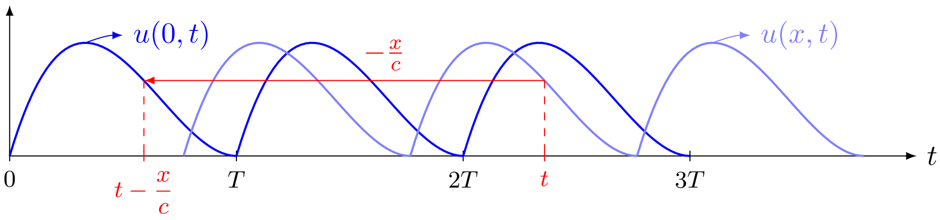
Une onde progressive $u(x,t)$ représente la caractéristique physique qui ondule à l'instant t à la position x. On suppose que cette onde se déplace dans le sens des x croissants.

La forme **temporelle** de l'onde est définie par une fonction f :



Ce qui signifie que sur $[0,T]$, $u(0,t) = \boldsymbol{f(t)}$. Cette forme va se répéter dans

- le **temps** :



L'onde se déplace à la vitesse $\boldsymbol{c}$, donc pour se déplacer de 0 à x, elle met $\boldsymbol{\frac{x}{c}}$ secondes. A un instant t donné, la valeur de l'onde $u(x,t)$ en un point $x=a$ est la même que la valeur de l'onde au point $x=0$ à l'instant $t-\dfrac{x}{c}$. Autrement dit, l'onde au point x à l'instant t est la même que l'onde qui était au point $x=0$ à l'instant $t-\dfrac{x}{c}$. Elle est décalée dans le temps de $\dfrac{x}{c}$. Il s'en suit que : $\boldsymbol{u(x,t)=u\left(0,t-\frac{x}{c}\right)=f\left(t-\frac{x}{c}\right)}$

Propriété

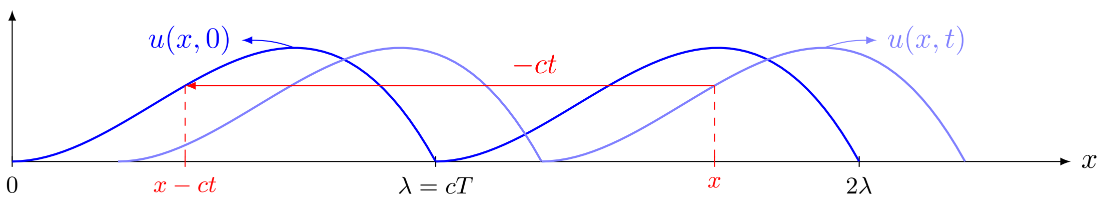
La forme générale d'une onde progressive, **non-amortie** et **non-dispersive** est

☞ $u(x,t)=f\left(t-\dfrac{x}{c}\right)$ lorsqu'elle se propage suivant l'axe des x croissants.

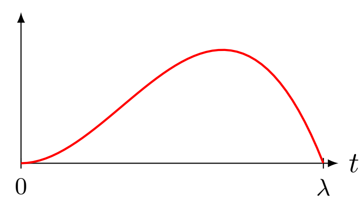
☞ $u(x,t)=f\left(t+\dfrac{x}{c}\right)$ lorsqu'elle se propage suivant l'axe des x décroissants.

Le temps de propagation $\dfrac{x}{c}$ est appelé le **retard temporel**

- l'**espace** :



La forme **spatiale** de l'onde est définie par une fonction g :



Remarque

- $g(x)=u(x,0)=\boldsymbol{f\left(\dfrac{-x}{c}\right)}$
- $g(x-ct)=\boldsymbol{f\left(\dfrac{-(x-ct)}{c}\right)=f\left(t-\dfrac{x}{c}\right)}$

Définition:

La période spatiale, notée $\boldsymbol{\lambda}$, est appelée la **longueur d'onde.**

Propriété

La forme générale d'une onde progressive, **non-amortie** et **non-dispersive** est

- ☞ $u(x,t) = \boldsymbol{g(x - ct)}$ lorsqu'elle se propage suivant l'axe des x croissants.
- ☞ $u(x,t) = \boldsymbol{g(x + ct)}$ lorsqu'elle se propage suivant l'axe des x décroissants.

1. Ondes harmoniques progressives non atténuées.

Considérons la forme d'onde $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ alors :

☞ $$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \boldsymbol{A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right] = A\sin\left[\omega t - \frac{\omega x}{c} + \varphi\right]}$$

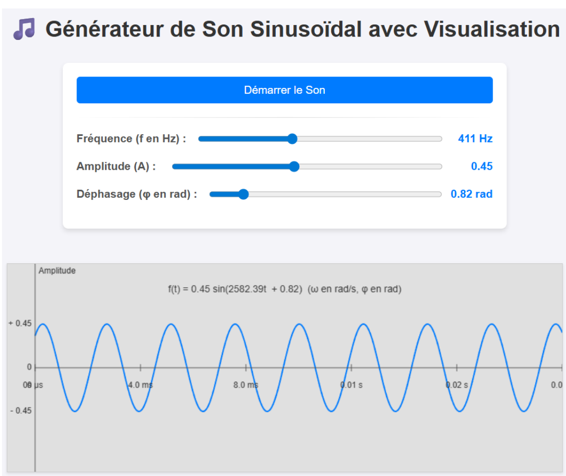
lorsqu'elle se propage suivant l'axe des x croissants.

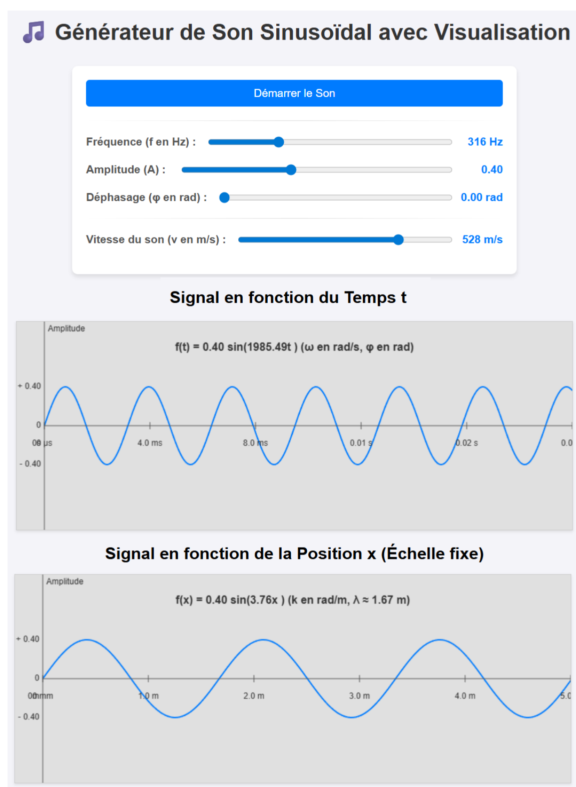
☞ $$u(x,t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right) = \boldsymbol{A\sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) + \varphi\right] = A\sin\left[\omega t + \frac{\omega x}{c} + \varphi\right]}$$

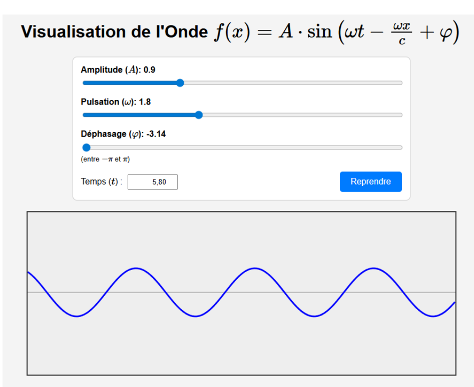
lorsqu'elle se propage suivant l'axe des x décroissants.

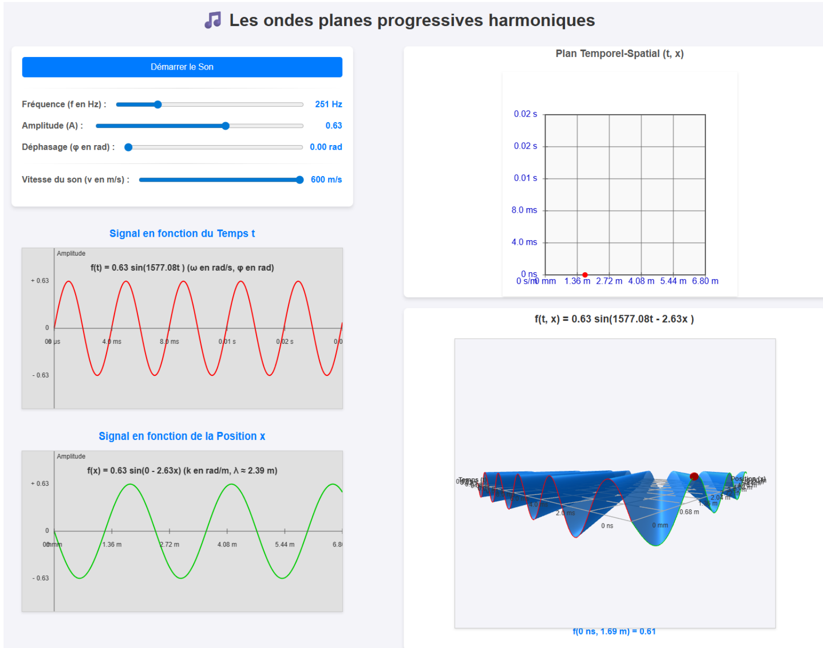
Définition:

$\frac{\omega}{c}$ est appelé le **nombre d'onde**.









2. Ondes stationnaire non atténuées.

Contrairement à l'onde progressive qui se déplace en transportant de l'énergie dans une direction donnée, l'onde stationnaire semble immobile et ne présente pas de propagation d'énergie nette.

Exemple n° 1 : Un exemple concret est la vibration d'une corde d'instrument de musique (guitare, violon, piano) lorsqu'elle est jouée.

- **Mécanisme :** Lorsqu'on pince ou frotte la corde, cela crée une onde progressive qui se déplace de l'endroit où elle a été générée vers les extrémités de la corde.

$$y_1(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$$

- **Réflexion :** Ces extrémités sont généralement fixes (par les chevalets et les mécaniques). Lorsque l'onde progressive atteint l'extrémité fixe, elle est réfléchie et revient en sens inverse.

$$y_2(x,t) = A\sin(\omega t + kx)$$

- **Superposition :** L'onde progressive incidente et l'onde progressive réfléchie (appelée onde régressive) se superposent. Si elles ont la même fréquence et la même amplitude et se propagent dans des directions opposées, leur interférence produit une onde stationnaire.

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= A\big[\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)\big] \end{aligned}$$

En utilisant l'identité trigonométrique $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, on retrouve :

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$

Remarque

C'est la structure mathématique de cette séparation des variables (espace et temps) qui est la signature d'une onde stationnaire.

Dans l'onde stationnaire, il y a oscillation, mais pas de déplacement de la forme d'onde :

1. L'amplitude en x est Statique :

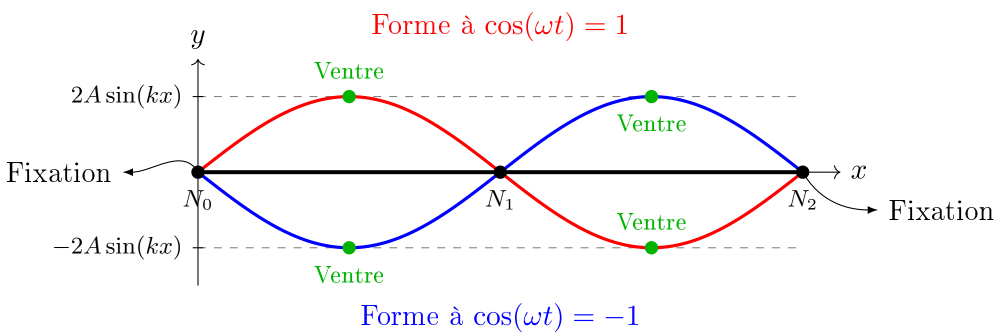
   ☞ Cette amplitude est fixe dans le temps. Par exemple, le point situé à $x_{\text{nœud}}$ aura toujours une amplitude de zéro, quelle que soit la valeur de t. Ce point ne vibre jamais, il n'y a pas de transport d'énergie à travers lui.

   ☞ Inversement, le point situé à x_{ventre} aura toujours l'amplitude maximale $2A$.

   ☞ La dépendance en x détermine un motif fixe (nœuds et ventres) qui ne bouge jamais.

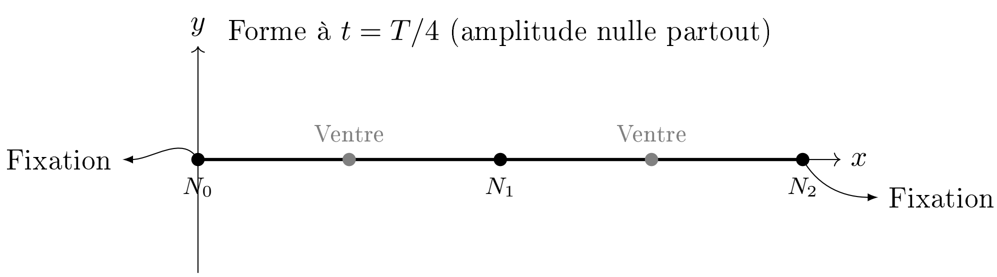
2. La phase est uniforme, le terme $\cos(\omega t)$ module la vibration pour tous les points x simultanément :

   ☞ Pour $t = 0$, $\cos(\omega t) = \mathbf{1}$. L'onde stationnaire prend sa forme maximale : $y(x, 0) = 2A\sin(kx)$:



   Pour $t = \boldsymbol{T/2}$, $\cos(\omega t) = -1$. L'onde stationnaire $y\big(x, T/2\big) = -2A\sin(kx)$ est en opposition de phase.

   ☞ À un autre instant, disons $t = T/4$, alors $\omega t = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$ et $\cos(\omega t) = \mathbf{0}$. L'onde est plate $\big(y(x, T/4) = 0\big)$ pour tous les x en même temps :



   ☞ Tous les points vibrent en phase. Il n'y a pas de décalage temporel (retard x/c) entre la vibration d'un point x_1 et d'un point x_2.

Pour obtenir les 3 nœuds (la deuxième harmonique) :

☞ localisez le milieu : c'est généralement au niveau de la 12e frette (l'octave) ;

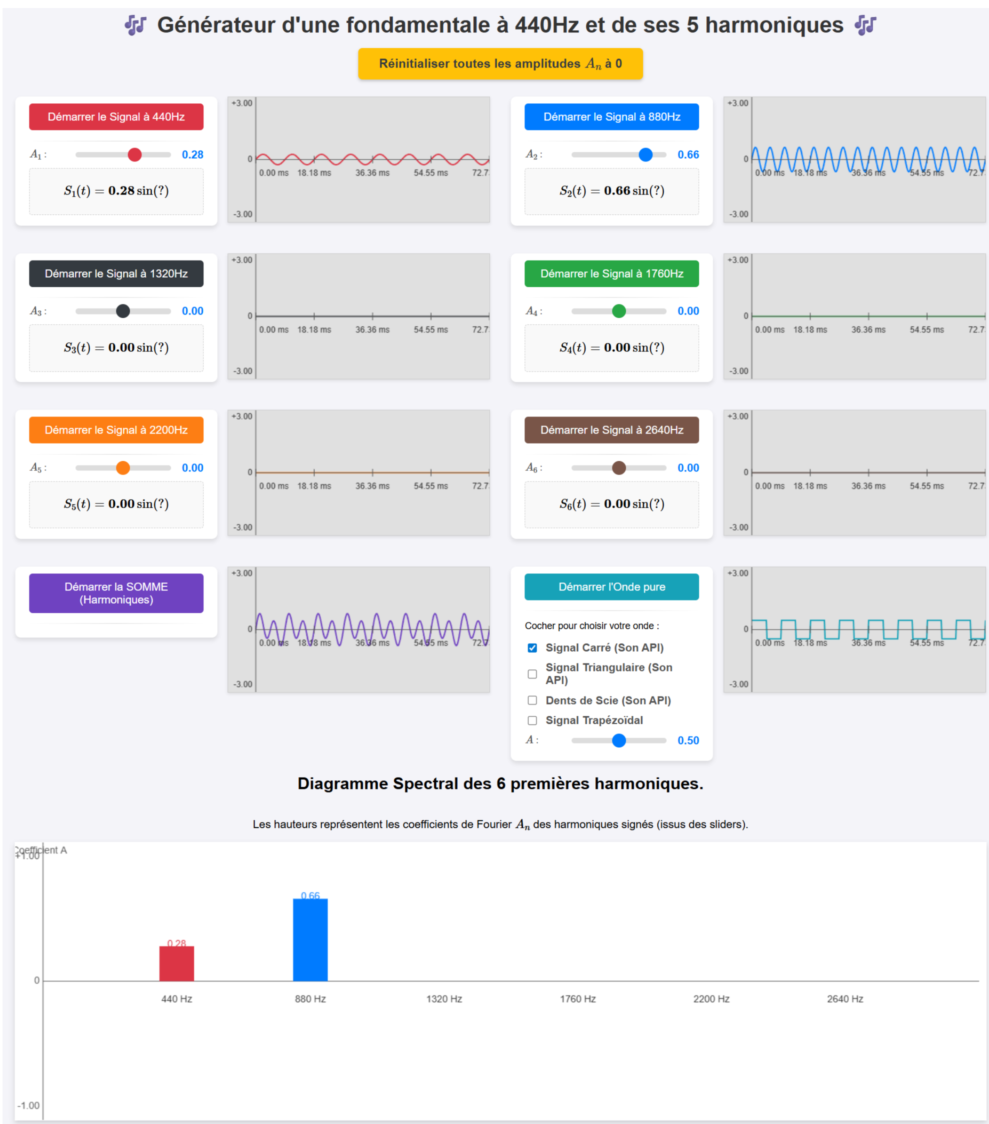
☞ touchez légèrement : posez très délicatement le doigt sur la corde juste au-dessus du fil de la 12e frette ;

☞ pincez la corde : frapper la corde (avec un médiator ou le doigt) ;

☞ relâchez le doigt : retirez immédiatement le doigt après avoir pincé la corde pour permettre à l'onde stationnaire de s'établir.

Remarque

Harmonique n	Longueur d'onde λ	Nombre de Ventres	Nombre de Nœuds
1	$2L$	1	2
2	L	2	3
3	$2L/3$	3	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$2L/n$	n	$n+1$



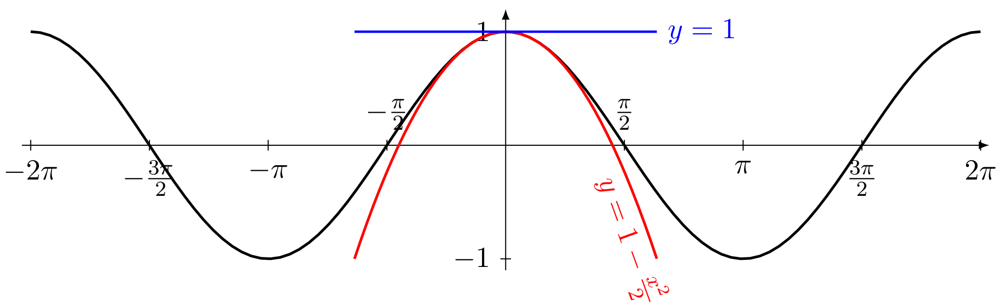
IV. L'équation d'onde.

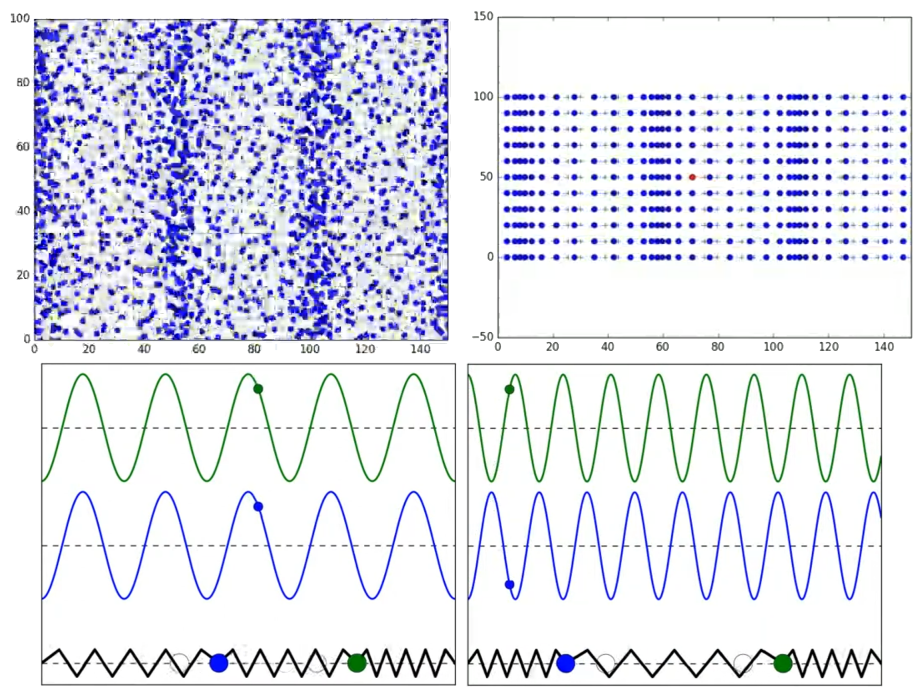
Rappel:

$f(a+x) \overset{\text{DL}}{\approx} f(a) + xf'(a) + \dfrac{x^2}{2}f''(a)$

Exemple n° 2 : Le développement limité du cosinus en 0 :

- Le formule s'écrit : $f(0+x) \overset{\text{DL}}{\approx} \boldsymbol{f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(0)}$
- $f(x) = \cos(x)$, $f'(x) = \boldsymbol{-\sin(x)}$, et $f''(x) = \boldsymbol{-\cos(x)}$
- $f(x) \approx \boldsymbol{\cos(0) - x\sin(0) - \dfrac{x^2}{2}\cos(0) = 1 - \dfrac{x^2}{2}}$





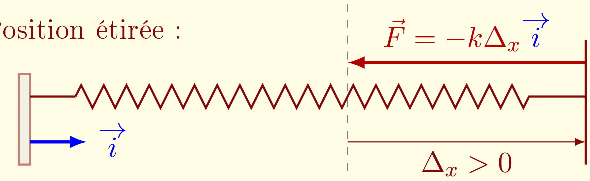
$x_1(0) = x_2(0) = -2$ $\qquad$ $x_1(0) = -x_2(0) = -2$

Rappel:

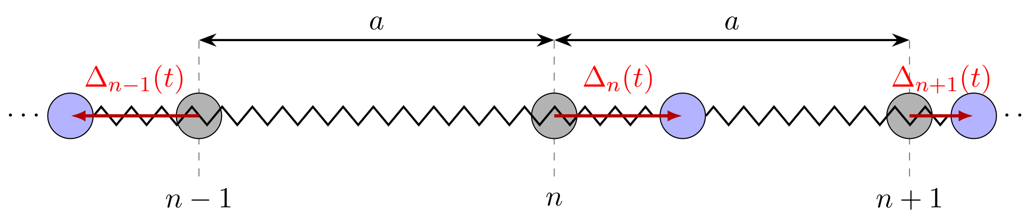
La constante de raideur est définie par la Loi de Hooke (pour les déformations faibles) qui relie la force $\overrightarrow{F}$ de rappel exercée par le ressort à son allongement ou sa compression (Δx) par rapport à sa position d'équilibre : $\overrightarrow{F} = -k\Delta_x \overrightarrow{i}$ où k est la constante de raideur, Δ_x son déplacement par rapport à sa position d'équilibre, et $\overrightarrow{i}$ un vecteur unitaire orienté selon la direction du déplacement.

- Position d'équilibre ($\Delta x = 0$)

- Position étirée :



Pour mettre en évidence la structure mathématique du phénomène ondulatoire, nous allons étudier le système constitué d'une chaîne infinie d'oscillateurs identiques composés de masses m et de ressorts de raideurs k montés en série :



En notant a la longueur de chaque ressort à l'équilibre, et Δ_n l'écart de la masse numéro n par rapport à sa position d'équilibre, on peut établir l'équation du mouvement de la masse numéro n :

$$m\Delta_n''(t) = -\boldsymbol{k}\big[\underbrace{\boldsymbol{\Delta_n(t) - \Delta_{n-1}(t)}}_{\text{Ressort de gauche}}\big] + \boldsymbol{k}\big[\underbrace{\boldsymbol{\Delta_{n+1}(t) - \Delta_n(t)}}_{\text{Ressort de droite}}\big]$$

Passons du discret au continue :

- **Hypothèse :** On considère que le mouvement de la chaîne n'est pas seulement un ensemble de points discrets, mais qu'il peut être décrit par une seule fonction $X(x,t)$.
- La fonction $X(x,t)$ représente le déplacement de la matière non seulement au niveau des masses (positions $x_n = na$), mais potentiellement en tout point x de la droite.
- **Changement de notation :**

Notation Discrète	Signification	Notation continue
$\Delta_{n-1}(t)$	Déplacement de la masse $n-1$	$\boldsymbol{X(x-a,t)}$
$\Delta_n(t)$	Déplacement de la masse n (masse centrale)	$\boldsymbol{X(x,t)}$
$\Delta_{n+1}(t)$	Déplacement de la masse $n+1$	$\boldsymbol{X(x+a,t)}$

L'espace est maintenant une variable continue x, échantillonnée aux positions des masses $x-a$, x, et $x+a$.

La fonction $X(x,t)$ est le déplacement d'une masse située à la position d'équilibre x au cours du temps t.

Puisque la position X dépend maintenant de deux variables (x et t), la dérivée par rapport au temps doit devenir une dérivée partielle :

L'équation du mouvement devient alors : $m\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2}(x,t) = \boldsymbol{-k\big[X(x,t)-X(x-a,t)\big]+k\big[X(x+a,t)-X(x,t)\big]}$

On a supposé que a est "petit", ce qui permet d'effectuer les développements limites suivants :

$$\begin{cases} X(x-a,t) & \overset{\text{DL}}{\approx} X(x,t) - a\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} \\ X(x+a,t) & \approx X(x,t) + a\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} \end{cases}$$

Grâce à ces développements, on peut exprimer $X(x-a,t)$ et $X(x+a,t)$ en fonction de $X(x,t)$:

$$m\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(x,t) = -k\left[X(x,t) - \underbrace{\left(X(x,t) - a\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)}_{X(x-a,t)}\right] + k\left[\underbrace{\left(X(x,t) + a\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)}_{X(x+a,t)} - X(x,t)\right]$$

$$= -k\left[a\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right] + k\left[a\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right] = \boldsymbol{ka^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0} \quad \text{avec } c = \sqrt{\boldsymbol{\frac{ka^2}{m}}}$$

Cette équation aux dérivées partielles est l'équation d'onde ou équation de **d'Alembert.** Cette équation relie la dérivée seconde par rapport au temps t et la dérivée seconde par rapport à la variable d'espace x. Le fait que la fonction X vérifie cette équation signifie que X possède une structure d'onde. En d'autres termes, la perturbation X se propagera dans l'espace au cours du temps, et variera en fonction du temps en tout point fixe de l'espace. Il en va de même pour la force, la vitesse, l'accélération : toutes ces fonctions, qui sont reliées à X ou à ses dérivées, ont une structure d'onde. Le paramètre 'c' est homogène à une **vitesse** : c'est la **célérité** de l'onde.

1. Transformation vers le modèle continu (macroscopique).

Modèle Discret (Chaîne d'oscillateurs)	**Propriété continue (Milieu réel)**	**Symbole**	**Rôle Physique**
m/a	Masse volumique (ou densité)	ρ	Représente l'**inertie** du milieu (sa résistance à l'accélération).
Ka	Module d'élasticité (ou de rigidité)	E	Représente la **force de rappel** du milieu (sa résistance à la déformation).

En substituant ces relations dans la formule de célérité : $c = \sqrt{\dfrac{Ka^2}{m}} = \boldsymbol{\sqrt{\dfrac{(Ka)\cdot a}{(m/a)\cdot a}} = \sqrt{\dfrac{Ka}{m/a}} = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}}$

2. Application à l'onde sonore dans un gaz (l'air).

Pour une onde sonore se propageant dans un gaz, comme l'air, la célérité est donnée par la formule de Laplace :

$$\mathbf{c_{air}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho}} \text{ donc } E = \boldsymbol{\gamma P_0}$$

- ρ est la masse volumique du gaz (correspondant à m/a).
- γ est l'indice adiabatique et P_0 la **pression statique** (ou pression à l'équilibre) du gaz avant le passage de l'onde sonore.
- γP_0 est le module de compressibilité adiabatique, qui représente le terme d'élasticité (correspondant à Ka).

La célérité du son est déterminée par les propriétés macroscopiques du milieu à l'état d'équilibre. C'est la pression de l'air au repos $\boldsymbol{P_0}$ qui détermine, avec la masse volumique ρ et le coefficient adiabatique γ, la **"raideur"** du gaz face à une petite compression, et donc la vitesse à laquelle cette perturbation se propage.

L'indice **adiabatique** γ, aussi noté κ, dépend du nombre de degrés de liberté de la molécule de gaz (sa nature : monoatomique, diatomique, etc.).

Type de Gaz	**Exemple**	**Valeur théorique de γ**
Monoatomique	Hélium (He), Néon (Ne)	$\mathbf{5/3 \approx 1,67}$
Diatomique	Air (N_2 à 78% et O_2 à 21%), Hydrogène (H_2)	$\mathbf{7/5 = 1,40}$
Polyatomique	Méthane (CH_4), Vapeur d'eau (H_2O)	$\approx 1,30$

3. Formulation à partir de la température.

La loi des gaz parfaits (gaz à l'équilibre) se formule mathématiquement de la manière suivante : $PV = \boldsymbol{nRT}$ où

- P est la pression en Pascal (P$_a$) : Force exercée par unité de surface par les molécules sur les parois du conteneur.
- V est le volume en m^3, et T la température en Kelvin.
- n est le nombre de mols, c'est une quantité de matière : **1** mole = $\mathbf{6,022 \times 10^{23}}$ unités.
  Ce nombre gigantesque est appelé la constante d'**Avogadro**.
- Constante des gaz parfaits (R) : $R \approx \mathbf{8,314}$ J $\cdot$ mol^{-1} $\cdot$ K^{-1}

La Masse Molaire est la masse d'une mole de n'importe quelle substance. Elle est numériquement égale à la masse atomique ou moléculaire relative de cette substance (exprimée en grammes, mais avec l'unité g/mol).

Substance	**Masse Moléculaire (u)**	**Masse Molaire (M)**
Hydrogène (H)	$\approx 1,01$ u	$\approx 1,01$ g/mol
Oxygène (O)	$\approx 16,00$ u	$\approx 16,00$ g/mol
Carbone (C)	$\approx 12,01$ u	$\approx 12,01$ g/mol
Azote (N)	$\approx 14,01$ u	$\approx 14,01$ g/mol
Eau (H_2O)	$\approx 18,01$ u	$\approx 18,01$ g/mol
Air (N_2, O_2)	$\approx 28,97$ u	$\approx 28,97$ g/mol

Remarque

$M_{\text{eau}} = 2 \times M(\text{H}) + 1 \times M(\text{O}) \approx \mathbf{(2 \times 1,01) + 16,00 = 18,02\ g/mol}$

D'après la loi des gaz parfaits $P_0V = nRT$ où le nombre de mols $n = \dfrac{\text{masse du gaz}}{\text{Masse molaire}}$.

Ainsi, $P_0V = \left(\dfrac{m}{M}\right)RT$.

Comme $\rho = \dfrac{m}{V}$ on a : $m = \rho V$ et $P_0V = \left(\dfrac{\rho V}{M}\right)RT$ donc $P_0 = \dfrac{\rho RT}{M}$

$c = \sqrt{\dfrac{\gamma P_0}{\rho}}$ donc $c = \sqrt{\dfrac{\gamma \dfrac{\rho RT}{M}}{\rho}}$ donc $\boxed{c = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}}$

Exemple n° 3 : Calculons la vitesse du son dans l'air à 20° :

- La température absolue $T = \mathbf{20}°\text{C} + \mathbf{273,15 = 293,15}\ \text{K}$
- Indice adiabatique de l'air (γ) : $\gamma \approx \mathbf{1,40}$
- La masse molaire de l'air $M \approx \mathbf{0,02897}\ \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

$c = \sqrt{\dfrac{\mathbf{1,40 \times 8,314\ J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1} \times 293,15\ K}}{\mathbf{0,02897\ kg \cdot mol^{-1}}}} \approx \mathbf{343,5 m/s}$

V. Ondes harmoniques.

1. L'énergie d'une molécule.

Considérons une petite particule de masse m dans le milieu de propagation. Son déplacement $y(t)$ est décrit par l'équation $y(t) = \boldsymbol{A \sin(\omega t + \varphi)}$.

(A) Commençons par calculer son énergie cinétique :

La vitesse de la particule est la dérivée de sa position par rapport au temps :

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = \boldsymbol{A\omega \cos(\omega t + \varphi)}$$

Son énergie cinétique est donnée par la formule classique : $E_c(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2$

$$E_c(t) = \frac{1}{2}m\big[A\omega\cos(\omega t + \varphi)\big]^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi)}$$

(B) Son énergie potentiel :

La loi de Hooke nous dit que $F = -kx$ où

- k est la **constante de raideur** du ressort (en N/m) ;

- x est le déplacement par rapport à l'équilibre ;
- Le signe moins indique que la force est toujours opposée au déplacement.

La 2[e] Loi de Newton stipule que la force nette sur la masse m est égale à sa masse multipliée par son accélération : $F = m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ donc $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{-kx}$ d'où l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

La solution de cette EDH est $y(x) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}x\right) = \boldsymbol{A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}x + \varphi\right)}$

Il s'ensuit que $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ donc $k = \boldsymbol{m\omega^2}$

L'énergie potentielle emmagasinée par un système est égale au travail W effectué par la force extérieure ($F_{\text{ext}} = -F = kx$) nécessaire pour déplacer l'objet de sa position d'équilibre ($y(0) = 0$) jusqu'à une position $y(t)$.

$$W = \int_0^{y(t)} F_{\text{ext}}\mathrm{d}x = \int_0^{y(t)} kx\mathrm{d}x = \left[k\frac{x^2}{2}\right]_0^{y(t)} = \boldsymbol{\frac{ky^2(t)}{2}}$$

L'énergie potentielle est donc : $E_p(t) = \dfrac{1}{2}ky(t)^2 = \dfrac{1}{2}(m\omega^2)\big[A\sin(\omega t + \varphi)\big]^2 = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)}$

L'énergie mécanique totale E est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} E(t) = E_c(t) + E_p(t) &= \boldsymbol{\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}mA^2\omega^2\big[\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)\big] = \frac{1}{2}m\omega^2A^2} \end{aligned}$$

L'énergie d'un oscillateur harmonique (et par extension l'énergie transportée par une onde harmonique) est :

- Proportionnelle à la masse m de la particule oscillante.
- Proportionnelle au carré de la pulsation ω^2 (donc au carré de la fréquence f^2).
- Proportionnelle au carré de l'amplitude A^2.

2. De l'énergie d'une molécule à l'énergie Volumique ($\mathcal{E}$)

L'onde sonore est une succession d'oscillateurs. Pour obtenir l'énergie volumique moyenne $\mathcal{E}$, nous devons remplacer la masse m de l'oscillateur par la masse volumique ρ (masse par unité de volume) du milieu de propagation (l'air, l'eau, etc.). On vient de voir que l'énergie E d'une seule molécule de masse m est : $E = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}m\omega^2A^2.}$

Si l'on considère l'énergie $\mathbf{E_{volume}}$ contenue dans un petit volume $\mathbf{V}$, la masse $\mathbf{m}$ des particules dans ce volume est $\mathbf{m} = \rho\mathbf{V}$ (où ρ est la masse volumique du milieu).

L'énergie volumique moyenne $\mathcal{E}$ est :$\mathcal{E} = \dfrac{E_{volume}}{V} = \dfrac{\frac{1}{2}(\rho V)\omega^2A^2}{V}$

En simplifiant par le volume V, on obtient l'énergie volumique moyenne (ou densité d'énergie) pour l'onde sonore :

$$\mathcal{E} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2} \text{ où}$$

- ρ est la masse volumique du milieu (en kg/m^3) ;
- ω est la pulsation (en rad/s) ;
- A est l'amplitude du déplacement des particules (en mètres, m).

3. De l'énergie Volumique à l'intensité Sonore (I)

L'intensité sonore I est définie comme la puissance (énergie par unité de temps) qui traverse une unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation.

Imaginons un petit volume de milieu $\Delta V = S \cdot c \cdot \Delta t$ devant une surface S. L'énergie contenue dans ce volume se déplace à la vitesse c (célérité de l'onde sonore) et traverse la surface S pendant le temps Δt.

L'énergie E_{volume} traversant S pendant Δt est : $E_{volume} = \mathcal{E} \cdot V = \boldsymbol{\mathcal{E} \cdot (S \cdot c \cdot \Delta t)}$

L'intensité I est donnée par $I = \dfrac{\text{Puissance}}{S} = \dfrac{E_{volume}}{S \cdot \Delta t} = \boldsymbol{\dfrac{\mathcal{E} \cdot S \cdot c \cdot \Delta t}{S \cdot \Delta t} = \mathcal{E} \cdot c}$

En substituant l'expression de $\mathcal{E}$ trouvée dans le 2., on a : $\boxed{I = \dfrac{1}{2}\rho c \omega^2 A^2}$

4. Relation entre l'amplitude de Déplacement (A) et l'amplitude de pression (Δp).

Le déplacement instantané $y(t)$ d'une particule située à la position x est : $y(x,t) = A \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)$.

La pression acoustique $\Delta p(x,t)$ est la petite variation de pression autour de la pression d'équilibre (la pression atmosphérique). La relation entre le déplacement d'une particule y et la variation de pression Δp dans un fluide est donnée par :

$$\Delta p(x,t) = -B \frac{\partial y}{\partial x} \text{ où}$$

- B est le Module de compressibilité isentropique du fluide (en Pascals, Pa). Ce module mesure la résistance du fluide à la compression. Il est relié à la masse volumique ρ, et la vitesse du son c par la formule : $B = \rho c^2$.
- $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ est la déformation volumique (la dérivée du déplacement par rapport à la position), qui représente les zones de compression/dilatation.

$\Delta p(x,t) = -B \dfrac{\partial}{\partial x}\left[A \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)\right] = \boldsymbol{BA\left(\dfrac{\omega}{c}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)}$. Donc, L'amplitude **maximale** de cette variation de pression Δp_{max} est atteinte lorsque le terme $\cos(\omega t - kx)$ vaut ± 1 et vaut $\boldsymbol{BA\left(\dfrac{\omega}{c}\right) = (\rho c^2) \cdot A \cdot \left(\dfrac{\omega}{c}\right)}$

L'amplitude de pression acoustique, Δp_{max}, souvent noté p, est $\boxed{\Delta p_{max} = \rho c \omega A}$

Définition:

Le produit $\mathbf{Z} = \rho\mathbf{c}$ est l'**impédance acoustique** caractéristique du milieu (en kg/m$^2 \cdot$ s ou Rayl).

Dans la pratique de l'acoustique, l'intensité sonore est souvent exprimée non pas avec l'amplitude de déplacement A, mais avec l'amplitude de la pression acoustique Δp_{max} (la surpression). La relation est alors :

$$I = \frac{1}{2}\rho c\omega^2 A^2 = \frac{\Delta p_{max}^2}{2\rho c}$$

Cette dernière formule est très utilisée car les microphones mesurent directement la pression acoustique Δp_{max} qui est souvent notée simplement p, notation ambiguë.

5. Pression et intensité efficaces.

Δp_{max} est l'amplitude de la variation de la pression autour de la pression d'équilibre (la pression atmosphérique) :

$$p(t) = \boldsymbol{\Delta p_{max}\cos(\omega t)}$$

Définition:

La valeur efficace (ou RMS, Root Mean Square) est définie comme la racine carrée de la moyenne du carré de la grandeur :

$$p_{\text{eff}} = \sqrt{\langle p^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T p(t)^2\, dt}$$

Il s'ensuit que $p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[\Delta p_{max}\cos(\omega t)\right]^2 dt} = \ldots = \boldsymbol{\frac{\Delta p_{max}}{\sqrt{2}}}$ (calcul effectué en MAT2)

$$I = \frac{\Delta p_{max}^2}{2\rho c} = \boldsymbol{\frac{\left(p_{\text{eff}}\sqrt{2}\right)^2}{2\rho c} = \frac{p_{\text{eff}}^2}{\rho c}}$$

Propriété

$p_{\text{eff}} = \dfrac{\Delta p_{max}}{\sqrt{2}}$ et $I = \dfrac{p_{\text{eff}}^2}{\rho c}$

Remarque

Certains, note cette intensité I_{eff}, mais dans le contexte des ondes sonores sinusoïdales (et en général, pour toute grandeur physique oscillante caractérisant un flux d'énergie), l'intensité sonore efficace (I_{eff}) est identique à l'intensité sonore moyenne, que l'on note simplement I.

6. Comment l'intensité Sonore Varie dans la Réalité.

A L'atténuation Géométrique (Loi en $1/r^2$).

Pour une source sonore ponctuelle dans un espace libre et homogène (onde sphérique) :

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

où P est la puissance totale émise par la source (constante) en watts(W). Elle représente l'énergie acoustique totale émise par seconde par la source, dans toutes les directions.

Et, r est la distance à la source.

Dans ce cas, l'intensité I dépend explicitement de la distance r et diminue à mesure que l'on s'éloigne.

B L'atténuation par Absorption.

Dans un milieu réel (comme l'air), l'énergie sonore est progressivement absorbée (transformée en chaleur). L'intensité diminue alors de manière exponentielle :

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2} \mathrm{e}^{-\alpha r}$$

où α est le coefficient d'absorption.

Contrairement à l'impédance acoustique (ρc) ou à la célérité (c), la valeur de α dans l'air n'est pas une constante simple ; elle dépend fortement de plusieurs grandeurs physiques :

Grandeur Physique	Impact sur α	Explication / Relation
Fréquence (f)	$\alpha \propto \mathbf{f^2}$ (très fort)	L'absorption augmente très fortement avec le carré de la fréquence.
Température (T)	Complexe / Faible diminution	L'absorption diminue légèrement lorsque la température augmente.
Humidité Relative	Non-linéaire (maximum à $10\% - 20\%$)	Phénomène de relaxation moléculaire. α est maximale à HR faible ou moyenne.
Pression Atmosphérique	Faible augmentation	Augmente légèrement avec la pression ambiante.

Ordres de Grandeur : Pour l'air à 20°C et 50% d'humidité relative, α est typiquement :

- ☞ Basses Fréquences (125 Hz) : $\alpha \approx 0,0005$ à $0,001$ dB $\cdot$ m^{-1} ;
- ☞ hautes Fréquences (4000 Hz) : $\alpha \approx 0,05$ à $0,1$ dB $\cdot$ m^{-1} ?.

Tableau d'ordres de Grandeur de α à 125 Hz (en dB/m)

Humidité Relative (HR) ↓	**Température** (T)		
	5°C (278 K)	20°C (293 K)	35°C (308 K)
Air Très Sec (5% HR)	$5,0 \cdot 10^{-4}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$	$4,0 \cdot 10^{-4}$
Air Sec/Moyen (20% HR)	$6,0 \cdot 10^{-4}$	$8,0 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$
Air Humide (50% HR)	$7,0 \cdot 10^{-4}$	$\mathbf{1,0 \cdot 10^{-3}}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$
Air Très Humide (90% HR)	$8,0 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$

Tableau d'ordres de Grandeur de α à 4000 Hz (en dB/m)

Humidité Relative (HR) ↓	**Température** (T)		
	5°C (278 K)	20°C (293 K)	35°C (308 K)
Air Très Sec (5% HR)	$9,0 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$
Air Sec/Moyen (20% HR)	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{5,0 \cdot 10^{-2}}$	$6,4 \cdot 10^{-2}$
Air Humide (50% HR)	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$3,4 \cdot 10^{-2}$
Air Très Humide (90% HR)	$9,0 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$

7. Les fonctions logarithmes.

Définition:

Etant donné, un nombre réel $a \in \left]0\,;+\infty\right[$, le **logarithme de base a**, noté $\log_a$, est la **bijection réciproque** de la fonction exponentielle de base a :

$$y = a^x \iff x = \log_a(y)$$

Il est défini sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Exemple n° 4 :

1. $4^x = 7 \iff x = \log_4(7) = \dfrac{\ln(7)}{\ln(4)} \simeq 1,40$

2. $3^x = 18 \iff x = \log_3(18) = \dfrac{\ln(18)}{\ln(3)} \simeq 2,63$

3. $\mathrm{e}^x = 18 \iff x = \log_{\mathrm{e}}(18) = \dfrac{\ln(18)}{\ln(\mathrm{e})} = \dfrac{\ln(18)}{1} = \ln(18) \simeq 2,89$. Ainsi, $\boxed{\log_{\mathrm{e}}(x) = \ln(x)}$

4. $10^x = 1000 \iff x = \log_{10}(1000) = \dfrac{\ln(1000)}{\ln(10)} = 3$.

5. $10^x = 1\,0000\,0000 \iff x = \log_{10}(1\,0000\,0000) = 8$

6. $10^x = 0,0001 \iff x = \log_{10}(0,0001) = \dfrac{\ln(0,0001)}{\ln(10)} = -4$.

7. $10^x = 112 \iff x = \log_{10}(112) = \dfrac{\ln(112)}{\ln(10)} \simeq 2,05$.

Remarque

Sur les calculatrices, $\log_{10}$ est souvent noté **log**.

Propriété

les logarithmes de base $a > 0$, donc en particulier le logarithme décimal ($\log_{10}$), ont les mêmes propriétés que ln, donc étant donnés deux nombres réels $x > 0$ et $y > 0$ on a :

- $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$
- $\log_a\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$
- $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Exemple n° 5 : Calcule à la main les nombres suivants :

- $\log\left(10^{10}\right) \times \log\left(10^{-5}\right) = \mathbf{10 \times (-5) = -50}$
- $\log(300) - \log(3) = \mathbf{\log\left(\frac{300}{3}\right) = \log(100) = 2}$
- $\log(40) + \log(80) - \log(32) = \mathbf{\log\left(\frac{40 \times 80}{32}\right) = \log\left(\frac{3200}{32}\right) = \log(100) = 2}$
- $\log\left(10^{7,78}\right) = \mathbf{7,78}$
- $10^{\log(8,1)} = \mathbf{8,1}$ **car** $x \mapsto a^x$ **et** $\log_a$ **se neutralisent comme** $e^{\ln(x)} = x$

Exemple n° 6 : Résous

1. $3^x + 12 = 2199$ on a :$\mathbf{3^x = 2187}$ **donc** $x = \frac{\ln(2187)}{\ln(3)} = 7 \quad \left(= \frac{\log(2187)}{\log(3)}\right)$
2. $x^5 = 759375$ on a : $\mathbf{\log\left(x^5\right) = 5\log(x) = \log(759375)}$ **donc** $\log(x) = \frac{\log(759375)}{5}$

   $x = 10^{\frac{\log(759375)}{5}} = 15$
3. $5^x = 1000$ on a : $\mathbf{\log_5\left(5^x\right) = x\log_5(5) = x \times 1 = \log_5(1000) \simeq 4,29}$

8. Intensité sonore en décibels.

L'oreille humaine a deux caractéristiques qui rendent l'échelle linéaire de l'intensité I peu pratique :

☞ Plage dynamique immense : L'intensité sonore que l'oreille peut percevoir s'étend sur une plage gigantesque, allant de 10^{-12} W/m^2 (seuil d'audition) à environ 1 W/m^2 (seuil de douleur), soit un facteur de 10^{12} (mille milliards).

☞ Sensibilité logarithmique : La perception du volume par l'oreille n'est pas linéaire. Pour qu'un son paraisse deux fois plus fort, son intensité doit être multipliée par environ dix.

Pour gérer cette énorme plage et refléter la façon dont nous percevons le son, on utilise une échelle qui "compresse" cette plage : l'échelle logarithmique.

Définition:

Le niveau d'intensité sonore, noté L_I ou SIL (Sound Intensity Level), est défini à l'aide de l'intensité sonore I mesurée et d'une intensité de référence I_0 :

$$L_I = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où $\mathbf{I_0 = 10^{-12}}$ W/m$^{\mathbf{2}}$
Son unité, sans dimension physique, est le **décibel**, noté **dB**.

REMARQUE

Le décibel (dB) est basé sur le Bel (B), une unité trop grande pour un usage courant. Le décibel est simplement le dixième du Bel :L_I (en Bels) $= \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$.

(A) Le Seuil d'audition $I = I_0 = 10^{-12}\mathrm{W/m^2}$ correspond à $L_I = 10\log_{10}\left(\frac{I_0}{I_0}\right) = \mathbf{10\log_{10}(1) = 0\ dB}$

(B) Le Seuil de Douleur $I = 1\mathrm{W/m^2}$ correspond à $L_I = 10\log_{10}\left(\frac{1}{10^{-12}}\right) = \mathbf{10\log_{10}(10^{12})}$

$= \mathbf{10 \times 12 = 120\ dB}$

(C) $10\log_{10}\left(\frac{2I}{I_0}\right) = \mathbf{10\log_{10}\left(2\times\frac{I}{I_0}\right) = 10\log_{10}(2) + 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \simeq 3.01 + 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)}$:

Multiplier l'intensité sonore par 2 revient à ajouter **3** dB.

9. Les décibels pondéré (A).

L'oreille humaine n'entend pas toutes les fréquences avec la même intensité. Nous sommes très sensibles aux sons médiums et aigus (comme la voix humaine ou les cris), mais nous entendons beaucoup moins bien les sons très graves (basses fréquences).

c'est l'unité de référence pour :

- La santé publique : Évaluer la gêne réelle ou le risque de perte auditive ;
- La réglementation : Les lois sur le bruit routier ou le voisinage sont presque toujours exprimées en dB(A).

Niveau sonore	**Exemple concret**	**Ressenti humain**
0 - 20 dB(A)	Désert, chuchotement, respiration	Très calme
30 - 40 dB(A)	Bibliothèque, chambre la nuit	Calme
50 - 60 dB(A)	Lave-vaisselle, pluie modérée	Supportable
65 dB(A)	**Conversation, voiture à 10m**	**Bruit courant**
75 - 85 dB(A)	Aspirateur, rue passante	Fatigant
90 - 100 dB(A)	Tondeuse à gazon, klaxon	Dangereux
120+ dB(A)	Avion au décollage	Douleur

Le fonctionnement du filtre "A" : des pondérations agissent comme un égaliseur qui "nettoie" le signal physique pour qu'il ressemble à ce que l'humain entend. Mathématiquement, on applique une correction en décibels selon la fréquence (f) :

- A 20 Hz (très grave) : Le filtre retire environ 50 dB.
- A 1000 Hz : La correction est de 0 dB. C'est le point de référence.
- A 3000 Hz : Le filtre ajoute environ 1,2 dB.

REMARQUE

Nous appliquerions pas ce filtre dans cette fiche.

10. Pression acoustique en décibels.

Le niveau sonore basé sur la pression est appelé Niveau de Pression Acoustique (L_p ou SPL, Sound Pressure Level). Il est défini par la formule suivante :

$$L_p = 20 \log_{10}\left(\frac{p}{p_0}\right) \text{ (en dB)}$$

où

- p est l'amplitude de pression acoustique mesurée (en Pascals, Pa).
- p_0 est l'amplitude de pression de référence, qui correspond au seuil d'audition humain (à 1 kHz) :

$$\mathbf{p_0} \simeq \mathbf{20}\ \mu\text{Pa} = \mathbf{2} \times \mathbf{10^{-5}}\ \text{Pa}$$

Exercice n° 1 :Démontre que $\dfrac{p^2}{p_0^2} = 10^{L_p/10}$

$L_p = 20\log_{10}\left(\dfrac{p}{p_0}\right) = 10\log_{10}\left(\dfrac{p^2}{p_0^2}\right)$ donc $\dfrac{L_p}{10} = \log_{10}\left(\dfrac{p^2}{p_0^2}\right)$ soit $10^{L_p/10} = \dfrac{p^2}{p_0^2}$

11. Sommes des intensités.

Lorsque deux sources sonores S_1 et S_2 fonctionnent simultanément, la pression acoustique instantanée totale $p_{total}(t)$ en un point est la somme algébrique des pressions instantanées de chaque source : $p_{\text{total}}(t) = p_1(t)+p_2(t)$.

Par définition, la pression efficace totale est $p_{\text{eff,total}} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T p_{\text{total}}(t)^2 dt}$. Donc,

$$\begin{aligned} p^2_{\text{eff,total}} &= \frac{1}{T}\int_0^T (p_1(t)+p_2(t))^2\, dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T p_1(t)^2 dt + \frac{1}{T}\int_0^T p_2(t)^2 dt + \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T p_1(t)p_2(t)dt}_{\text{terme de corrélation (ou d(interférence)}} \end{aligned}$$

Deux sources sont dites incohérentes (ou non corrélées) si elles sont indépendantes et n'ont pas de relation de phase fixe (par exemple, deux voitures, deux machines différentes, un moteur et une conversation).Dans ce cas, sur une longue période (T), le produit des deux pressions instantanées ($p_1(t)p_2(t)$) sera alternativement positif et négatif, s'annulant en moyenne.

$$\text{Si } S_1 \text{ et } S_2 \text{ sont incohérentes} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T}\int_0^T p_1(t)p_2(t)dt \approx 0$$

Et l'équation se simplifie à : $p^2_{\text{eff,total}} = p^2_{\text{eff},1} + p^2_{\text{eff},2}$.

Explication : Si $p_1(t)$ est un bruit aléatoire, et $p_2(t)$ est un autre bruit aléatoire indépendant, le produit $p_1(t)p_2(t)$ prendra des valeurs aléatoirement positives et négatives. L'intégrale sur une période d'intégration T suffisamment longue (quelques secondes, comme le fait l'oreille ou un sonomètre), tend vers zéro.

Remarque

Même si deux sources produisaient des ondes harmoniques (comme un bruit de moteur dominé par une certaine fréquence) :

- **Décalage de Fréquence :** Si les fréquences sont légèrement différentes (ce qui est toujours le cas dans la réalité), l'une des ondes va "glisser" par rapport à l'autre. Le déphasage évoluera de 0 à

2π constamment. Sur une longue durée, toutes les relations de phase (constructives et destructives) seront présentes, et la moyenne du terme de corrélation s'annulera.

- **Décalage de Trajet :** La phase acoustique est extrêmement sensible à la distance. Un décalage d'une demi-longueur d'onde suffit à passer d'une interférence constructive à destructive.

  Dans un environnement réel, les réflexions, les trajets multiples et le mouvement de l'air font que la phase reçue de deux sources distinctes varie constamment et de manière imprévisible, annulant ainsi la corrélation en moyenne.

L'addition de sons en décibels (dB) n'est pas une simple somme arithmétique, car l'échelle des décibels est logarithmique, basée sur le rapport des puissances ou des intensités sonores.

Propriété

Pour obtenir le niveau sonore total (L_{total}) de plusieurs sources ($L_1, L_2, \ldots, L_n$) non corrélées, on utilise la formule suivante de sommation logarithmique :

$$L_{total} = 10 \cdot \log_{10}\left(10^{L_1/10} + 10^{L_2/10} + \cdots + 10^{L_n/10}\right) \text{ où}$$

- L_{total} est le niveau sonore total résultant en dB ;
- $L_1, L_2, \ldots, L_n$ sont les niveaux sonores individuels en dB ;
- $10^{L/10}$ représente **l'intensité acoustique**.

Démonstration

Pour deux sources sonores S_1 et S_2 incohérentes, l'énergie (l'intensité) est additive. L'intensité totale (I_{total}) est la somme des intensités individuelles (I_1 et I_2), ce qui se traduit par l'addition des carrés des pressions efficaces :

$p_{\text{total}}^2 = p_1^2 + p_2^2$ donc $\dfrac{p_{\text{total}}^2}{p_0^2} = \dfrac{p_1^2}{p_0^2} + \dfrac{p_2^2}{p_0^2}$

D'après le résultat de l'exercice précédent : $10^{L_{\text{total}}/10} = 10^{L_1/10} + 10^{L_2/10}$

Pour isoler L_{total}, nous prenons le logarithme de base 10 de chaque côté :

$$\log_{10}\left(10^{L_{\text{total}}/10}\right) = \log_{10}\left(10^{L_1/10} + 10^{L_2/10}\right)$$

$$\frac{L_{\text{total}}}{10} = \log_{10}\left(10^{L_1/10} + 10^{L_2/10}\right)$$

$$\mathbf{L_{\text{total}} = 10 \cdot \log_{10}\left(10^{L_1/10} + 10^{L_2/10}\right)}$$

Exemple n° 7 : Deux sources sonores de 75 dB chacune donnent un niveau total de :

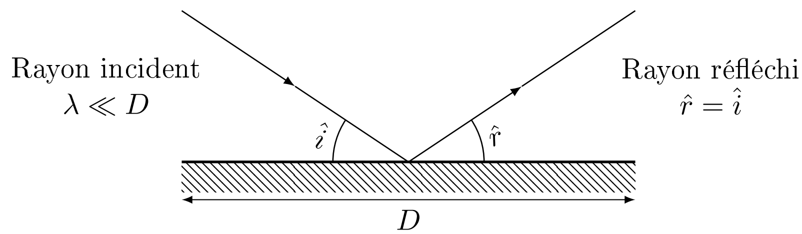
$$\begin{aligned} L_{total} &= \mathbf{10 \cdot \log_{10}\left(10^{75/10} + 10^{75/10}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(2 \cdot 10^{7.5}\right) = 10 \cdot (\log_{10}(2) + 7.5)} \\ &\approx \mathbf{10 \cdot (0.301 + 7.5) \approx 78.01 \text{ dB.}} \end{aligned}$$

Propriété : Règle Pratique :
le niveau sonore total de deux sons de niveaux identiques, est celui du premier son augmenté de **3dB**.

VI. Acoustique des lieux.

1. Réflexion

La réflexion acoustique est le rebond d'une onde sonore sur une surface. C'est l'analogue de la réflexion de la lumière sur un miroir. Un rayon sonore se réfléchit sur un obstacle lorsque la longueur d'onde λ est très inférieure à la dimension D de cet obstacle $\lambda \ll D$:

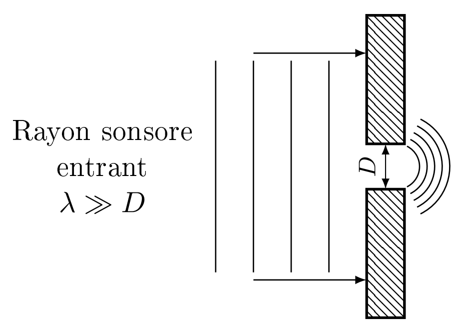


Remarque
En réalité,une partie de l'énergie sonore est absorbée par l'obstacle et seule la partie restante est réfléchie.

2. Diffraction à travers un trou .

La diffraction est la capacité d'une onde à contourner un obstacle ou à s'étaler après avoir traversé une ouverture.

Lorsqu'une onde sonore rencontre un trou, si sa longueur d'onde $\lambda \gg D$, alors elle se propage dans de multiples directions à partir de l'ouverture, comme si le trou était devenu une nouvelle source sonore, sinon elle continue simplement en ligne droite.

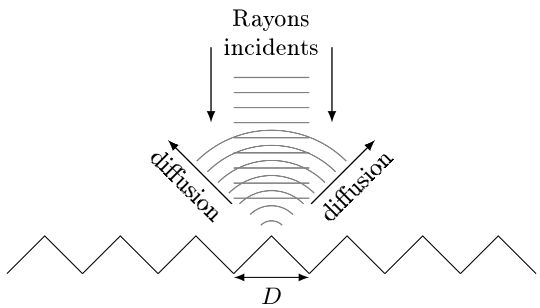


Pour le son, les longueurs d'onde audibles (λ) sont beaucoup plus grandes que celles de la lumière visible, ce qui explique pourquoi nous observons la diffraction sonore plus facilement dans la vie courante :

Fréquence (f)	**Longueur d'onde (λ)**	**Commentaire**
Basses Fréquences (100 Hz)	$\approx 3,4$ m	Se diffracte facilement autour d'une porte.
Hautes Fréquences (10 000 Hz)	$\approx 3,4$ cm	Difficile à diffracter par une porte. La diffraction est négligeable.

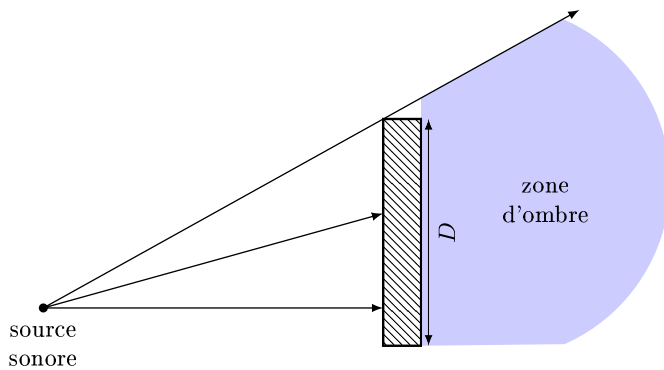
3. Diffusion.

Lorsqu'un rayon sonore incident, de longueur d'onde λ rencontre une surface présentant des irrégularités de dimension $D \approx \lambda$, il se produit un phénomène de **diffusion** qui conduit à un éclatement, dans toutes les directions, de l'onde plane associée au rayon sonore incident.



4. Zone d'ombre.

Quand une onde sonore de longueur d'onde λ rencontre un obstacle présentant une dimension $D \gg \lambda$, il se produit un phénomène de **zone d'ombre acoustique** derrière cet obstacle.



5. Le Nombre de Fresnel pour un Obstacle (N)

Lorsqu'on parle d'un obstacle (comme un mur antibruit ou un pilier), le nombre de Fresnel (N) est un indicateur de l'efficacité de l'écran et de la profondeur de la zone d'ombre. En acoustique environnementale (méthode de Maekawa), on utilise une définition spécifique basée sur la différence de trajet.

on calcule N à partir de la "déviation" que le son doit effectuer pour contourner l'obstacle :$N = \frac{2\delta}{\lambda}$ où

☞ δ est la **différence de marche** (en mètres). C'est la différence entre le trajet le plus court passant au-dessus de l'obstacle et le trajet direct théorique à travers l'obstacle :

$$\delta = (d_{source \to sommet} + d_{sommet \to recepteur}) - d_{source \to recepteur}$$

☞ λ est la longueur d'onde du son.

Le nombre de Fresnel permet de prédire le silence (l'atténuation) derrière l'obstacle. Plus N est grand, plus la zone d'ombre est "profonde" (silencieuse).

☞ Si $N > 0$: Le récepteur est dans la zone d'ombre géométrique. Le son est atténué car il doit se diffracter sur le bord.

☞ Si $N \approx 0$: Le récepteur est sur la ligne de visée du bord de l'obstacle. L'atténuation est d'environ 5 dB.

☞ Si $N < 0$: Le récepteur "voit" la source. On est en zone éclairée, mais il reste une légère atténuation due à la proximité du bord (zone de transition).

Exemple n° 8 : Pourquoi les sons graves "percent" l'ombre ?

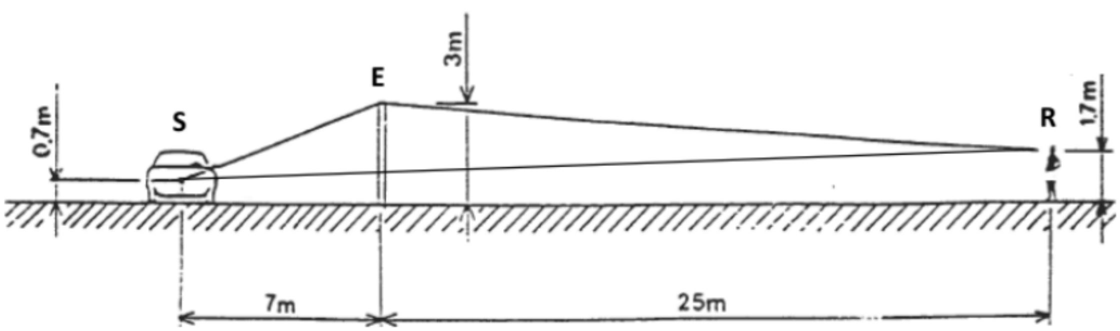
Type de son	**Longueur d'onde (λ)**	**Nombre de Fresnel (N)**	**Résultat**
Grave (Basse)	Grande (ex : 3 m)	Petit N	Faible atténuation. Le son "épouse" le bord et pénètre loin dans la zone d'ombre.
Aigu (Haut)	Petite (ex : 0,03 m)	Grand N	Forte atténuation. Le son est bloqué, la zone d'ombre est très marquée.

Calcul de l'atténuation (A)

L'atténuation apportée par un écran (en dB) peut être estimée par la formule simplifiée de Maekawa :

$$A_{dB} = 10\log_{10}(20N + 5)$$

Exemple n° 9 : Etudions l'efficacité d'un écran antibruit. Dans cet exemple, on considère une onde sonore d'une fréquence de 1 000 Hz se déplaçant à la vitesse de 343m/s.



1. $SE = \sqrt{7^2 + 2,3^2} \simeq 7,37 \quad ER = \sqrt{25^2 + 1,3^2} \simeq 25,03 \quad SR = \sqrt{32^2 + 1^2} \simeq 32,02$
2. La différence de marche est : $\delta = (d_{source \to sommet} + d_{sommet \to recepteur}) - d_{source \to recepteur}$
   $\delta = (SE + ER) - SR = (7,37 + 25,03) - 30,02 = 0,38$
3. La longueur d'onde est $\lambda = cT = \dfrac{c}{f} = \dfrac{343}{1000} = 0,343$ **m**
4. Le nombre de Fresnel est $N = \dfrac{2\delta}{\lambda} = \dfrac{2 \times 0,38}{0,343} \simeq 2,22$
5. Déterminer l'efficacité du mur : $10\log_{10}(20N + 5) \simeq 16,9$ **dB**