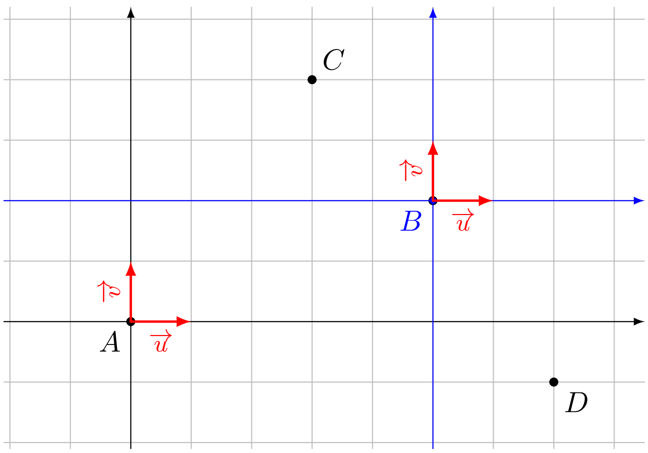
Diagonalisation d'endomorphisme et applications

I. Repères affines et Bases vectorielles



Dans le repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ on a les coordonnées :

- $A\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$ • $B\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$ • $C\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$ • $D\begin{pmatrix}\dots\\ \dots 1\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AB} =$ .... donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{BA} =$ .... donc $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{BD} =$ .... donc $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$ • $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$

Dans le repère $(B, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ on a : • $A\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$ • $B\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$ • $C\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$ • $D\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AB} =$ .... donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{BD} =$ .... donc $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{BA} =$ .... donc $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-5\\ -2\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$ • $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$

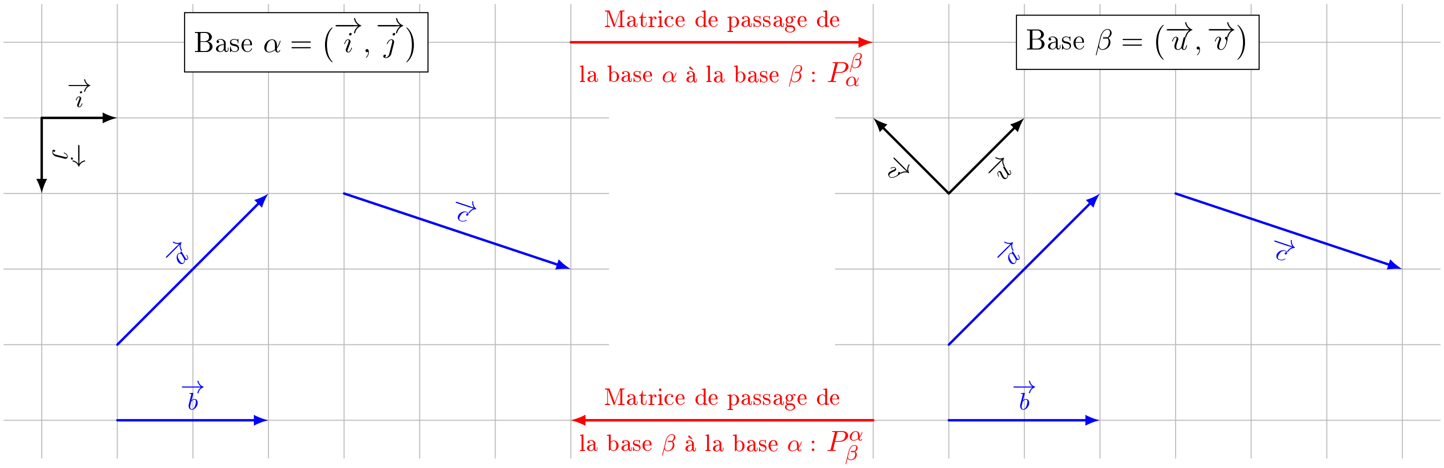
Les coordonnées d'un vecteur dans un repère ne dépendent pas du choix de .... Ainsi, si on retire l'origine d'un repère, il reste sa base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Définitions-propriétés

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ forme une .... d'un espace vectoriel si pour chaque vecteur $\overrightarrow{m}$, il existe .... n-uplet de nombres réels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tel que $\overrightarrow{m} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \dots + x_n\overrightarrow{e_n}$.

- Les n réels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont les .... du vecteur $\overrightarrow{m}$ dans la base $\alpha = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$.
- On note ...... les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{m}$ dans la base α.
- Dans le plan, pour que deux vecteurs forment une base, il faut et il suffit qu'ils ne soient pas ....
- Un espace vectoriel n'ayant pas de base est dit de dimension ....
- Si un espace vectoriel a une base, alors toutes les bases de cet espace vectoriel ont le même nombre de vecteurs.
- Un espace vectoriel est dit de dimension n s'il admet une base de n vecteurs.
- Le plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension ...

II. Changement de bases



$(\vec{i})_\alpha = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ $(\vec{j})_\alpha = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$(\vec{a})_\alpha = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ $(\vec{b})_\alpha = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ $(\vec{c})_\alpha = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$(\vec{u})_\alpha = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ $(\vec{v})_\alpha = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$(\vec{u})_\beta = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ $(\vec{v})_\beta = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$(\vec{a})_\beta = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ $(\vec{b})_\beta = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ $(\vec{c})_\beta = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$(\vec{i})_\beta = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ $(\vec{j})_\beta = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Définition:

La matrice de passage de la base α à la base β, notée . , est la matrice dont les colonnes sont constituées des ....

Ainsi, la matrice de passage de

- la base α à la base β est ....
- la base β à la base α est ....

Propriété

$(\vec{m})_\alpha =$ ....

La matrice de passage de la base α à la base β transforme les coordonnées exprimée dans la base β d'un vecteur à celles exprimées dans la base α : ça marche à l'envers !

La matrice de passage est dite .... pour les coordonnées.

Alors pourquoi ce nom ?

$P_\alpha^\beta(\overrightarrow{i})_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (\overrightarrow{u})_\alpha$ et $P_\alpha^\beta(\overrightarrow{j})_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (\overrightarrow{v})_\alpha$

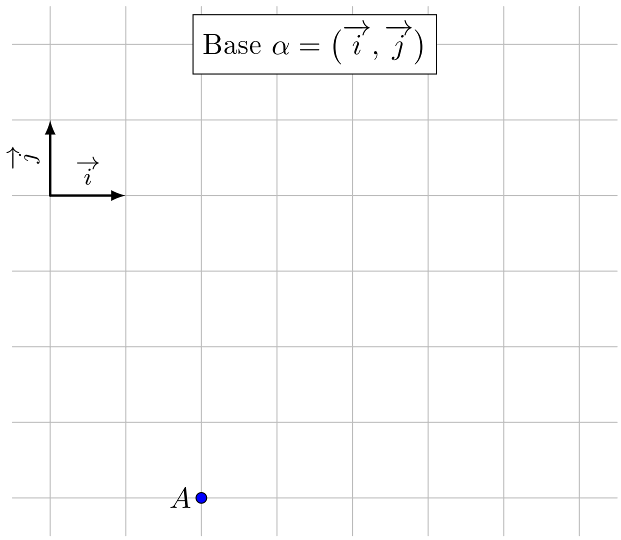
A réfléchir !...

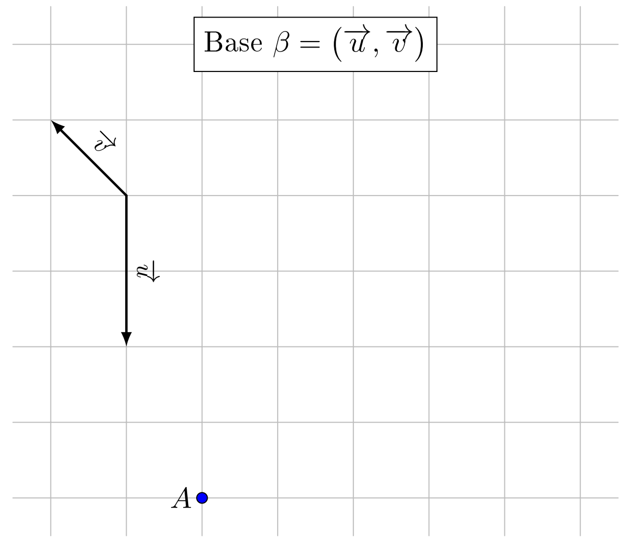
Calculons : $P_\alpha^\beta P_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$

Propriété

P_α^β est la matrice inverse de P_β^α.

Exercice n° 1:





1. Détermine la matrice de passage de la base α à la base β.
2. Détermine la matrice de passage de la base β à la base α.
3. Sachant que $(\overrightarrow{AB})_\beta \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, calcule ses coordonnées dans la base α, puis place le point B.
4. Sachant que $(\overrightarrow{BC})_\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, calcule ses coordonnées dans la base β, puis place le point C.
5. Détermine les coordonnées du vecteur $(\overrightarrow{AC})$ dans la base α, puis dans la base β.

Définition:

On appelle base .... d'un espace vectoriel, une base qui se présente de manière naturelle.

Exercice n° 2: Soit α la base canonique du laboratoire, et $\beta = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une base dont la matrice de passage est

$$P_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. P_α^β est la matrice de passage de quelle base à quelle base ?
2. On sait que $P_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$. Détermine a.
3. Soient $\left(\overrightarrow{a}\right)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\left(\overrightarrow{b}\right)_\beta = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Détermine $\left(\overrightarrow{a}\right)_\beta$ et $\left(\overrightarrow{b}\right)_\alpha$.

III. Application linéaire et matrice

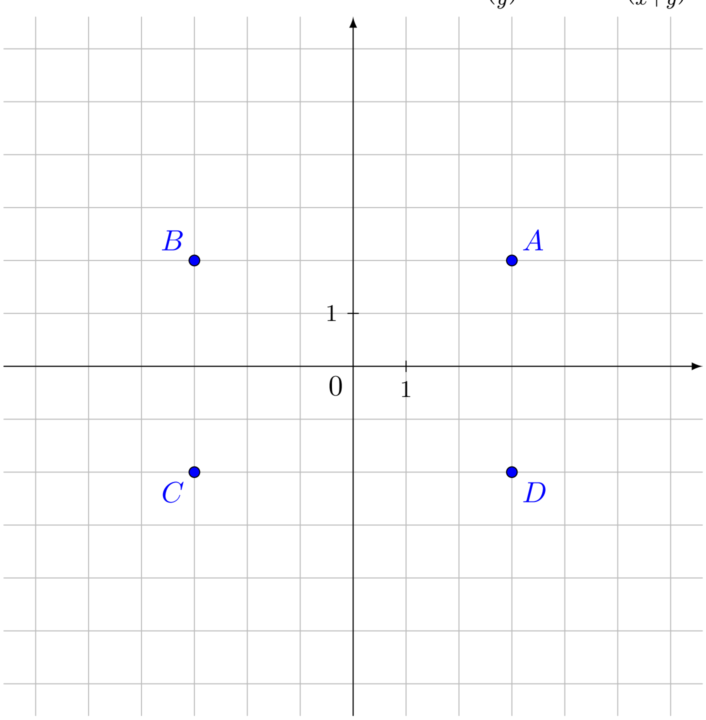
Normalement, dans cette branche des mathématiques, l'algèbre linéaire, on ne travaille qu'avec des vecteurs. Pour des raisons didactiques, nous allons représenter les vecteurs par des points. A chaque point M du repère nous associerons le vecteur $\overrightarrow{m}$ partant de l'origine et allant vers le point M.

Rappel:

On dit qu'une application f est linéaire si pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, vecteur $\overrightarrow{v}$, réel a :

$$f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \text{et } f(a\overrightarrow{u}) = \ \dots\dots\dots\dots$$

Considérons l'application linéaire $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \binom{x}{y} & \longmapsto & \binom{x-y}{x+y} \end{array}$, et considérons les quatre points A, B, C et D suivants :



- $f(A) = f\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
- $f(B) = f\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
- $f(C) = f\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
- $f(D) = f\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

<u>Point de vu matriciel :</u>

- $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix} =$
- $f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
- $f(B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Autrement dit, il semble qu'on puisse associer la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à l'application linéaire f.

Exercice n° 3: On note α la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ et β la base $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$

1. Détermine la matrice de passage P_α^β.
2. Calcule $\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)_\alpha$ et déduis-en $\left(\overrightarrow{v}\right)_\beta$.
3. Calcule $\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)_\alpha$. et déduis-en $\left(\overrightarrow{u}\right)_\beta$.
4. Déduis-en la matrice de passage de la base β à la base α.
5. Déduis-en les coordonnées de $f(A)$ dans la base β.
6. Déduis-en l'expression de l'application linéaire f dans la base β.

Notations :

La matrice de l'application linéaire f est notée $\underset{\alpha}{\operatorname{mat}}(f)$ dans la base α, et .... dans la base β.

$\underset{\alpha}{\operatorname{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\underset{\beta}{\operatorname{mat}}(f) =$

Propriété

$\underset{\beta}{\operatorname{mat}}(f) = P_\beta^\alpha \underset{\alpha}{\operatorname{mat}}(f)\, P_\alpha^\beta$

IV. Diagonalisation

Définition:

Soit f une application linéaire. Un nombre λ est une .... de f s'il existe un vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que :

$$f(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}$$

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.

Exemple n° 1 : Considérons l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \binom{x}{y} & \longmapsto & \binom{x+2y}{3x+2y} \end{array}$.

Vérifier que $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -1$ sont des valeurs propres de f.

Théorème
Soit f une application linéaire. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Exemple n° 2 : Reprenons l'application linéaire précédente, et déterminons ses valeurs propres.

Définition:
Soit f une application linéaire. On dit que f est .... s'il existe une base β de E tel que :

$$\underset{\beta}{mat}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème
Soit f une application linéaire.

$$\underset{\beta}{\mathrm{mat}}(f) \text{ est diagonale } \iff \beta \text{ est une base constituée de vecteurs propres}$$

Exemple n° 3 : Détermine une base β où la matrice de l'application linéaire précédente est diagonale

Exercice n° 4: On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ?
2. Détermine ses valeurs propres.
3. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres.
4. Détermine une base β où la la matrice de l'application f est diagonale.
5. Détermine la matrice de f dans la base β.

Exercice n° 5: On considère l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x \\ x + 2y \end{pmatrix} \end{array}$

1. Détermine ses valeurs propres.
2. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres.
3. Détermine une base β où la la matrice de l'application f est diagonale.
4. Détermine la matrice de f dans la base β.

Propriété

Si dans une base β, la matrice d'une application linéaire f est triangulaire :

$$\underset{\beta}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ou } \underset{\beta}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale.

Exemple n° 4 : Dans l'exemple précédent, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ses valeurs propres sont donc 3 et 2.

V. Application à l'étude des fonctions à plusieurs variables.

1. Gradient d'une fonction à plusieurs variables.

Dans tout cette section, $f : \mathbb{R}^n \longleftrightarrow \mathbb{R}$ dérivable par rapport à chacune de ses variables.

Définition:

On appelle .... de f en $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le vecteur colonne :

$$\nabla(f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

On appelle .... de f $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tel que $\nabla(f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 10\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}$

Théorème

Si f admet un .... en un point $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, alors $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un point critique de f.

Définition:

Si f admet des dérivées partielles d'ordre 2, alors on appelle .... de f en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la matrice :

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Théorème

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un point critique de f. Si les valeurs propres de la matrice hessienne de f sont :

- strictement positives, alors f admet un minimum local en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- sont strictement négatives, alors f admet un maximum local en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- sont non nulles et deux de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et le point critique est appelé .... ou ....

2. Application aux fonctions réelles à deux variables.

Définition:

Si une fonction réelle f de deux variables réelles admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et y, on appelle .... de f en (x, y) la matrice :

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Théorème

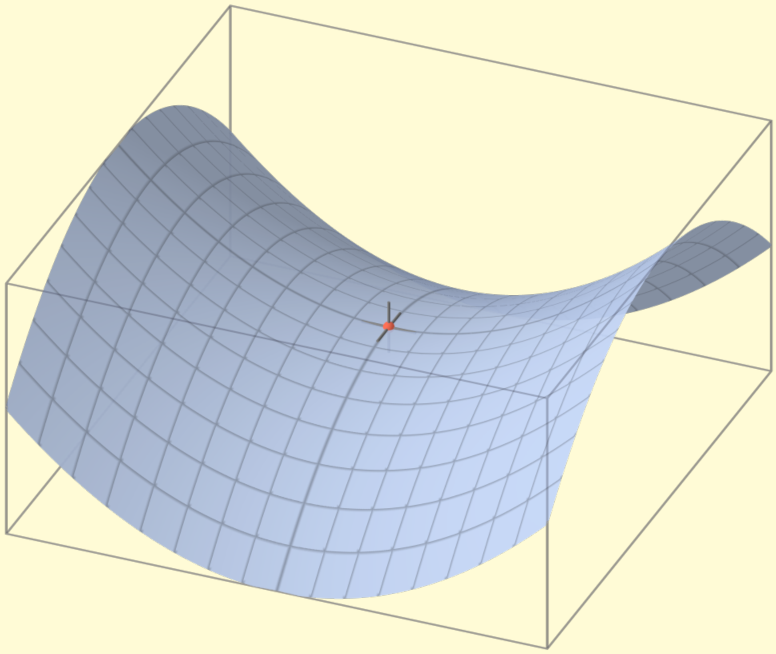
Si f est une fonction réelle de deux variables réelles de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on a, pour tous réels x, y, h, et k :

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + {}^t\nabla(f)(x,y)\binom{h}{k} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \nabla^2(f)(x,y) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)$$

Théorème

Soit (x, y) un point critique de f. Si les valeurs propres de la matrice hessienne de f sont :

- strictement positives, alors f admet un .... local en (x, y) ;
- sont strictement négatives, alors f admet un .... local en (x, y) ;
- sont non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x, y) et le point critique est appelé .... ou .... :



Exercice n° 6: Trouver les points critiques et discuter leur nature pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

1. $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$;
2. $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.
3. $f(x, y) = x^2y - 4y$.
4. $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$.