Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

C'est une équation,

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

C'est une équation, donc elle a une inconnue :

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

C'est une équation, donc elle a une inconnue :

☞ une fonction inconnue ;

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

C'est une équation, donc elle a une inconnue :

- une fonction inconnue ;
- désignée par la lettre y ;

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

C'est une équation, donc elle a une inconnue :

- ☞ une fonction inconnue ;
- ☞ désignée par la lettre y ;

C'est une équation différentielle :

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

C'est une équation, donc elle a une inconnue :

- une fonction inconnue ;
- désignée par la lettre y ;

C'est une équation différentielle :

- donc, une égalité

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

C'est une équation, donc elle a une inconnue :

- une fonction inconnue ;
- désignée par la lettre y ;

C'est une équation différentielle :

- donc, une égalité
- où l'inconnue est reliée à ses dérivées successives

Exemple : l'équation différentielle de la chaînette

La chaînette est le nom que porte la courbe obtenue en tenant une corde (ou un collier, un fil,...) par deux extrémités.

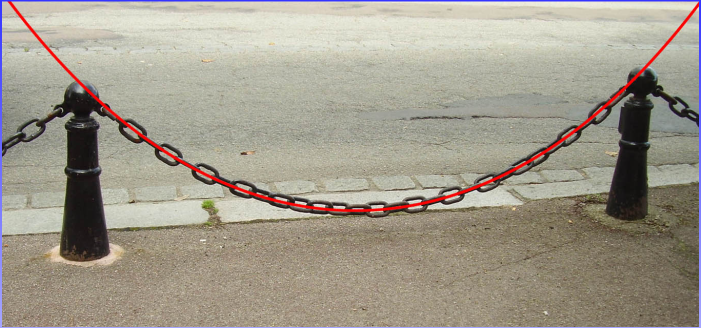
Exemple : l'équation différentielle de la chaînette

La chaînette est le nom que porte la courbe obtenue en tenant une corde (ou un collier, un fil,...) par deux extrémités.

La chaînette est le nom que porte la courbe obtenue en tenant une corde (ou un collier, un fil,...) par deux extrémités.

On démontrera dans le dernier TD qu'elle est solution de l'équation différentielle :

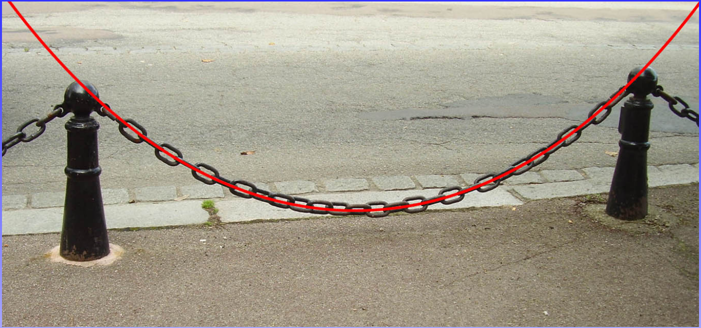
La chaînette est le nom que porte la courbe obtenue en tenant une corde (ou un collier, un fil,...) par deux extrémités.



On démontrera dans le dernier TD qu'elle est solution de l'équation différentielle :

$$y''(x) = \frac{1}{a}\sqrt{1 + y'(x)^2}$$

La chaînette est le nom que porte la courbe obtenue en tenant une corde (ou un collier, un fil,...) par deux extrémités.



On démontrera dans le dernier TD qu'elle est solution de l'équation différentielle :

$$y''(x) = \frac{1}{a}\sqrt{1 + y'(x)^2}$$

où a est un paramètre physique que nous expliciterons.

La Gateway Arch est une chaînette

La Gateway Arch est une chaînette

Cette courbe, retournée, est la forme idéale pour une voûte.

La Gateway Arch est située dans le centre-ville de Saint-Louis dans l'État du Missouri, aux États-Unis. Symbole de la ville, cette arche recouverte d'acier inoxydable mesure 192 mètres de hauteur, ce qui en fait le plus grand monument qui peut se visiter dans l'État, la plus grande arche du monde et le monument artificiel le plus haut du pays. Elle est consacrée à la conquête de l'Ouest, comme le mémorial dont elle fait partie.

Aussi fine soit-elle, elle tient sans se déformer. C'est une voûte autoportante.

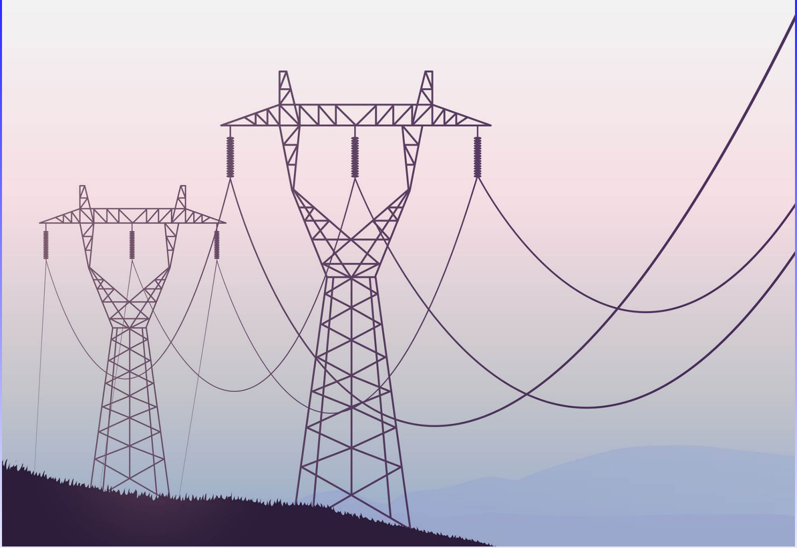
Aussi fine soit-elle, elle tient sans se déformer. C'est une voûte autoportante.

Le Sheffield Winter Garden à Sheffield.

Aussi fine soit-elle, elle tient sans se déformer. C'est une voûte autoportante.

Gateshead Millennium Bridge, pont piétonnier rotatif à Gateshead.

Aussi fine soit-elle, elle tient sans se déformer. C'est une voûte autoportante.



Cables entre deux pylônes électriques.

Equation différentielle et champ de vecteurs.

Considérons l'équation différentielle $y' = x$.

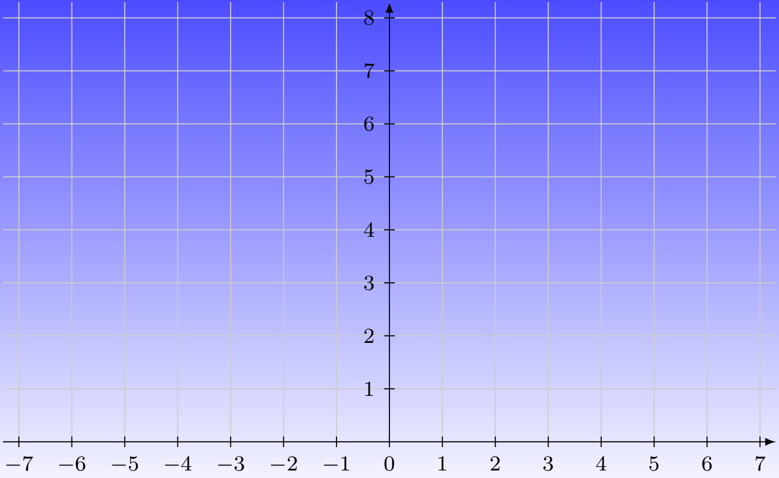
Equation différentielle et champ de vecteurs.

Considérons l'équation différentielle $y' = x$.

- l'inconnue est une fonction y.

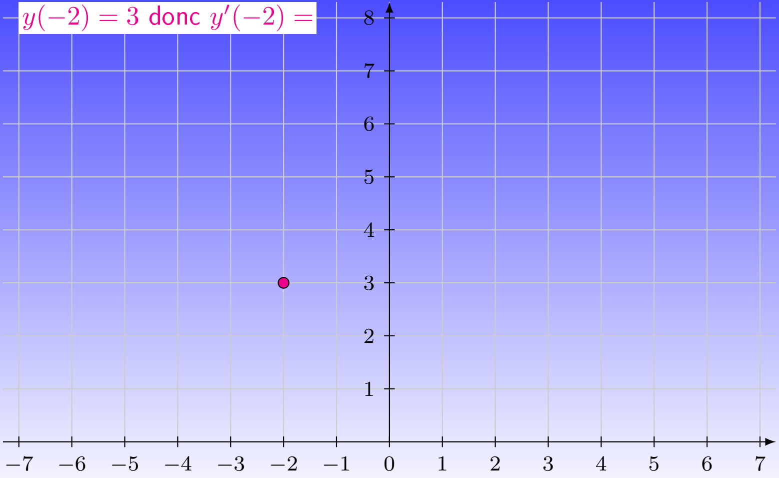
Considérons l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = x}$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



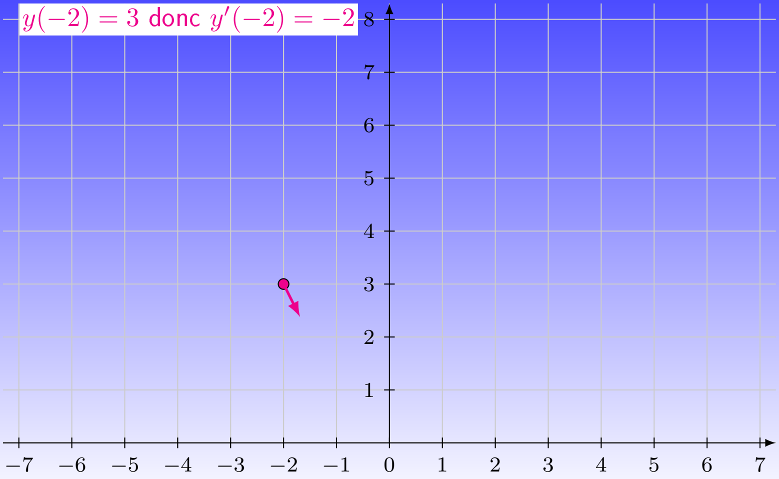
Considérons l'équation différentielle $y' = x$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



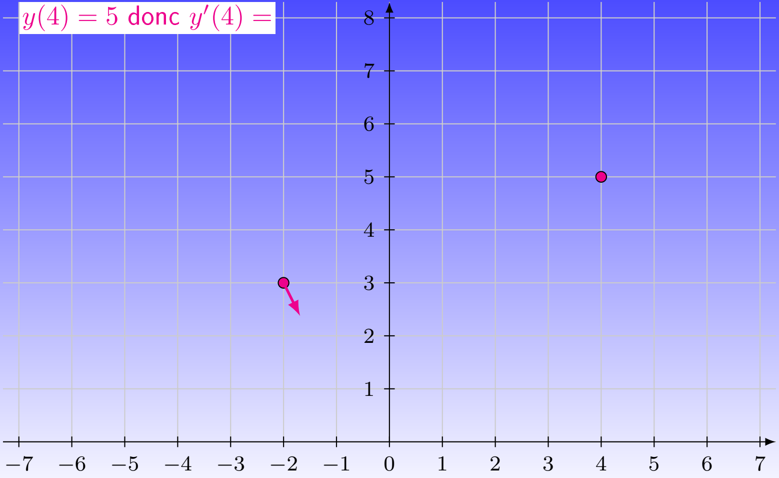
Considérons l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = x}$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



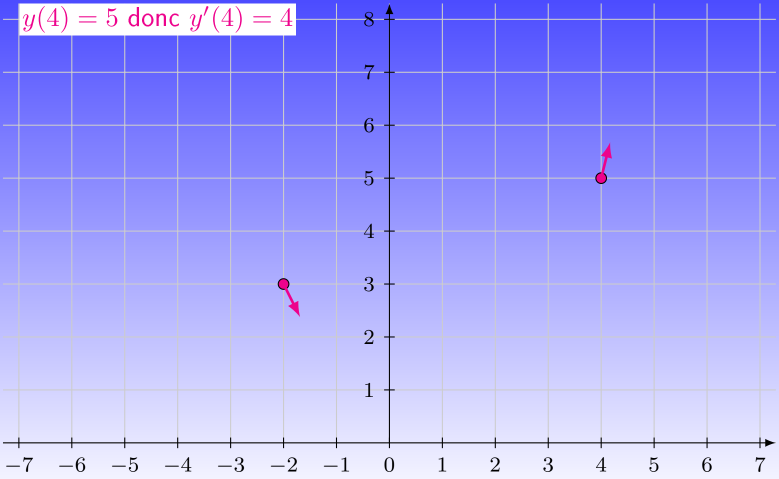
Considérons l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = x}$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



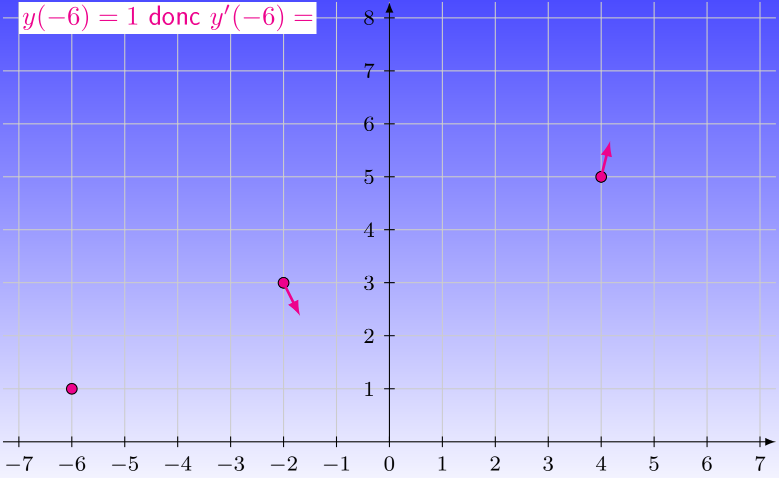
Considérons l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = x}$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



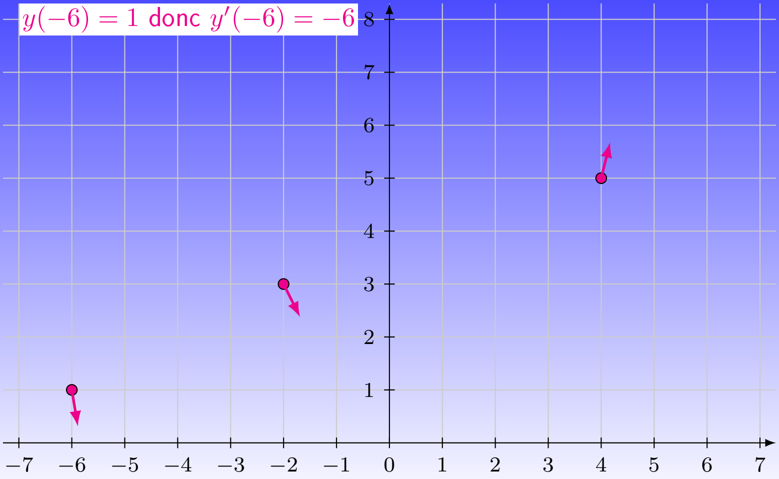
Considérons l'équation différentielle $y' = x$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



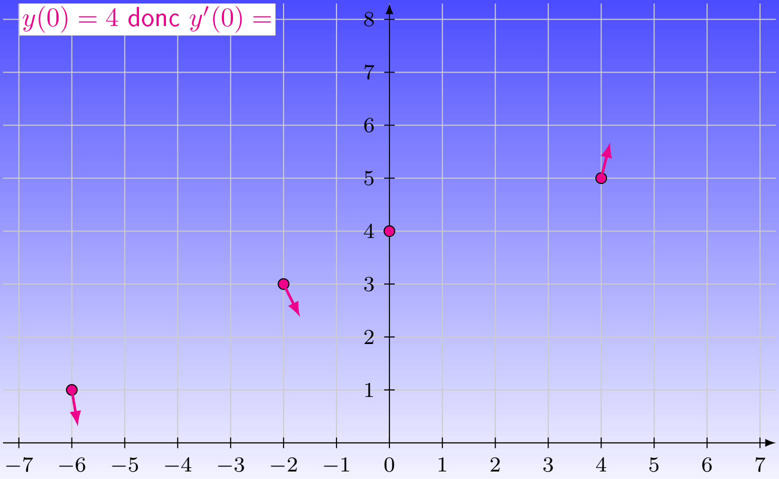
Considérons l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = x}$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



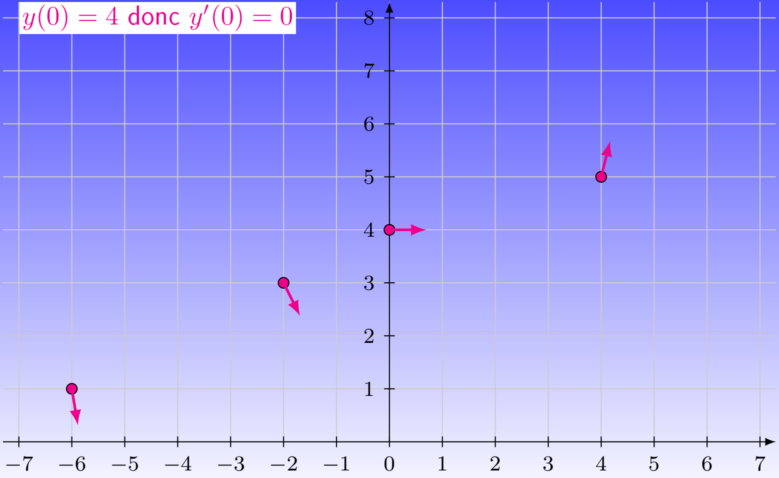
Considérons l'équation différentielle $y' = x$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



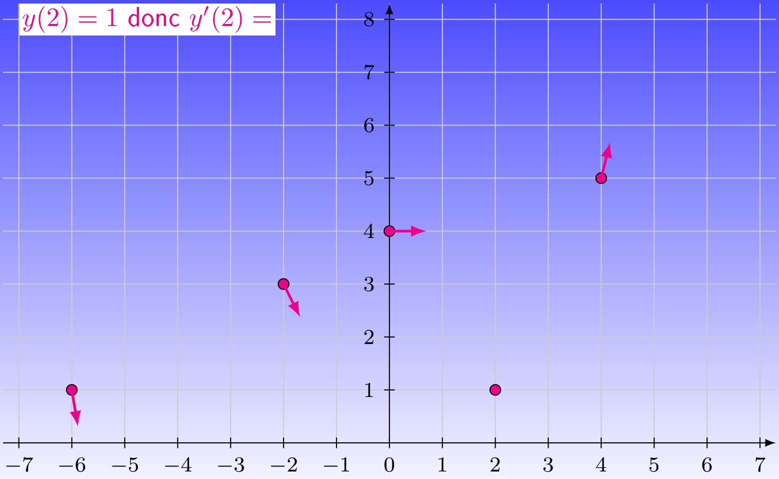
Considérons l'équation différentielle $\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{x}$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



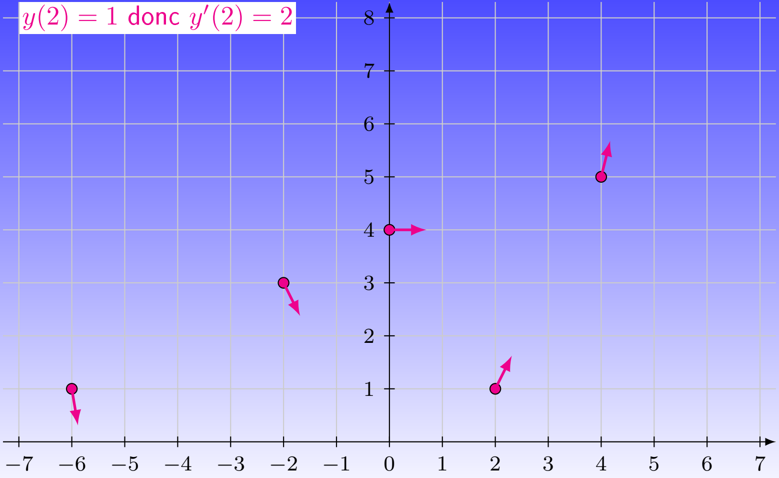
Considérons l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = x}$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



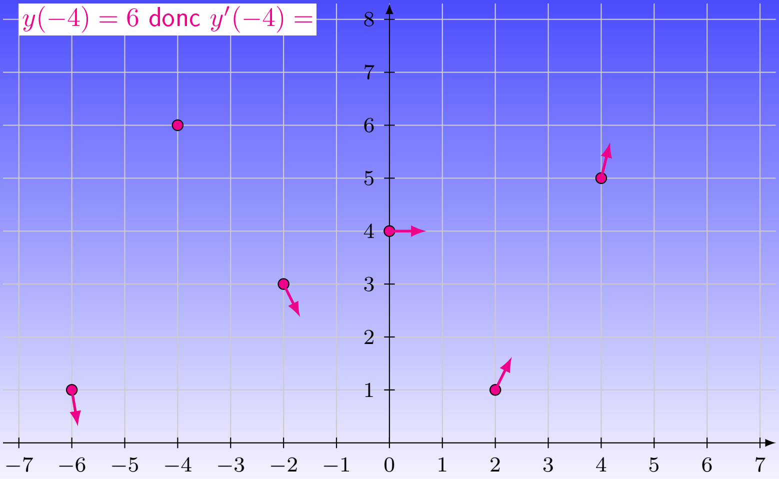
Considérons l'équation différentielle $y' = x$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



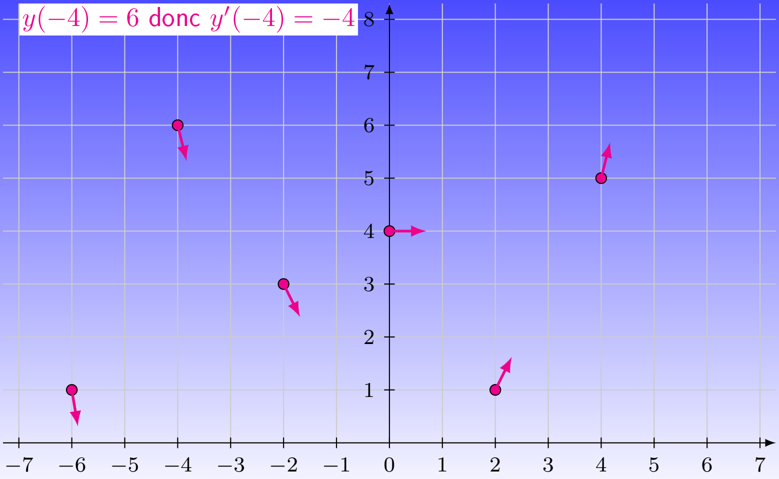
Considérons l'équation différentielle $y' = x$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



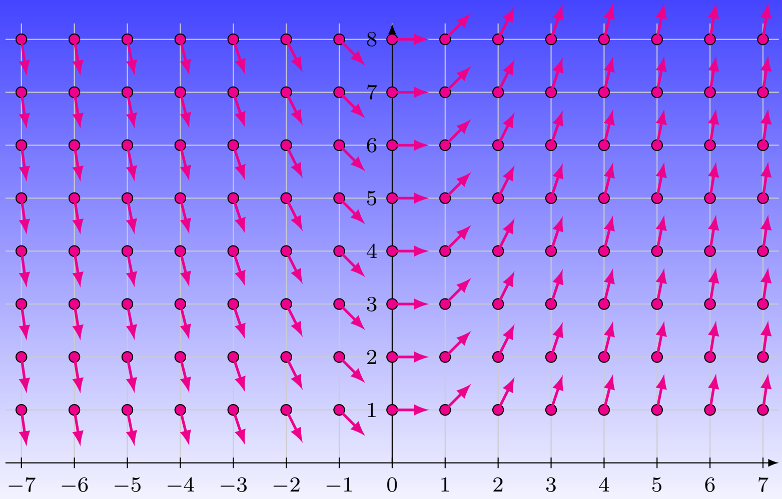
Considérons l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = x}$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



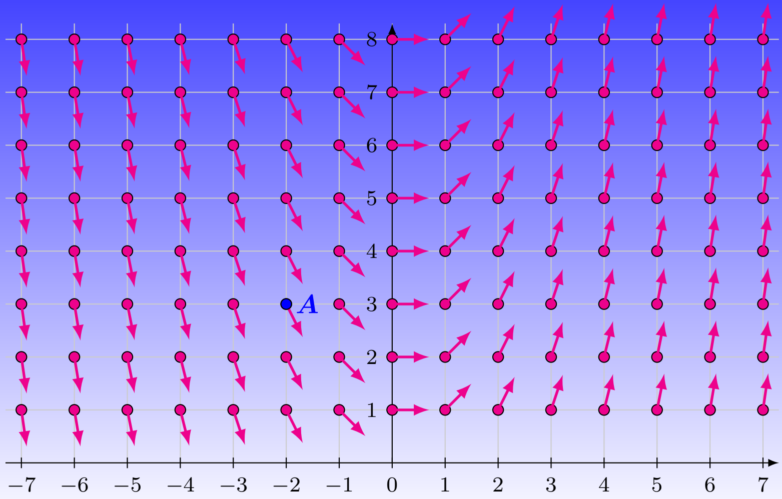
Considérons l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = x}$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



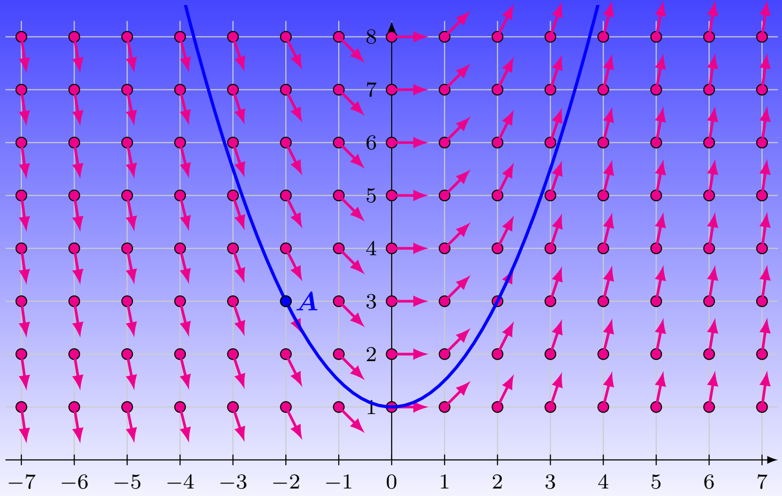
Considérons l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = x}$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



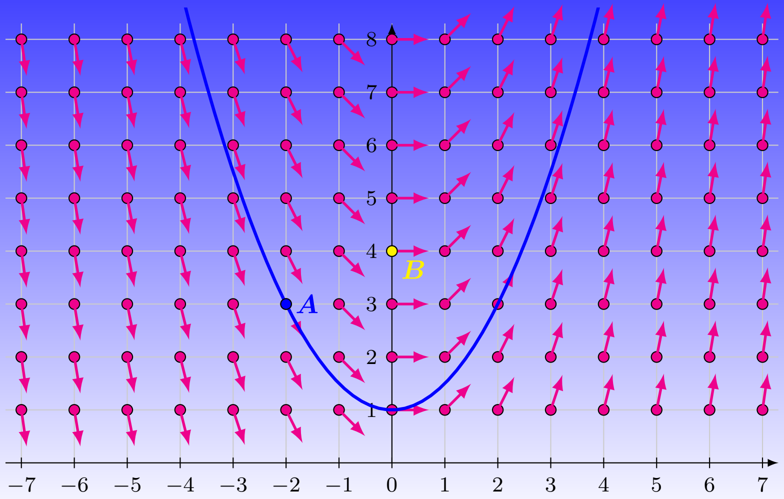
Considérons l'équation différentielle $y' = x$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



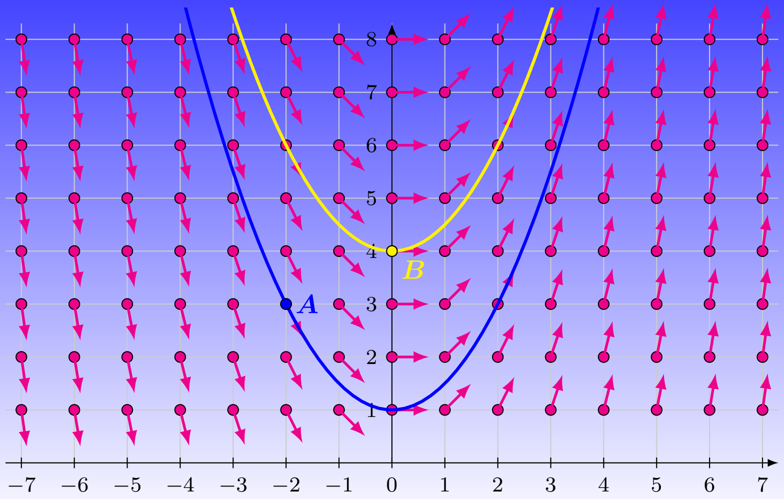
Considérons l'équation différentielle $y' = x$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



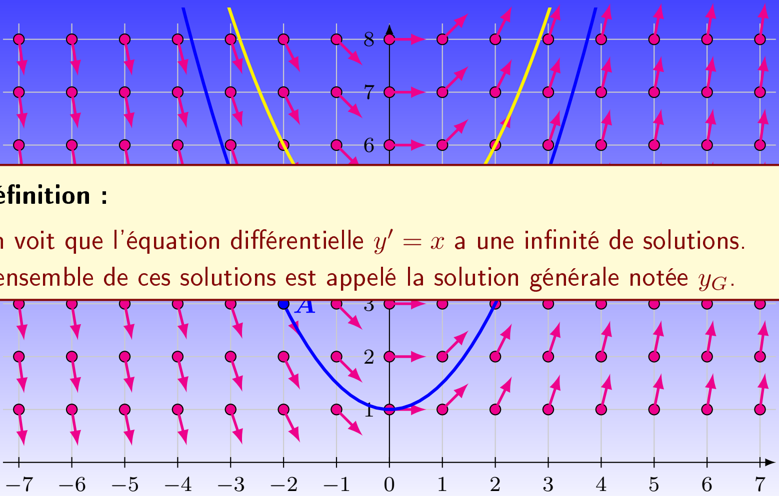
Considérons l'équation différentielle $y' = x$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



Considérons l'équation différentielle $y' = x$.

- l'inconnue est une fonction y.
- l'équation nous dit que sa dérivée y' est égale à son abscisse x.



Définition :

On voit que l'équation différentielle $y' = x$ a une infinité de solutions.
L'ensemble de ces solutions est appelé la solution générale notée y_G.

Trouver la solution générale de $y' = x$ revient à

Trouver la solution générale de $y' = x$ revient à déterminer les primitives de x :

$$y_G(x) =$$

Trouver la solution générale de $y' = x$ revient à déterminer les primitives de x :

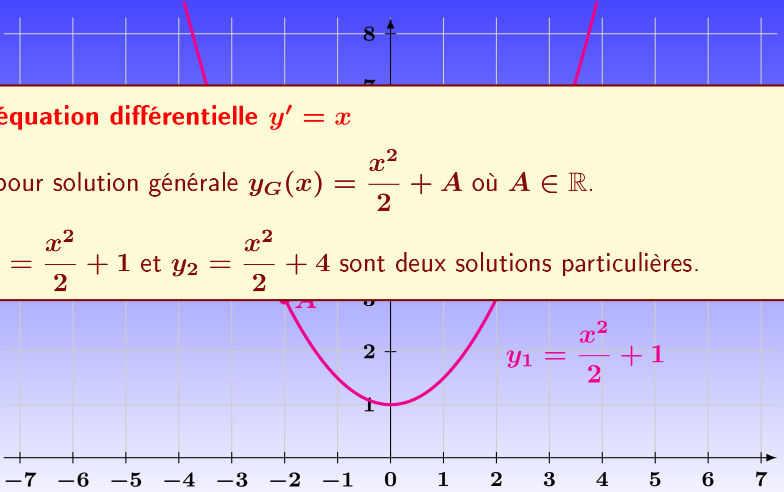
$$y_G(x) = \int x \, \mathrm{d}x =$$

Trouver la solution générale de $y' = x$ revient à déterminer les primitives de x :

$$y_G(x) = \int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + A \text{ où } A \in \mathbb{R}.$$

Trouver la solution générale de $y' = x$ revient à déterminer les primitives de x :

$$y_G(x) = \int x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + A \text{ où } A \in \mathbb{R}.$$



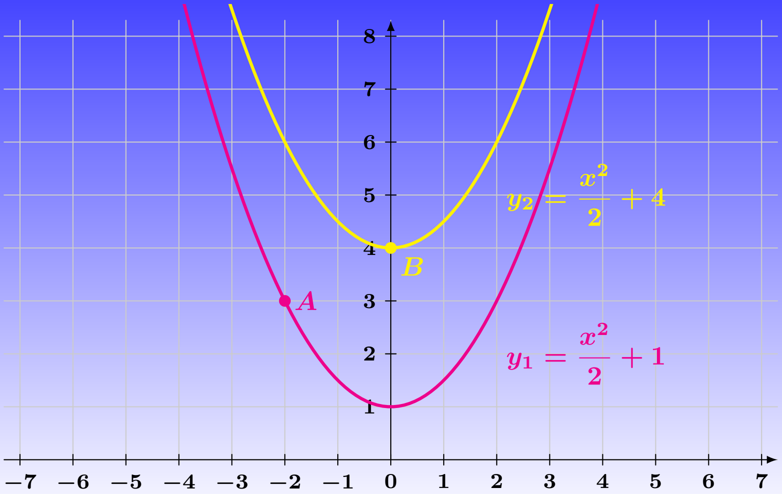
L'équation différentielle $y' = x$

a pour solution générale $y_G(x) = \frac{x^2}{2} + A$ où $A \in \mathbb{R}$.

$y_1 = \frac{x^2}{2} + 1$ et $y_2 = \frac{x^2}{2} + 4$ sont deux solutions particulières.

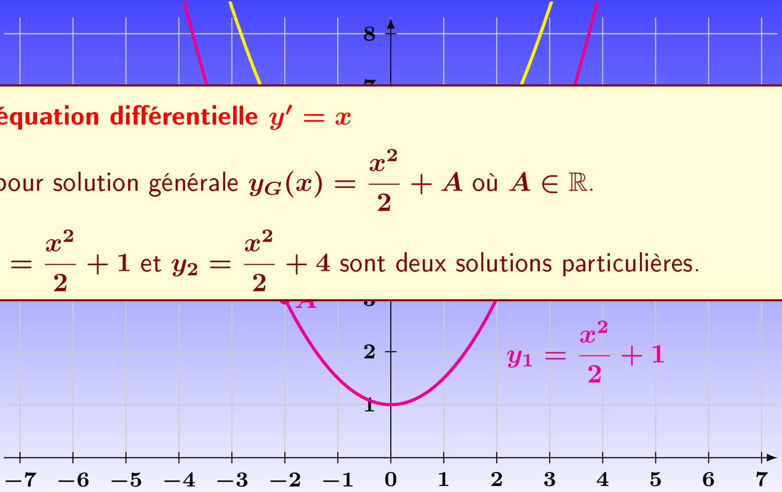
Trouver la solution générale de $y' = x$ revient à déterminer les primitives de x :

$$y_G(x) = \int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + A \text{ où } A \in \mathbb{R}.$$



Trouver la solution générale de $y' = x$ revient à déterminer les primitives de x :

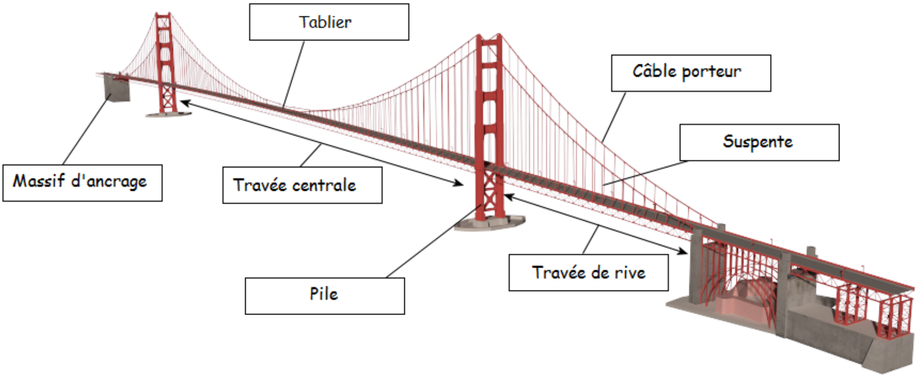
$$y_G(x) = \int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + A \text{ où } A \in \mathbb{R}.$$



L'équation différentielle $y' = x$

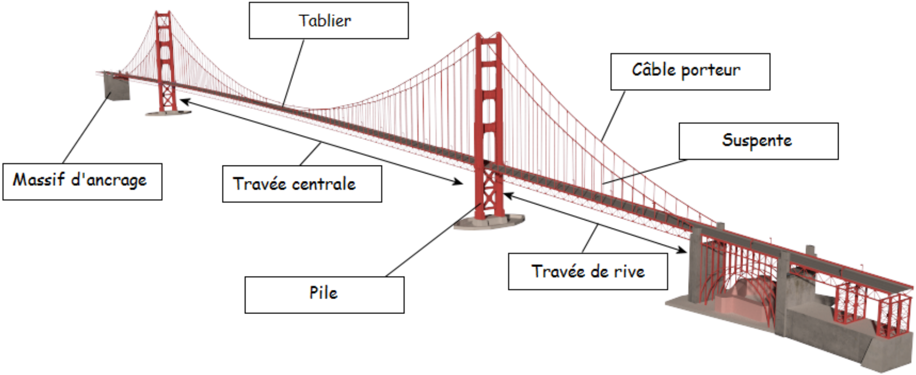
a pour solution générale $y_G(x) = \frac{x^2}{2} + A$ où $A \in \mathbb{R}$.

$y_1 = \frac{x^2}{2} + 1$ et $y_2 = \frac{x^2}{2} + 4$ sont deux solutions particulières.

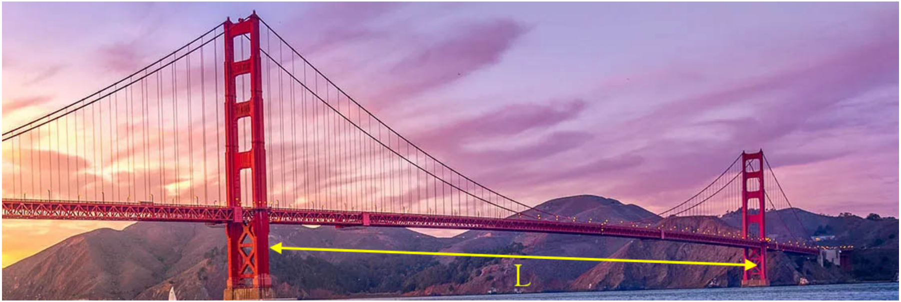


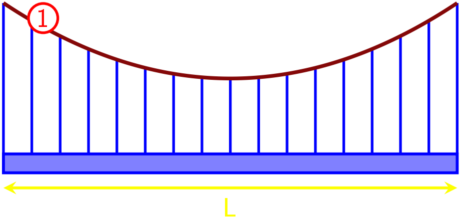
Le tablier d'un pont est la structure porteuse qui supporte les charges du trafic routier et les transmet aux éléments de suspension, ici les

Le Golden Gate

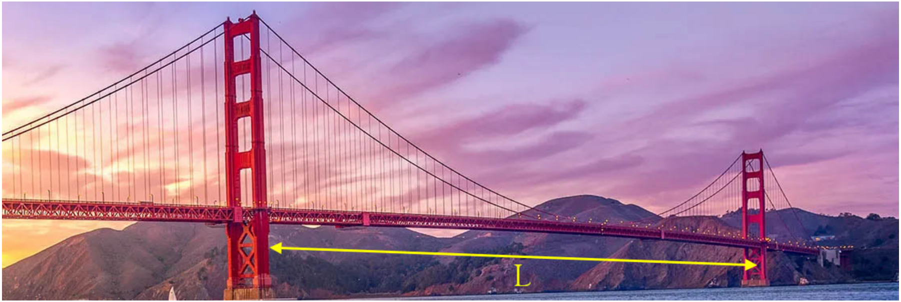


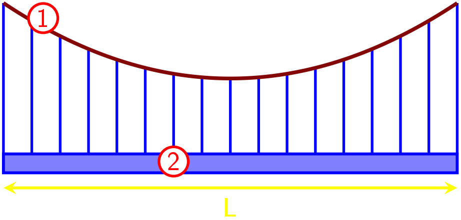
Le tablier d'un pont est la structure porteuse qui supporte les charges du trafic routier et les transmet aux éléments de suspension, ici les suspentes.



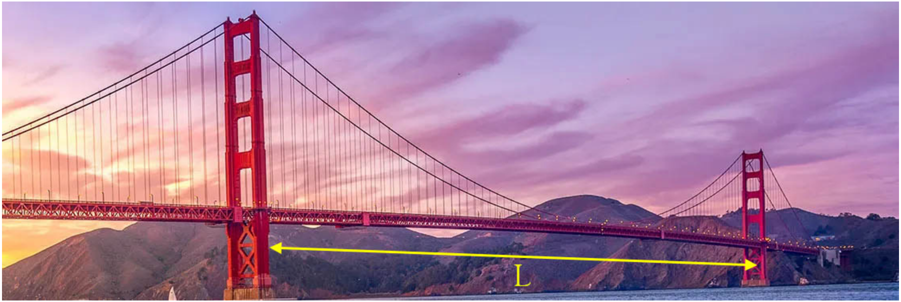


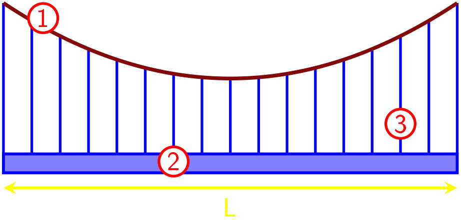
Nous allons rechercher la fonction représentant le câble principal 1



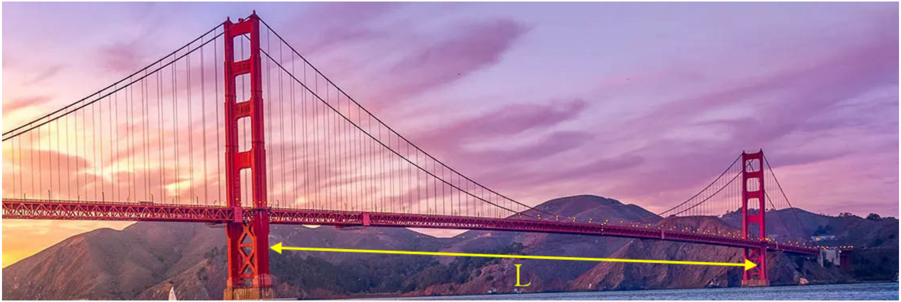


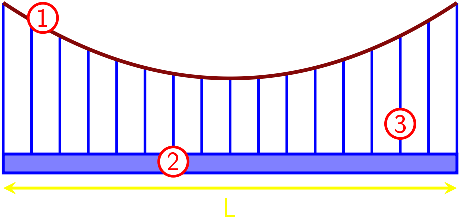
Nous allons rechercher la fonction représentant le câble principal 1 relié au tablier 2





Nous allons rechercher la fonction représentant le câble principal 1 relié au tablier 2 par les suspentes 3





Nous allons rechercher la fonction représentant le câble principal 1 relié au tablier 2 par les suspentes 3

Cette fonction sera la solution d'une équation différentielle.

On recherche une équation différentielle dont les solutions sont notées y.

On recherche une équation différentielle dont les solutions sont notées y.

On se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où $\overrightarrow{j}$ est un vecteur vertical dirigé vers le haut (opposé au champ de pesanteur).

On recherche une équation différentielle dont les solutions sont notées $\boldsymbol{y}$.

On se place dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où $\overrightarrow{j}$ est un vecteur vertical dirigé vers le haut (opposé au champ de pesanteur).

Nous découpons le câble porteur en petits morceaux, chaque morceau étant compris entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$.

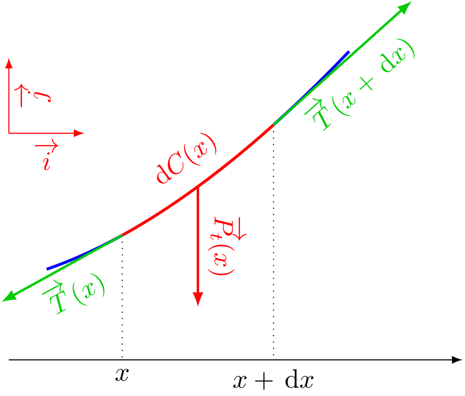
On recherche une équation différentielle dont les solutions sont notées $\boldsymbol{y}$.

On se place dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où $\overrightarrow{j}$ est un vecteur vertical dirigé vers le haut (opposé au champ de pesanteur).

Nous découpons le câble porteur en petits morceaux, chaque morceau étant compris entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Ici $\mathrm{d}x$ désigne un réel aussi petit que l'on veut (infinitésimal).

On recherche une équation différentielle dont les solutions sont notées $\boldsymbol{y}$.

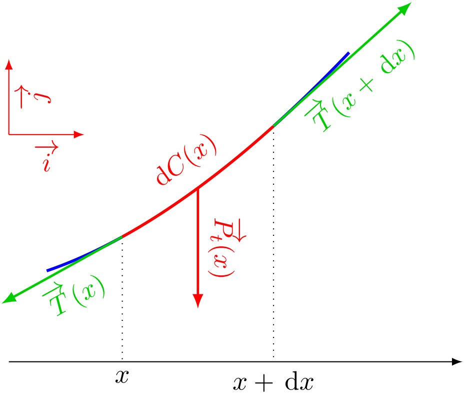
On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{j}$ est un vecteur vertical dirigé vers le haut (opposé au champ de pesanteur).
Nous découpons le câble porteur en petits morceaux, chaque morceau étant compris entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Ici $\mathrm{d}x$ désigne un réel aussi petit que l'on veut (infinitésimal). Nous noterons $\mathrm{d}C(x)$ le morceau infinitésimal du câble compris entre x et $x + \mathrm{d}x$.



- Le poids du câble $\vec{P_c}$ négligeable devant celui du tablier $\boldsymbol{\vec{P_t}}$

On recherche une équation différentielle dont les solutions sont notées $\boldsymbol{y}$.

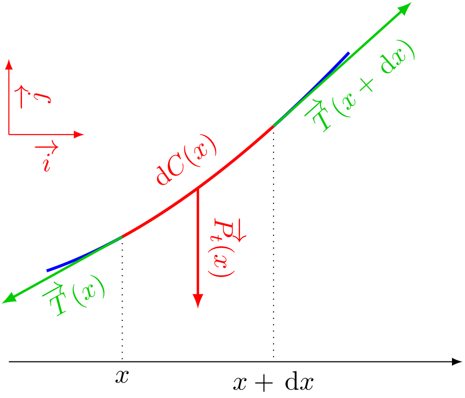
On se place dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où $\overrightarrow{j}$ est un vecteur vertical dirigé vers le haut (opposé au champ de pesanteur).
Nous découpons le câble porteur en petits morceaux, chaque morceau étant compris entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Ici $\mathrm{d}x$ désigne un réel aussi petit que l'on veut (infinitésimal). Nous noterons $\mathrm{d}C(x)$ le morceau infinitésimal du câble compris entre x et $x + \mathrm{d}x$.



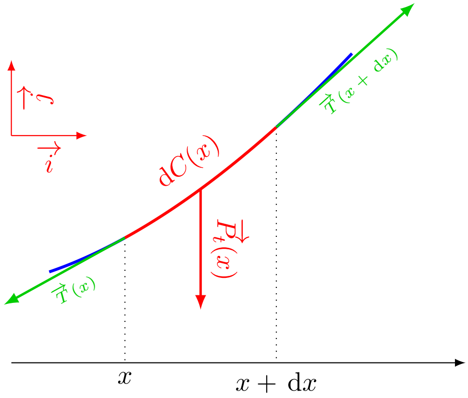
- Le poids du câble $\overrightarrow{P_c}$ négligeable devant celui du tablier $\overrightarrow{\boldsymbol{P_t}}$
- La tension en $\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x})$: force tangente à la chaînette en x.

On recherche une équation différentielle dont les solutions sont notées $\boldsymbol{y}$.

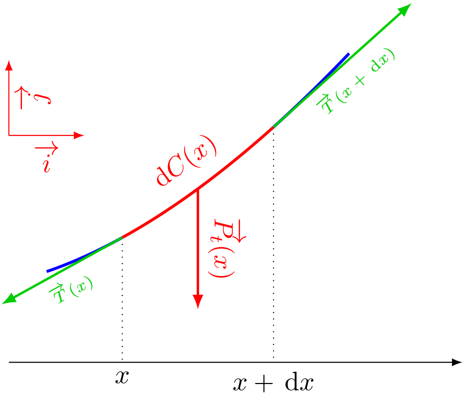
On se place dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où $\overrightarrow{j}$ est un vecteur vertical dirigé vers le haut (opposé au champ de pesanteur).
Nous découpons le câble porteur en petits morceaux, chaque morceau étant compris entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Ici $\mathrm{d}x$ désigne un réel aussi petit que l'on veut (infinitésimal). Nous noterons $\mathrm{d}C(x)$ le morceau infinitésimal du câble compris entre x et $x + \mathrm{d}x$.



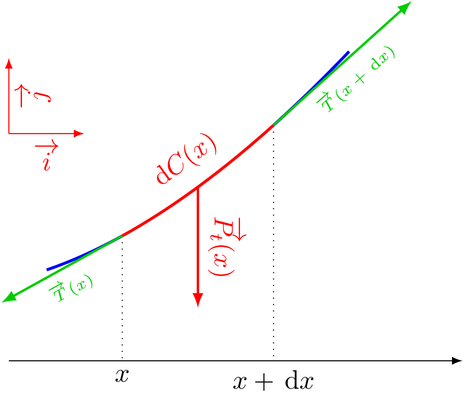
- Le poids du câble $\overrightarrow{P_c}$ négligeable devant celui du tablier $\overrightarrow{\boldsymbol{P_t}}$
- La tension en $\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x})$: force tangente à la chaînette en x.
- La tension en $\boldsymbol{x} + \mathbf{d}\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x} + \mathbf{d}\boldsymbol{x})$: force tangente à la chaînette en $x + \mathrm{d}x$.



- Le poids du tablier $\overrightarrow{P_t} =$

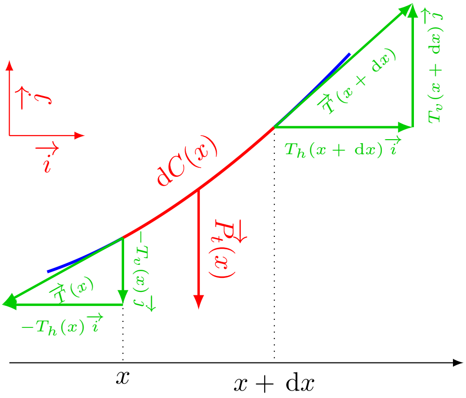


- Le poids du tablier $\vec{P_t} = -\dfrac{M}{L} g \, dx$



- Le poids du tablier $\overrightarrow{P_t} = -\dfrac{M}{L} g \, \mathrm{d}x$

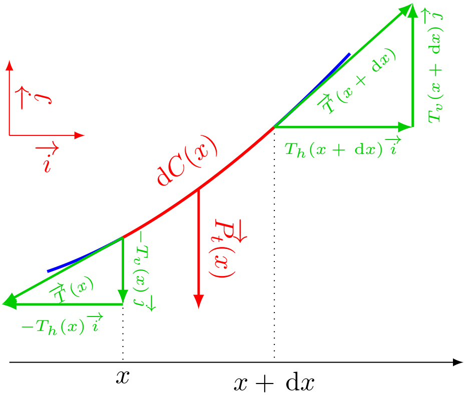
  où M est la masse du tablier supposée uniformément répartie, et L sa longueur.



- Le poids du tablier $\overrightarrow{P_t} = -\dfrac{M}{L} g \,\mathrm{d}x$

  où M est la masse du tablier supposée uniformément répartie, et L sa longueur.

- Chaque tension se décompose suivant sa composante horizontale $\overrightarrow{T_h}$ et verticale $\overrightarrow{T_v}$.

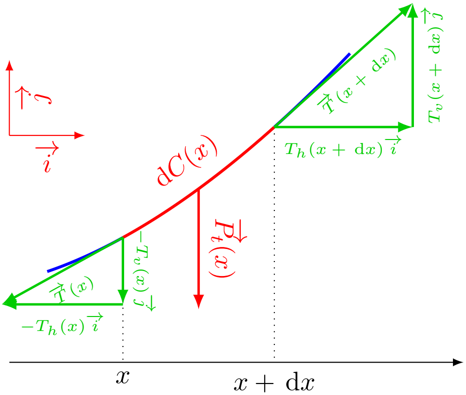


- Le poids du tablier $\vec{P_t} = -\dfrac{M}{L} g\,\mathrm{d}x$

  où M est la masse du tablier supposée uniformément répartie, et L sa longueur.

- Chaque tension se décompose suivant sa composante horizontale $\vec{T_h}$ et verticale $\vec{T_v}$.

Notre câble porteur étant en équilibre, le principe fondamental de la mécanique Newtonienne s'écrit :



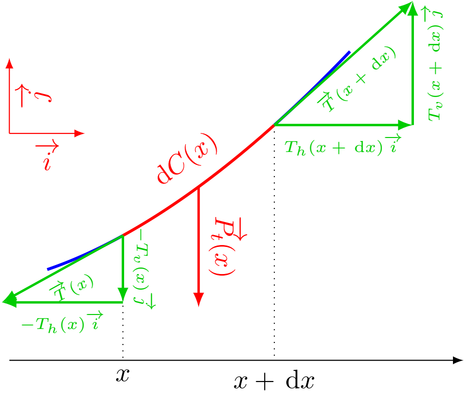
- Le poids du tablier $\vec{P_t} = -\dfrac{M}{L} g\,\mathrm{d}x$

  où M est la masse du tablier supposée uniformément répartie, et L sa longueur.

- Chaque tension se décompose suivant sa composante horizontale $\vec{T_h}$ et verticale $\vec{T_v}$.

Notre câble porteur étant en équilibre, le principe fondamental de la mécanique Newtonienne s'écrit :

$$\vec{T}(x) + \vec{P_t}(x) + \vec{T}(x + \mathrm{d}x) = \vec{0}$$



- Le poids du tablier $\vec{P_t} = -\dfrac{M}{L} g\,\mathrm{d}x$

  où M est la masse du tablier supposée uniformément répartie, et L sa longueur.

- Chaque tension se décompose suivant sa composante horizontale $\vec{T_h}$ et verticale $\vec{T_v}$.

Notre câble porteur étant en équilibre, le principe fondamental de la mécanique Newtonienne s'écrit :

$$\begin{cases} -T_h(x) + 0 + T_h(x + \mathrm{d}x) = 0 \\ -T_v(x) - \dfrac{M}{L} g\,\mathrm{d}x + T_v(x + \mathrm{d}x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -T_h(x) + 0 + T_h(x + \mathrm{d}x) = 0 \\ -T_v(x) - \dfrac{M}{L} g \,\mathrm{d}x + T_v(x + \mathrm{d}x) = 0 \end{cases}$$

- La première équation s'écrit :

$$\begin{cases} -T_h(x) + 0 + T_h(x + \mathrm{d}x) = 0 \\ -T_v(x) - \dfrac{M}{L} g \, \mathrm{d}x + T_v(x + \mathrm{d}x) = 0 \end{cases}$$

- La première équation s'écrit : $T_h(x) = T_h(x + \mathrm{d}x)$.

$$\begin{cases} -T_h(x) + 0 + T_h(x + \,\mathrm{d}x) = 0 \\ -T_v(x) - \dfrac{M}{L} g \,\mathrm{d}x + T_v(x + \,\mathrm{d}x) = 0 \end{cases}$$

- La première équation s'écrit : $T_h(x) = T_h(x + \,\mathrm{d}x)$. La tension horizontale est constante : $\boxed{T_h(x) = T_h}$

$$\begin{cases} -T_h(x) + 0 + T_h(x + \mathrm{d}x) = 0 \\ -T_v(x) - \dfrac{M}{L} g \, \mathrm{d}x + T_v(x + \mathrm{d}x) = 0 \end{cases}$$

- La première équation s'écrit : $T_h(x) = T_h(x + \mathrm{d}x)$. La tension horizontale est constante : $\boxed{T_h(x) = T_h}$
- La seconde équation s'écrit :

$$T_v(x + \mathrm{d}x) - T_v(x) = \frac{M}{L} g \, \mathrm{d}x$$

$$\begin{cases} -T_h(x) + 0 + T_h(x + \,\mathrm{d}x) = 0 \\ -T_v(x) - \dfrac{M}{L} g \,\mathrm{d}x + T_v(x + \,\mathrm{d}x) = 0 \end{cases}$$

- La première équation s'écrit : $T_h(x) = T_h(x + \,\mathrm{d}x)$. La tension horizontale est constante : $\boxed{T_h(x) = T_h}$
- La seconde équation s'écrit :

$$T_v(x + \,\mathrm{d}x) - T_v(x) = \frac{M}{L} g \,\mathrm{d}x$$

$$\frac{T_v(x + \,\mathrm{d}x) - T_v(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{M}{L} g$$

$$\begin{cases} -T_h(x) + 0 + T_h(x + \mathrm{d}x) = 0 \\ -T_v(x) - \dfrac{M}{L} g \, \mathrm{d}x + T_v(x + \mathrm{d}x) = 0 \end{cases}$$

- La première équation s'écrit : $T_h(x) = T_h(x + \mathrm{d}x)$. La tension horizontale est constante : $\boxed{T_h(x) = T_h}$
- La seconde équation s'écrit :

$$\begin{aligned} T_v(x + \mathrm{d}x) - T_v(x) &= \frac{M}{L} g \, \mathrm{d}x \\ \frac{T_v(x + \mathrm{d}x) - T_v(x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{M}{L} g \\ T_v'(x) &= \frac{M}{L} g \end{aligned}$$

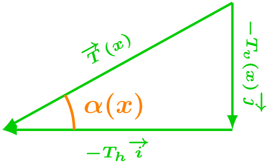
- La première équation s'écrit aussi : $\boxed{T_h(x) = T_h}$

- La seconde équation s'écrit : $T_v'(x) = \dfrac{M}{L}g$

- La première équation s'écrit aussi : $\boxed{T_h(x) = T_h}$

- La seconde équation s'écrit : $T_v'(x) = \dfrac{M}{L} g$

  Notons $\alpha(x)$ l'angle représenté sur la figure ci-dessous :

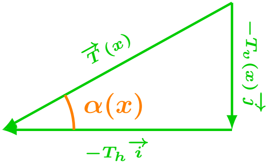


$$\tan(\alpha(x)) = y'(x)$$

- La première équation s'écrit aussi : $\boxed{T_h(x) = T_h}$

- La seconde équation s'écrit : $T_v'(x) = \dfrac{M}{L} g$

  Notons $\alpha(x)$ l'angle représenté sur la figure ci-dessous :



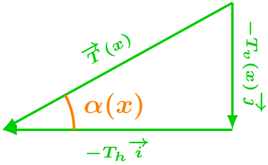
$$\tan\big(\alpha(x)\big) = y'(x)$$

$$\frac{T_v(x)}{T_h(x)} = y'(x)$$

- La première équation s'écrit aussi : $\boxed{T_h(x) = T_h}$

- La seconde équation s'écrit : $T_v'(x) = \dfrac{M}{L} g$

  Notons $\alpha(x)$ l'angle représenté sur la figure ci-dessous :

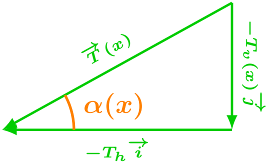


$$\begin{aligned}
\tan(\alpha(x)) &= y'(x) \\
\frac{T_v(x)}{T_h(x)} &= y'(x) \\
T_v(x) &= T_h y'(x)
\end{aligned}$$

- La première équation s'écrit aussi : $\boxed{T_h(x) = T_h}$

- La seconde équation s'écrit : $T_v'(x) = \dfrac{M}{L} g$

  Notons $\alpha(x)$ l'angle représenté sur la figure ci-dessous :



$$\tan(\alpha(x)) = y'(x)$$

$$\frac{T_v(x)}{T_h(x)} = y'(x)$$

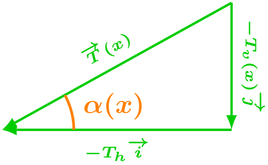
$$T_v(x) = T_h y'(x)$$

$$T_v'(x) = T_h y''(x)$$

II. Détermination de l'équation différentielle

- La première équation s'écrit aussi : $\boxed{T_h(x) = T_h}$
- La seconde équation s'écrit : $T_v'(x) = \dfrac{M}{L} g$

  Notons $\alpha(x)$ l'angle représenté sur la figure ci-dessous :



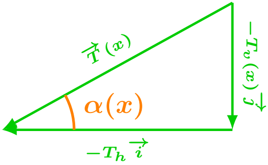
$$\begin{aligned}
\tan\left(\alpha(x)\right) &= y'(x) \\
\frac{T_v(x)}{T_h(x)} &= y'(x) \\
T_v(x) &= T_h y'(x) \\
T_v'(x) &= T_h y''(x)
\end{aligned}$$

donc $y''(x) =$

- La première équation s'écrit aussi : $\boxed{T_h(x) = T_h}$

- La seconde équation s'écrit : $T_v'(x) = \frac{M}{L} g$

  Notons $\alpha(x)$ l'angle représenté sur la figure ci-dessous :



$$\tan\left(\alpha(x)\right) = y'(x)$$

$$\frac{T_v(x)}{T_h(x)} = y'(x)$$

$$T_v(x) = T_h y'(x)$$

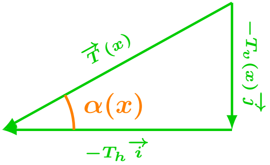
$$T_v'(x) = T_h y''(x)$$

donc $y''(x) = \dfrac{T_v'(x)}{T_h} =$

- La première équation s'écrit aussi : $\boxed{T_h(x) = T_h}$

- La seconde équation s'écrit : $T_v'(x) = \dfrac{M}{L} g$

  Notons $\alpha(x)$ l'angle représenté sur la figure ci-dessous :



$$
\begin{aligned}
\tan\big(\alpha(x)\big) &= y'(x) \\
\frac{T_v(x)}{T_h(x)} &= y'(x) \\
T_v(x) &= T_h y'(x) \\
T_v'(x) &= T_h y''(x)
\end{aligned}
$$

donc $y''(x) = \dfrac{T_v'(x)}{T_h} = \dfrac{Mg}{T_h L}$

$$\boldsymbol{y''(x) = \frac{T_v'(x)}{T_h} = \frac{Mg}{T_h L}}$$

☞ $y'(x) = \displaystyle\int \frac{Mg}{T_h L}\,\mathrm{d}x =$

$$\boldsymbol{y''(x) = \frac{T_v'(x)}{T_h} = \frac{Mg}{T_h L}}$$

☞ $y'(x) = \displaystyle\int \frac{Mg}{T_h L}\,\mathrm{d}x = \frac{Mg}{T_h L} \times x + C_1$ où $C_1 \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{y''(x) = \frac{T_v'(x)}{T_h} = \frac{Mg}{T_h L}}$$

- ☞ $y'(x) = \displaystyle\int \frac{Mg}{T_h L}\,\mathrm{d}x = \frac{Mg}{T_h L} \times x + C_1$ où $C_1 \in \mathbb{R}$
- ☞ $y(x) = \displaystyle\int \left[\frac{Mg}{T_h L} \times x + C_1\right]\mathrm{d}x =$

$$\boldsymbol{y''(x) = \frac{T_v'(x)}{T_h} = \frac{Mg}{T_h L}}$$

- ☞ $y'(x) = \displaystyle\int \frac{Mg}{T_h L}\,\mathrm{d}x = \frac{Mg}{T_h L} \times x + C_1$ où $C_1 \in \mathbb{R}$
- ☞ $y(x) = \displaystyle\int \left[\frac{Mg}{T_h L} \times x + C_1\right] \mathrm{d}x = \frac{Mg}{T_h L} \times \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ où $C_2 \in \mathbb{R}$

$$y''(x) = \frac{T_v'(x)}{T_h} = \frac{Mg}{T_h L}$$

- $y'(x) = \int \frac{Mg}{T_h L}\,\mathrm{d}x = \frac{Mg}{T_h L} \times x + C_1$ où $C_1 \in \mathbb{R}$
- $y(x) = \int \left[\frac{Mg}{T_h L} \times x + C_1\right] \mathrm{d}x = \frac{Mg}{T_h L} \times \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ où $C_2 \in \mathbb{R}$

Propriété

Le câble porteur est une

$$\boldsymbol{y''(x) = \frac{T_v'(x)}{T_h} = \frac{Mg}{T_h L}}$$

- $y'(x) = \displaystyle\int \frac{Mg}{T_h L}\,\mathrm{d}x = \frac{Mg}{T_h L} \times x + C_1$ où $C_1 \in \mathbb{R}$
- $y(x) = \displaystyle\int \left[\frac{Mg}{T_h L} \times x + C_1\right] \mathrm{d}x = \frac{Mg}{T_h L} \times \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ où $C_2 \in \mathbb{R}$

Propriété

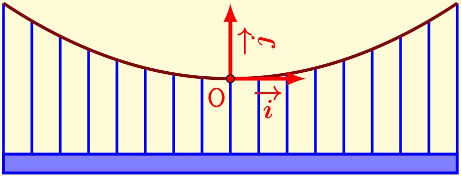
Le câble porteur est une **parabole**.

$$\boldsymbol{y''(x) = \frac{T_v'(x)}{T_h} = \frac{Mg}{T_h L}}$$

- $y'(x) = \displaystyle\int \frac{Mg}{T_h L}\,\mathrm{d}x = \frac{Mg}{T_h L} \times x + C_1$ où $C_1 \in \mathbb{R}$
- $y(x) = \displaystyle\int \left[\frac{Mg}{T_h L} \times x + C_1\right] \mathrm{d}x = \frac{Mg}{T_h L} \times \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ où $C_2 \in \mathbb{R}$

Propriété

Le câble porteur est une **parabole**. Dans un repère centré sur son sommet,



la solution de l'équation différentielle est la fonction

$$\boxed{\boldsymbol{y(x) = \frac{Mg}{2T_h L} x^2}}$$

Exercice n° 1

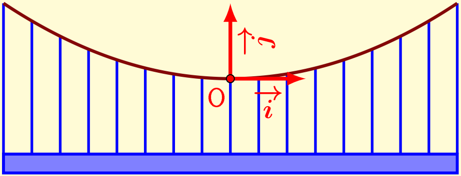
Démontre que si le repère est centré sur le sommet du câble porteur alors

$$C_1 = C_2 = 0$$

☞ $y(x) = \int \left[\frac{Mg}{T_h L} \times x + C_1 \right] \mathrm{d}x = \frac{Mg}{T_h L} \times \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ où $C_2 \in \mathbb{R}$

Propriété

Le câble porteur est une **parabole**. Dans un repère centré sur son sommet,

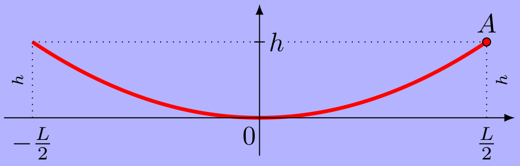


la solution de l'équation différentielle est la fonction

$$\boxed{y(x) = \frac{Mg}{2T_h L} x^2}$$

Exercice n° 2

En se plaçant dans le repère orthonormé suivant :

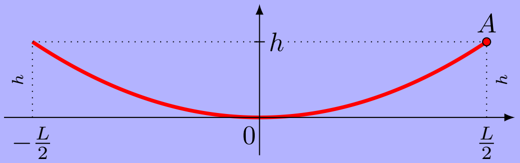


où l'équation du câble porteur est $y(x) = \dfrac{Mg}{2T_hL}x^2$, démontre que :

- la tension horizontale est $T_h =$

Exercice n° 2

En se plaçant dans le repère orthonormé suivant :

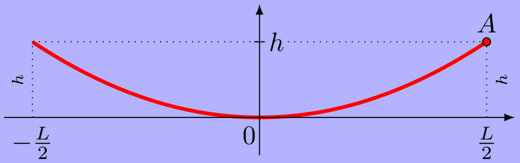


où l'équation du câble porteur est $y(x) = \dfrac{Mg}{2T_hL}x^2$, démontre que :

- la tension horizontale est $T_h = \dfrac{MgL}{8h}$

Exercice n° 2

En se plaçant dans le repère orthonormé suivant :

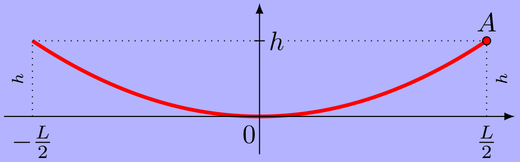


où l'équation du câble porteur est $y(x) = \dfrac{Mg}{2T_hL}x^2$, démontre que :

- la tension horizontale est $T_h = \dfrac{MgL}{8h}$
- la tension verticale en A est $T_v =$

Exercice n° 2

En se plaçant dans le repère orthonormé suivant :



où l'équation du câble porteur est $y(x) = \dfrac{Mg}{2T_hL}x^2$, démontre que :

- la tension horizontale est $T_h = \dfrac{MgL}{8h}$
- la tension verticale en A est $T_v = \dfrac{1}{2}Mg$

Vous venez de démontrer avec brio que dans le repère orthonormé centré sur le sommet du câble porteur

- *la tension horizontale est* $T_h = \dfrac{MgL}{8h}$
- *la tension verticale en* A *est* $T_v = \dfrac{1}{2}Mg$

On en déduit la

Vous venez de démontrer avec brio que dans le repère orthonormé centré sur le sommet du câble porteur

- *la tension horizontale est* $T_h = \dfrac{MgL}{8h}$
- *la tension verticale en* A *est* $T_v = \dfrac{1}{2}Mg$

On en déduit la

Propriété

La tension aux extrémités du câble porteur est $\boxed{T = \dfrac{Mg}{2}\sqrt{\dfrac{L^2}{16h^2} + 1}}$

Vous venez de démontrer avec brio que dans le repère orthonormé centré sur le sommet du câble porteur

- *la tension horizontale est* $T_h = \dfrac{MgL}{8h}$
- *la tension verticale en* A *est* $T_v = \dfrac{1}{2}Mg$

On en déduit la

Propriété

La tension aux extrémités du câble porteur est $\boxed{T = \dfrac{Mg}{2}\sqrt{\dfrac{L^2}{16h^2}+1}}$

Démonstration

$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} =$

Vous venez de démontrer avec brio que dans le repère orthonormé centré sur le sommet du câble porteur

- *la tension horizontale est* $T_h = \dfrac{MgL}{8h}$
- *la tension verticale en* A *est* $T_v = \dfrac{1}{2}Mg$

On en déduit la

Propriété

La tension aux extrémités du câble porteur est $\boxed{T = \dfrac{Mg}{2}\sqrt{\dfrac{L^2}{16h^2} + 1}}$

Démonstration

$$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = \sqrt{\frac{M^2g^2L^2}{64h^2} + \frac{1}{4}M^2g^2} =$$

Vous venez de démontrer avec brio que dans le repère orthonormé centré sur le sommet du câble porteur

- *la tension horizontale est* $T_h = \dfrac{MgL}{8h}$
- *la tension verticale en* A *est* $T_v = \dfrac{1}{2}Mg$

On en déduit la

Propriété

La tension aux extrémités du câble porteur est $\boxed{T = \dfrac{Mg}{2}\sqrt{\dfrac{L^2}{16h^2} + 1}}$

Démonstration

$$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = \sqrt{\frac{M^2g^2L^2}{64h^2} + \frac{1}{4}M^2g^2} = Mg\sqrt{\frac{L^2}{64h^2} + \frac{1}{4}}$$

$$=$$

Vous venez de démontrer avec brio que dans le repère orthonormé centré sur le sommet du câble porteur

- *la tension horizontale est* $T_h = \dfrac{MgL}{8h}$
- *la tension verticale en* A *est* $T_v = \dfrac{1}{2}Mg$

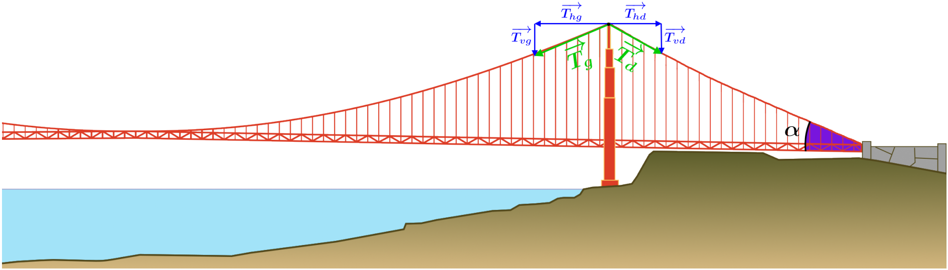
On en déduit la

Propriété

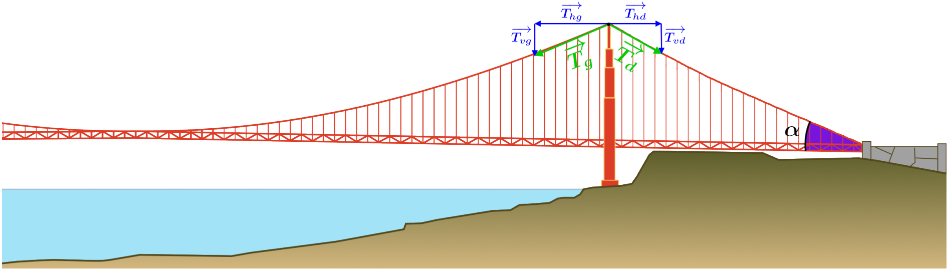
La tension aux extrémités du câble porteur est $\boxed{T = \dfrac{Mg}{2}\sqrt{\dfrac{L^2}{16h^2}+1}}$

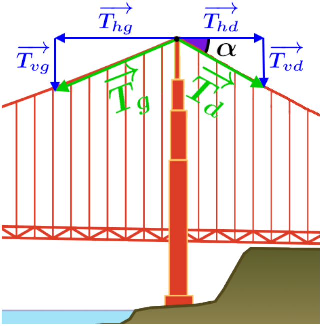
Démonstration

$$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = \sqrt{\frac{M^2g^2L^2}{64h^2} + \frac{1}{4}M^2g^2} = Mg\sqrt{\frac{L^2}{64h^2}+\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{Mg}{2}\sqrt{\frac{L^2}{16h^2}+1}$$

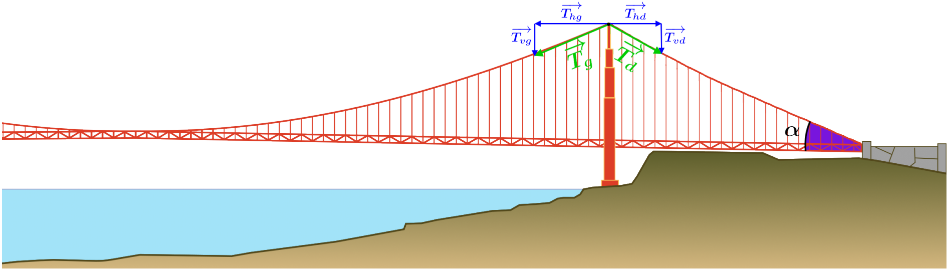


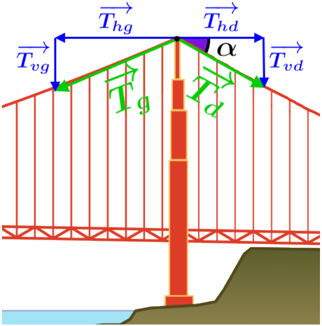
Le rôle essentiel du câble porteur est de transmettre aux appuis les efforts en tension aux piles du pont.





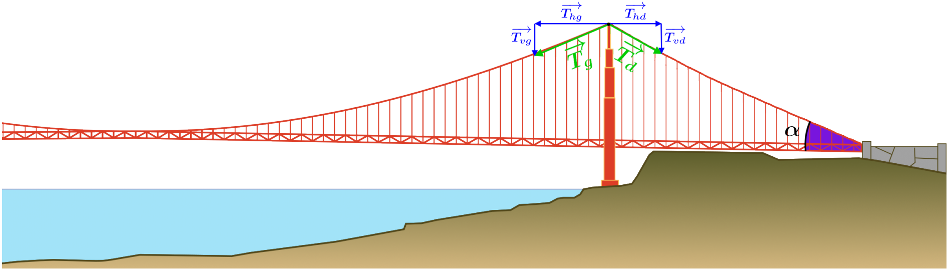
Dans la représentation ci-dessus, le câble porteur exerce sur la pile une tension $\overrightarrow{T_g}$ ayant une composante horizontale $\overrightarrow{T_{hg}}$ et une composante verticale $\overrightarrow{T_{vg}}$.

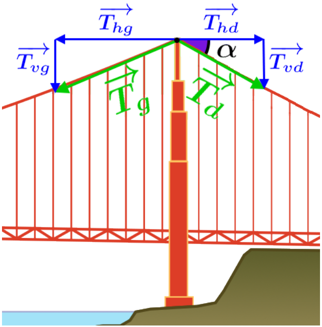




Dans la représentation ci-dessus, le câble porteur exerce sur la pile une tension $\overrightarrow{T_g}$ ayant une composante horizontale $\overrightarrow{T_{hg}}$ et une composante verticale $\overrightarrow{T_{vg}}$.

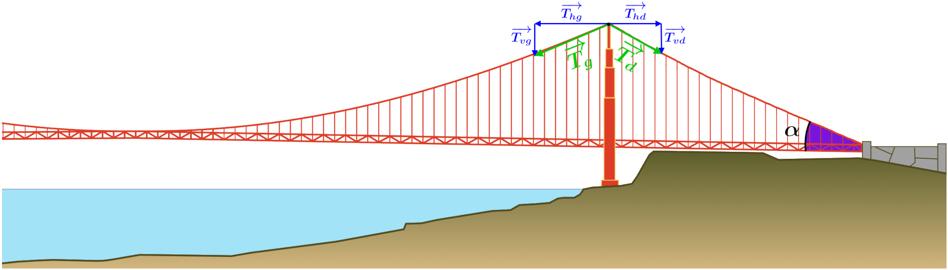
Le câble d'ancrage, que nous supposons par facilité tendu et rectiligne,

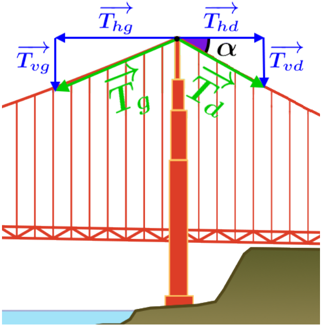




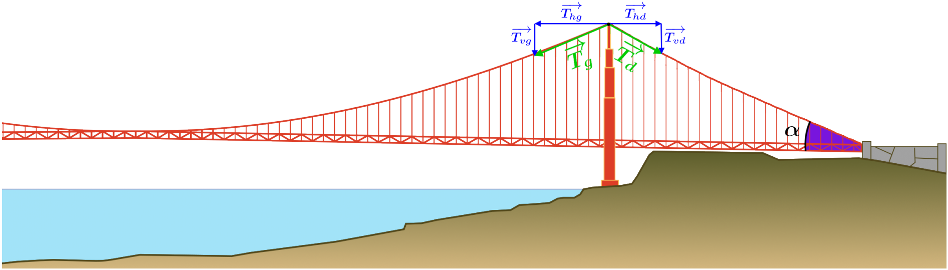
Dans la représentation ci-dessus, le câble porteur exerce sur la pile une tension $\overrightarrow{T_g}$ ayant une composante horizontale $\overrightarrow{T_{hg}}$ et une composante verticale $\overrightarrow{T_{vg}}$.

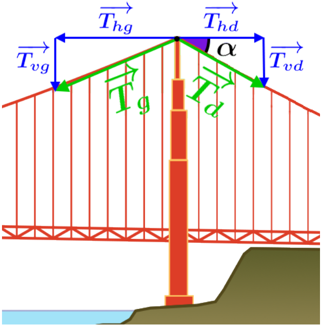
Le câble d'ancrage, que nous supposons par facilité tendu et rectiligne, répond en exerçant une tension $\overrightarrow{T_d}$ ayant une composante horizontale $\overrightarrow{T_{hd}}$ et une composante verticale $\overrightarrow{T_{vd}}$.





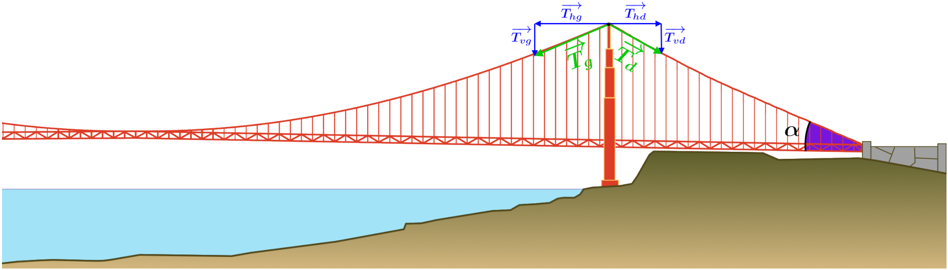
Nos câbles étant en équilibre, la mécanique newtonienne nous dit :

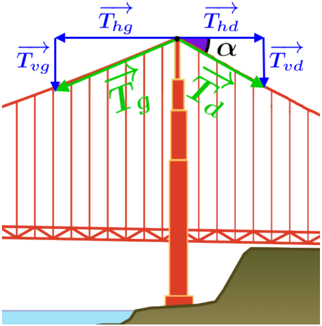




Nos câbles étant en équilibre, la mécanique newtonienne nous dit :

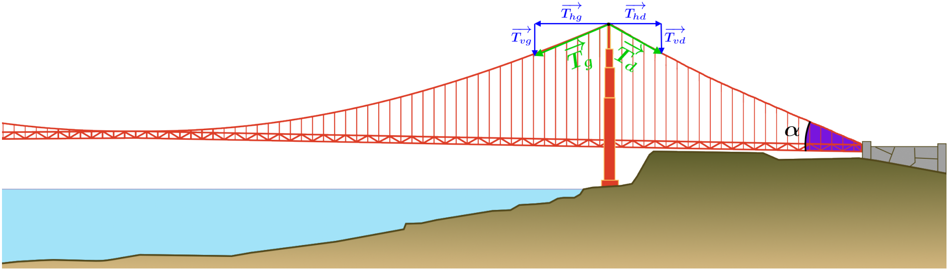
- $\boldsymbol{T_{hd} = T_{hg} =}$

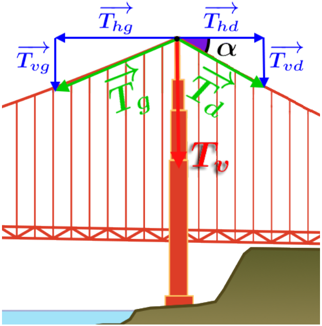




Nos câbles étant en équilibre, la mécanique newtonienne nous dit :

- $T_{hd} = T_{hg} = \dfrac{MgL}{8h}$

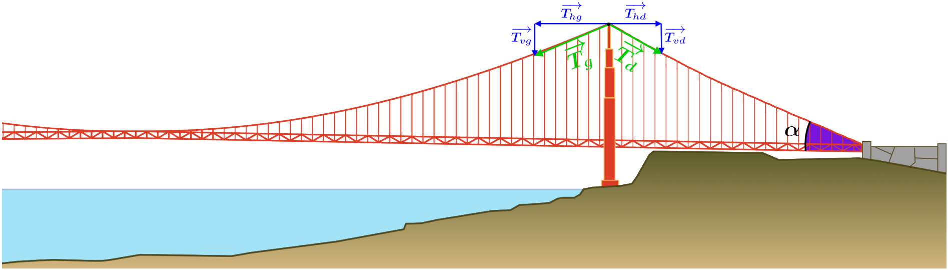


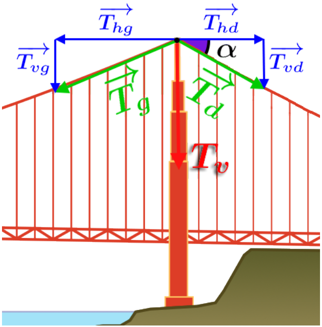


Nos câbles étant en équilibre, la mécanique newtonienne nous dit :

- $T_{hd} = T_{hg} = \dfrac{MgL}{8h}$
- La tension totale sur la pile est :

$$T_v = T_{vg} + T_{vd} =$$



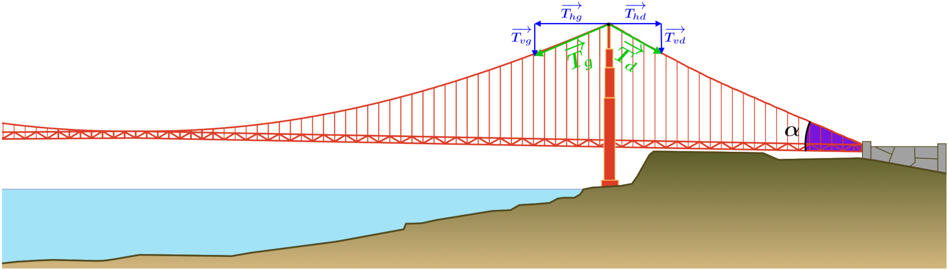


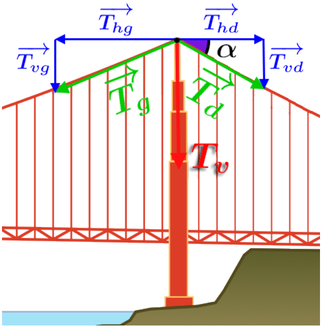
Nos câbles étant en équilibre, la mécanique newtonienne nous dit :

- $T_{hd} = T_{hg} = \dfrac{MgL}{8h}$
- La tension totale sur la pile est :

$$T_v = T_{vg} + T_{vd} = \frac{Mg}{2} + T_{vd}$$

$$T_{vd} = T_{hd} \times$$



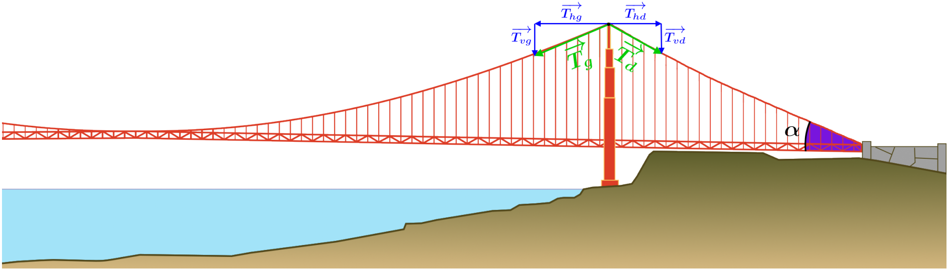


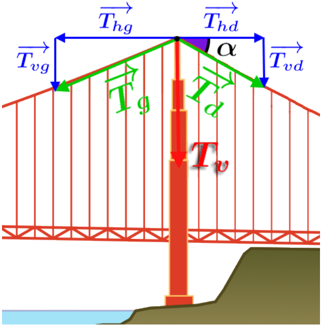
Nos câbles étant en équilibre, la mécanique newtonienne nous dit :

- $T_{hd} = T_{hg} = \dfrac{MgL}{8h}$
- La tension totale sur la pile est :

$$T_v = T_{vg} + T_{vd} = \frac{Mg}{2} + T_{vd}$$

$$T_{vd} = T_{hd} \times \tan(\alpha) =$$



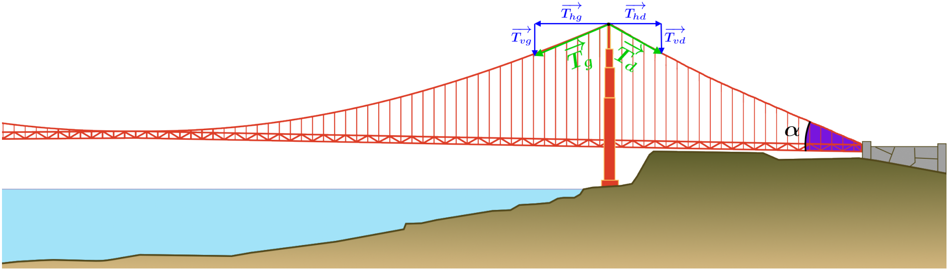


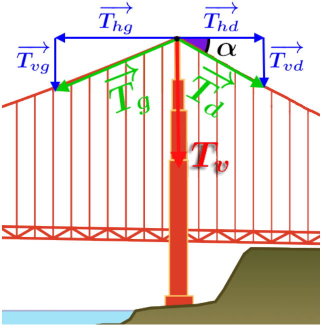
Nos câbles étant en équilibre, la mécanique newtonienne nous dit :

- $T_{hd} = T_{hg} = \dfrac{MgL}{8h}$
- La tension totale sur la pile est :

$$T_v = T_{vg} + T_{vd} = \frac{Mg}{2} + T_{vd}$$

$$T_{vd} = T_{hd} \times \tan(\alpha) = \frac{MgL}{8h}\tan(\alpha)$$



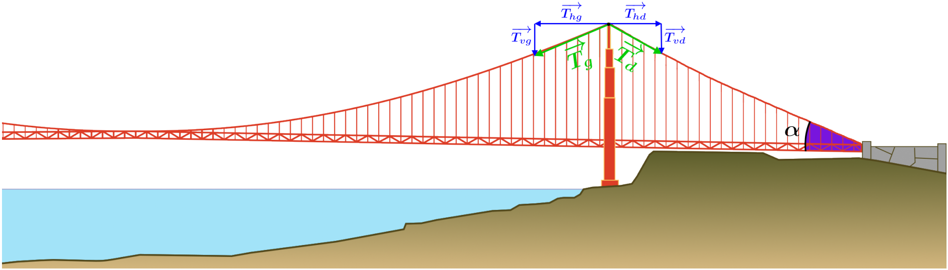


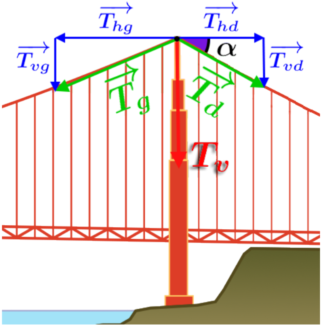
Nos câbles étant en équilibre, la mécanique newtonienne nous dit :

- $T_{hd} = T_{hg} = \dfrac{MgL}{8h}$
- La tension totale sur la pile est :

$$T_v = \frac{Mg}{2} + \frac{MgL}{8h}\tan(\alpha)$$

$$T_{vd} = T_{hd} \times \tan(\alpha) = \frac{MgL}{8h}\tan(\alpha)$$

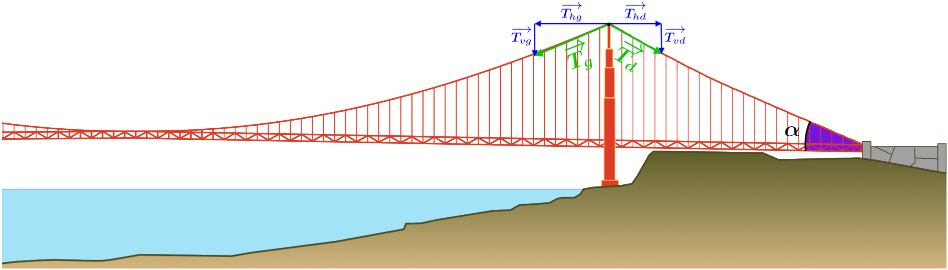


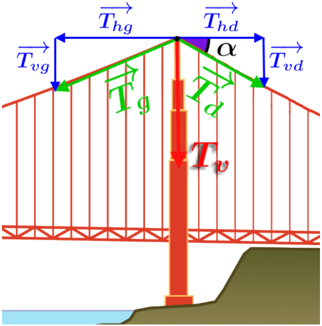


Nos câbles étant en équilibre, la mécanique newtonienne nous dit :

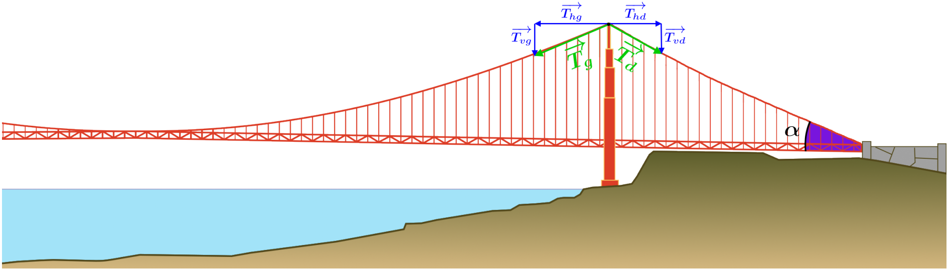
- $T_{hd} = T_{hg} = \dfrac{MgL}{8h}$
- La tension totale sur la pile est :

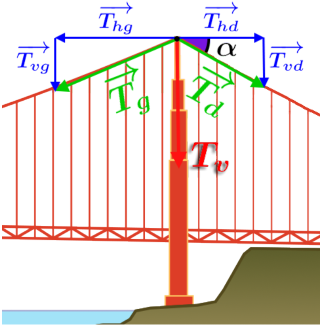
$$T_v = \frac{Mg}{2} + \frac{MgL}{8h}\tan(\alpha)$$
$$= \frac{Mg}{2}\left(1 + \frac{L\tan(\alpha)}{4h}\right)$$





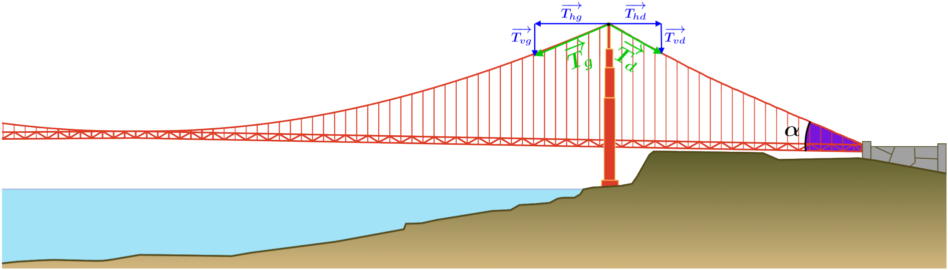
- $T_v = \dfrac{Mg}{2}\left(1 + \dfrac{L\tan(\alpha)}{4h}\right)$

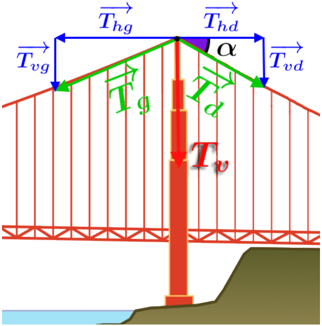




- $T_v = \dfrac{Mg}{2}\left(1 + \dfrac{L\tan(\alpha)}{4h}\right)$
- la tension sur le câble d'ancrage :

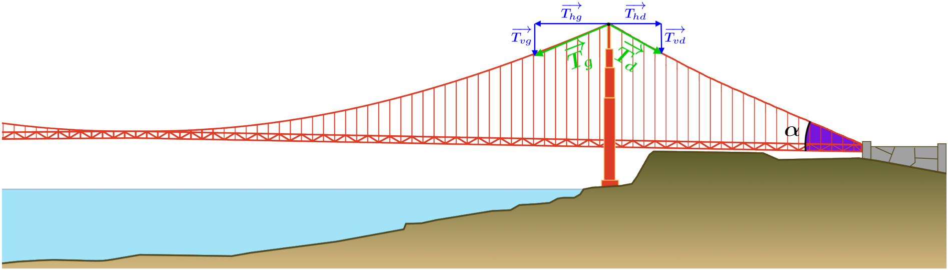
$$T_d =$$

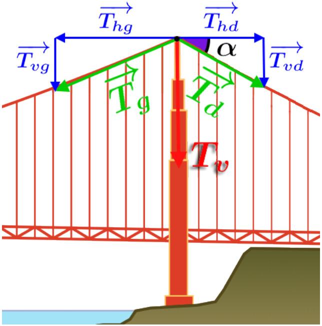




- $T_v = \dfrac{Mg}{2}\left(1 + \dfrac{L\tan(\alpha)}{4h}\right)$
- la tension sur le câble d'ancrage :

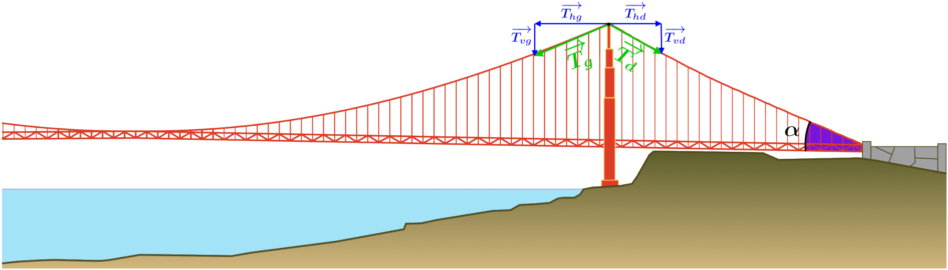
$$T_d = \frac{T_{hd}}{\cos(\alpha)} =$$





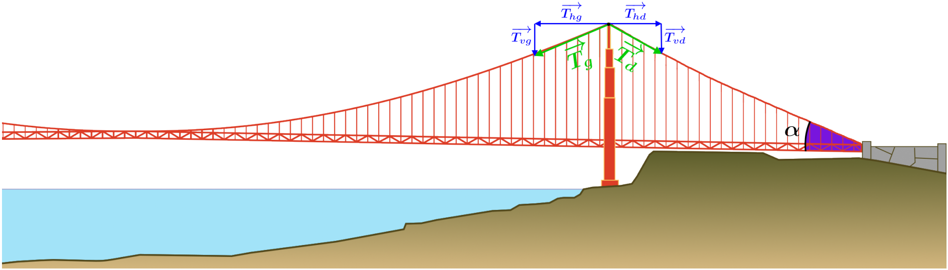
- $T_v = \dfrac{Mg}{2}\left(1 + \dfrac{L\tan(\alpha)}{4h}\right)$
- la tension sur le câble d'ancrage :

$$T_d = \frac{T_{hd}}{\cos(\alpha)} = \frac{MgL}{8h\cos(\alpha)}$$



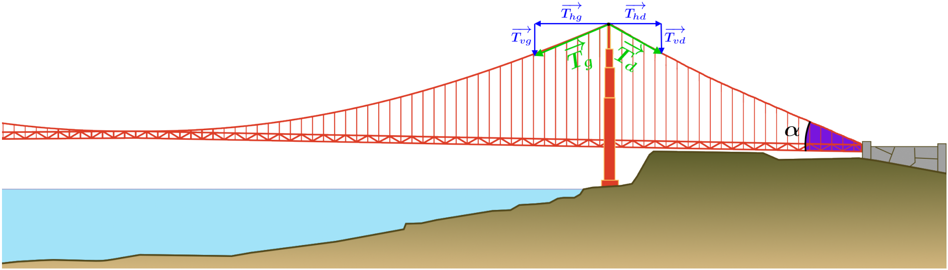
$$T_v = \frac{Mg}{2}\left(1 + \frac{L\tan(\alpha)}{4h}\right) \text{ et } T_d = \frac{MgL}{8h\cos(\alpha)}$$

Ses deux tensions sont d'autant plus petites que l'angle formé par le câble d'ancrage et le sol au massif d'ancrage, α,



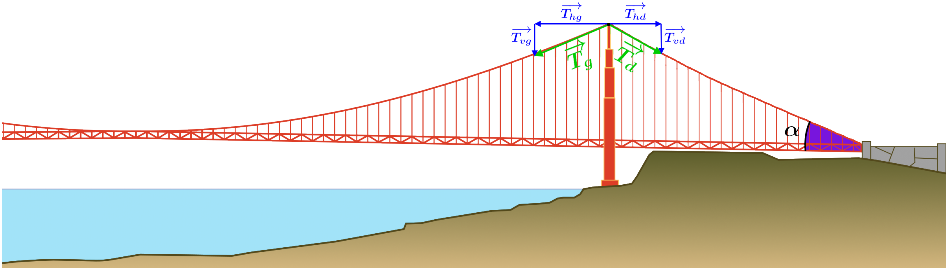
$$T_v = \frac{Mg}{2}\left(1 + \frac{L\tan(\alpha)}{4h}\right) \text{ et } T_d = \frac{MgL}{8h\cos(\alpha)}$$

Ses deux tensions sont d'autant plus petites que l'angle formé par le câble d'ancrage et le sol au massif d'ancrage, α, est



$$\boldsymbol{T_v = \frac{Mg}{2}\left(1 + \frac{L\tan(\alpha)}{4h}\right)} \text{ et } \boldsymbol{T_d = \frac{MgL}{8h\cos(\alpha)}}$$

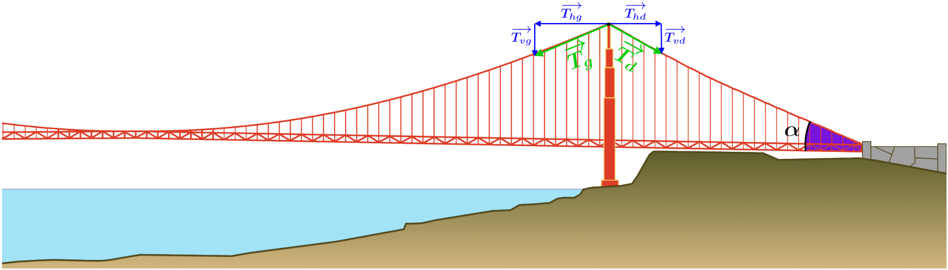
Ses deux tensions sont d'autant plus petites que l'angle formé par le câble d'ancrage et le sol au massif d'ancrage, α, est petit.



$$T_v = \frac{Mg}{2}\left(1 + \frac{L\tan(\alpha)}{4h}\right) \text{ et } T_d = \frac{MgL}{8h\cos(\alpha)}$$

Ses deux tensions sont d'autant plus petites que l'angle formé par le câble d'ancrage et le sol au massif d'ancrage, α, est petit.

Il faut donc une travée de rive la plus grande possible pour minimiser l'angle α.

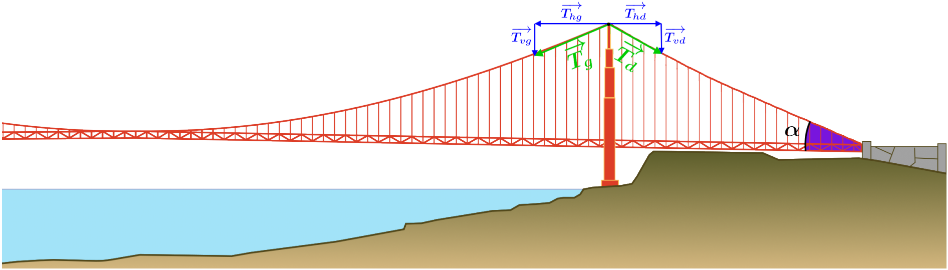


$$\boldsymbol{T_v} = \frac{\boldsymbol{Mg}}{\boldsymbol{2}}\left(\boldsymbol{1} + \frac{\boldsymbol{L\tan(\alpha)}}{\boldsymbol{4h}}\right) \text{ et } \boldsymbol{T_d} = \frac{\boldsymbol{MgL}}{\boldsymbol{8h\cos(\alpha)}}$$

Ses deux tensions sont d'autant plus petites que l'angle formé par le câble d'ancrage et le sol au massif d'ancrage, α, est petit.

Il faut donc une travée de rive la plus grande possible pour minimiser l'angle α.

Le massif d'ancrage doit assurer une stabilité parfaite.

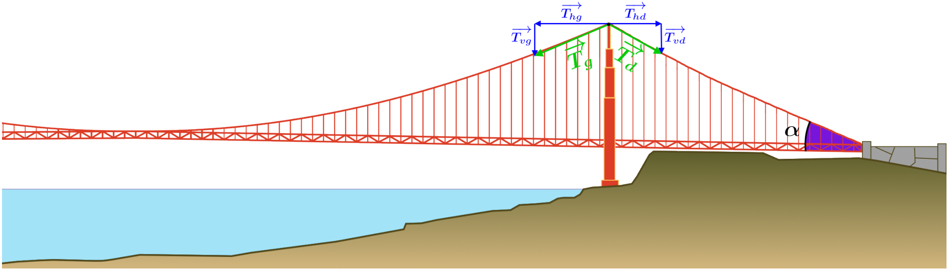


$$T_v = \frac{Mg}{2}\left(1 + \frac{L\tan(\alpha)}{4h}\right) \text{ et } T_d = \frac{MgL}{8h\cos(\alpha)}$$

Ses deux tensions sont d'autant plus petites que l'angle formé par le câble d'ancrage et le sol au massif d'ancrage, α, est petit.

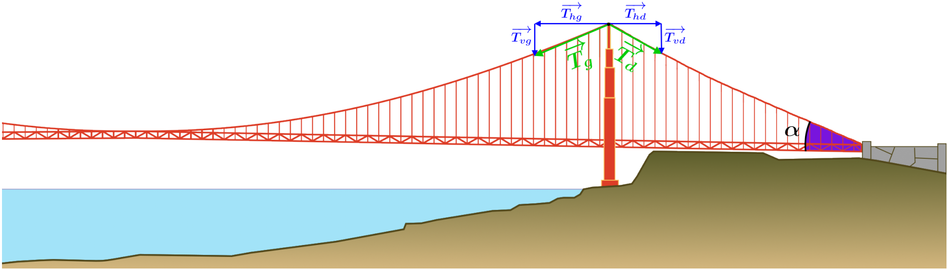
Il faut donc une travée de rive la plus grande possible pour minimiser l'angle α.

Le massif d'ancrage doit assurer une stabilité parfaite. Il nécessite la présence de massifs d'ancrage imposants et lourds, indispensables pour retenir les forces considérables qui s'exercent.



$$\boldsymbol{T_v} = \frac{\boldsymbol{Mg}}{\boldsymbol{2}}\left(\boldsymbol{1} + \frac{\boldsymbol{L\tan(\alpha)}}{\boldsymbol{4h}}\right) \text{ et } \boldsymbol{T_d} = \frac{\boldsymbol{MgL}}{\boldsymbol{8h\cos(\alpha)}}$$

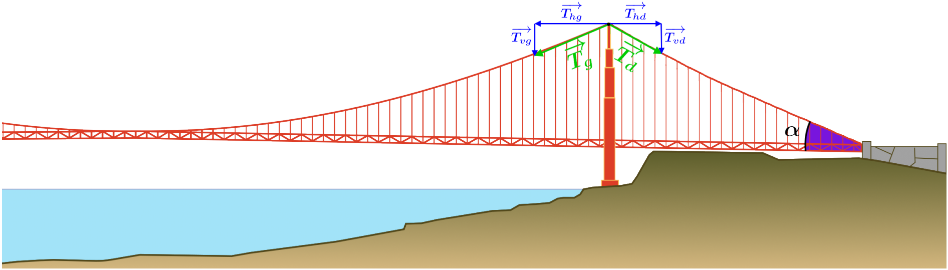
Les piles subissent donc une compression en transmettant les forces verticales ($\boldsymbol{T_v}$) aux fondations.



$$T_v = \frac{Mg}{2}\left(1 + \frac{L\tan(\alpha)}{4h}\right) \text{ et } T_d = \frac{MgL}{8h\cos(\alpha)}$$

Les piles subissent donc une compression en transmettant les forces verticales (T_v) aux fondations.

On voit que plus la flèche h est grande, plus les tensions sont petites.



$$T_v = \frac{Mg}{2}\left(1 + \frac{L\tan(\alpha)}{4h}\right) \text{ et } T_d = \frac{MgL}{8h\cos(\alpha)}$$

Les piles subissent donc une compression en transmettant les forces verticales (T_v) aux fondations.

On voit que plus la flèche h est grande, plus les tensions sont petites. Les piles doivent donc être hautes.

Le Golden Gate a deux câbles porteurs.

Le Golden Gate a deux câbles porteurs.

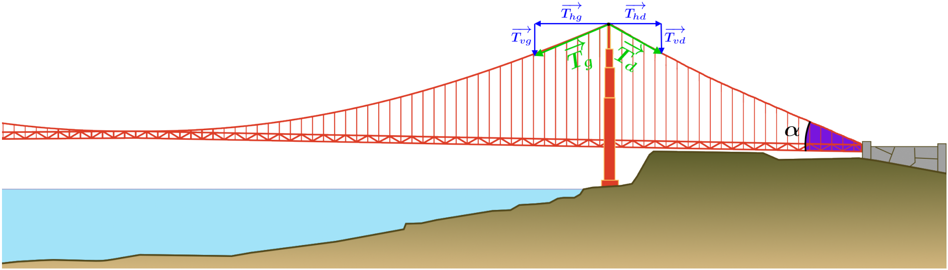
Nous allons donc répartir le poids du tablier sur ces deux câbles.

Le Golden Gate a deux câbles porteurs.

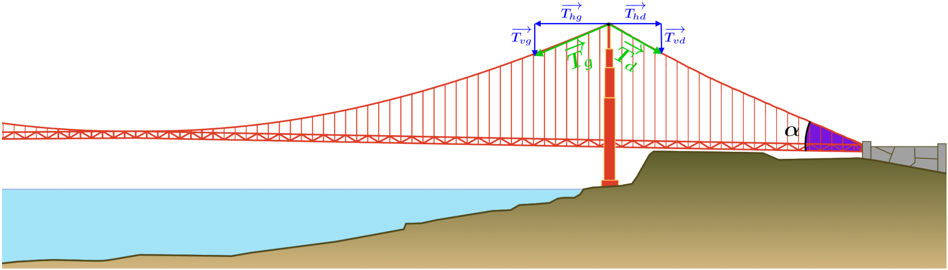
Nous allons donc répartir le poids du tablier sur ces deux câbles. La masse du tablier principale est estimée à 40600t, on prendra donc $M =$

Le Golden Gate a deux câbles porteurs.

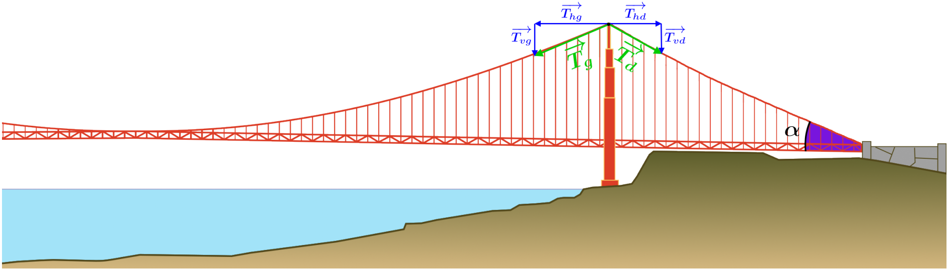
Nous allons donc répartir le poids du tablier sur ces deux câbles. La masse du tablier principale est estimée à 40600t, on prendra donc $M = 20300$t.


$\overrightarrow{T_{hg}}$
$\overrightarrow{T_{hd}}$
$\overrightarrow{T_{vg}}$
$\overrightarrow{T_{vd}}$
$\overrightarrow{T_g}$
$\overrightarrow{T_d}$
α

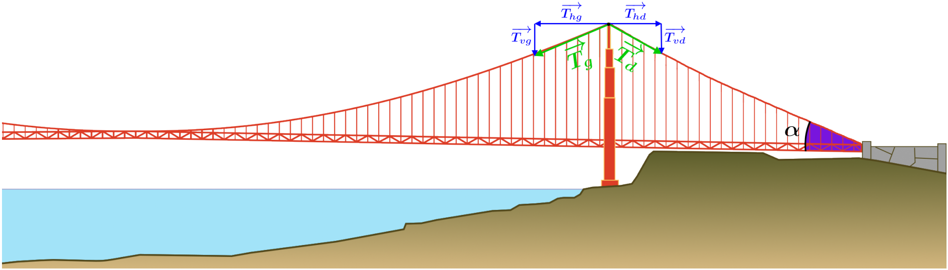
$$T_g =$$



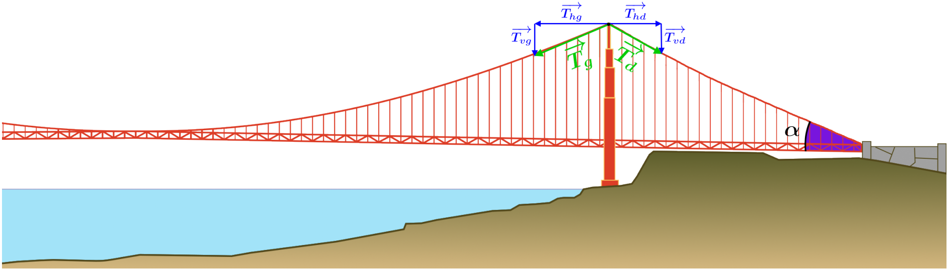
$$T_g = \frac{Mg}{2}\sqrt{\frac{L^2}{16h^2}+1},\ T_v =$$



$$T_g = \frac{Mg}{2}\sqrt{\frac{L^2}{16h^2}+1},\ T_v = \frac{Mg}{2}\left(1+\frac{L\tan(\alpha)}{4h}\right) \text{ et } T_d =$$

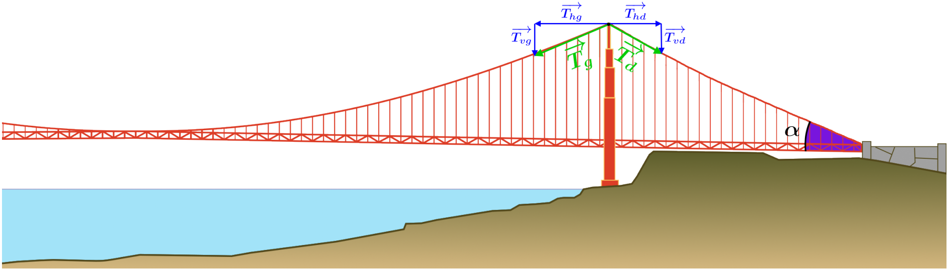


$$T_g = \frac{Mg}{2}\sqrt{\frac{L^2}{16h^2}+1},\ T_v = \frac{Mg}{2}\left(1+\frac{L\tan(\alpha)}{4h}\right) \text{ et } T_d = \frac{MgL}{8h\cos(\alpha)}$$



$$T_g = \frac{Mg}{2}\sqrt{\frac{L^2}{16h^2}+1},\ T_v = \frac{Mg}{2}\left(1+\frac{L\tan(\alpha)}{4h}\right) \text{ et } T_d = \frac{MgL}{8h\cos(\alpha)}$$

On a $L \simeq 1280$m, $h \simeq 152m$, $\alpha \simeq 19^\circ$ et $M \simeq 20300$t

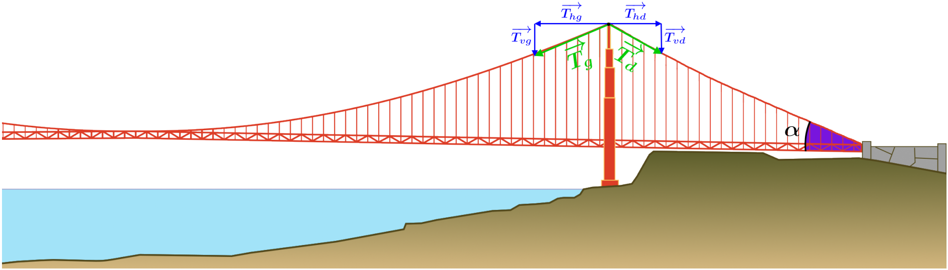


$$T_g = \frac{Mg}{2}\sqrt{\frac{L^2}{16h^2}+1},\quad T_v = \frac{Mg}{2}\left(1+\frac{L\tan(\alpha)}{4h}\right) \text{ et } T_d = \frac{MgL}{8h\cos(\alpha)}$$

On a $L \simeq 1280$m, $h \simeq 152m$, $\alpha \simeq 19°$ et $M \simeq 20300$t

On trouve :

$$T_g \simeq$$

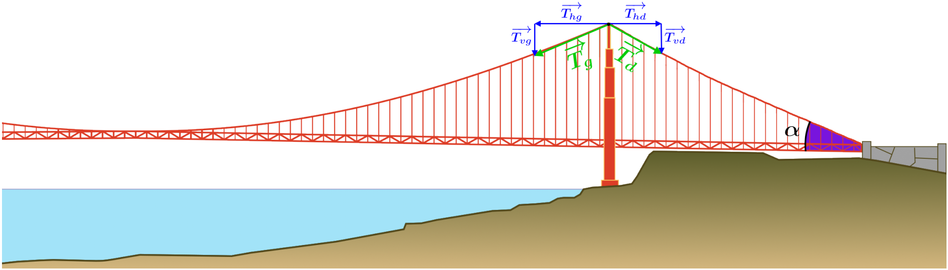


$$T_g = \frac{Mg}{2}\sqrt{\frac{L^2}{16h^2}+1},\ T_v = \frac{Mg}{2}\left(1+\frac{L\tan(\alpha)}{4h}\right) \text{ et } T_d = \frac{MgL}{8h\cos(\alpha)}$$

On a $L \simeq 1280$m, $h \simeq 152m$, $\alpha \simeq 19°$ et $M \simeq 20300$t

On trouve :

$$T_g \simeq 232000\text{kN},\ T_v \simeq$$

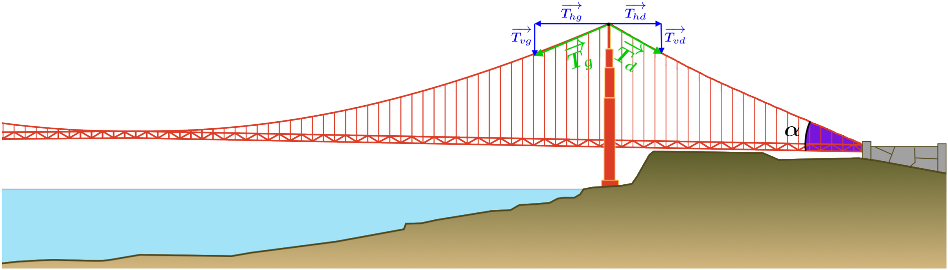


$$T_g = \frac{Mg}{2}\sqrt{\frac{L^2}{16h^2}+1},\ T_v = \frac{Mg}{2}\left(1+\frac{L\tan(\alpha)}{4h}\right) \text{ et } T_d = \frac{MgL}{8h\cos(\alpha)}$$

On a $L \simeq 1280$m, $h \simeq 152m$, $\alpha \simeq 19°$ et $M \simeq 20300$t

On trouve :

$$T_g \simeq 232000\text{kN},\ T_v \simeq 172000\text{kN, et } T_d \simeq$$



$$T_g = \frac{Mg}{2}\sqrt{\frac{L^2}{16h^2}+1},\ T_v = \frac{Mg}{2}\left(1+\frac{L\tan(\alpha)}{4h}\right) \text{ et } T_d = \frac{MgL}{8h\cos(\alpha)}$$

On a $L \simeq 1280$m, $h \simeq 152m$, $\alpha \simeq 19°$ et $M \simeq 20300$t

On trouve :

$$T_g \simeq 232000\text{kN},\ T_v \simeq 172000\text{kN},\ \text{et } T_d \simeq 222000\text{kN}$$

Le viaduc de

Le viaduc de Garabit est un pont en arc de

Le viaduc de Garabit est un pont en arc de parabole...