I. Primitives des fonctions usuelles.

Fonctions	Une primitive	Conditions
$f(x) = a$	$F(x) =$	
$f(x) = ax + b$	$F(x) =$	
$f(x) = x^3$	$F(x) =$	
$f(x) = x^n$	$F(x) =$	$n \in]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) =$	$x > 0$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$F(x) =$	$n \neq 1$ et $x \neq 0$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) =$	$x > 0$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$F(x) =$	

Fonctions	Primitives
$f(x) = x$	$F(x) =$
$f(x) = x^2$	$F(x) =$
$f(x) = x^4$	$F(x) =$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) =$
$f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$	$F(x) =$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) =$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) =$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$F(x) =$

Exemples : $\boxed{1}$ $\displaystyle\int 2\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots$ $\boxed{2}$ $\displaystyle\int 3x\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\boxed{3}$ $\displaystyle\int (3x+2)\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int x^3\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots$ $\boxed{5}$ $\displaystyle\int 4x^3\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\boxed{6}$ $\displaystyle\int (8x^3 - 3x^2)\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\boxed{7}$ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \ldots\ldots$ $\boxed{8}$ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \ldots\ldots$ $\boxed{9}$ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6} = \ldots\ldots$ $\boxed{10}$ $\displaystyle\int \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\boxed{11}$ $\displaystyle\int \left(\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\boxed{12}$ $\displaystyle\int \left(1 - 4x^3 - 6x^2 - \frac{8}{x^5}\right)\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\boxed{13}$ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ldots\ldots$ $\boxed{14}$ $\displaystyle\int \frac{4\,\mathrm{d}x}{x} = \ldots\ldots$ $\boxed{15}$ $\displaystyle\int \left(\frac{3}{x} - \frac{6x^2}{x^4} + \pi\right)\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\boxed{16}$ $\displaystyle\int \frac{5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \ldots\ldots$ $\boxed{17}$ $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\boxed{18}$ $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\boxed{19}$ $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\boxed{20}$ $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\boxed{21}$ $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x-3}\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\boxed{22}$ $\displaystyle\int \cos(2x-3)\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\boxed{23}$ $\displaystyle\int \sin(2x-3)\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

II. Forme $u'u^n$ où $n \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Rappel:

Si $n \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ alors $\displaystyle\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$

1. $\displaystyle\int 3(3x+1)^4 \,\mathrm{d}x =$ ....

2. $\displaystyle\int 16(4x+1)^3 \,\mathrm{d}x =$ ....

3. $\displaystyle\int (2x-3)^6 \,\mathrm{d}x =$ ....

III. Forme u'/u^n où $n \in \mathbb{R}^*$

Rappel:

Si $n \in \mathbb{R}^*$ alors $\displaystyle\int \frac{u'}{u^n} = \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$

1. $\displaystyle\int \frac{4}{(4x+1)^2} \,\mathrm{d}x =$ ....

2. $\displaystyle\int \frac{6}{(3x+2)^4} \,\mathrm{d}x =$ ....

3. $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} \,\mathrm{d}x =$ ....

IV. Forme u'/u

Rappel:

$\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} =$ ....

2. $\displaystyle\int \frac{2x^2}{4-x^3} \,\mathrm{d}x =$ ....

V. Forme $u'/\sqrt{u}$

Rappel:

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$$

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{20-x^2}}\,\mathrm{d}x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2. On rappelle que $\left(v^n\right)' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ Déterminons une primitive de $f(x) = \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}$.

On pose $u(x) = \dots\dots\dots$ et on a : $u'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

VI. Forme $u'\mathrm{e}^u$

Rappel:

$$\int u'\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u$$

1. $\displaystyle\int 10x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2. $\displaystyle\int \frac{x}{\mathrm{e}^{x^2}}\,\mathrm{d}x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Revoyons l'une des techniques utilisées jusqu'à présent :

$\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Elle repose sur la possibilité de faire $\dots\dots\dots$ de l'intégrale, qui est due à la

Linéarité de l'intégrale

Etant données deux fonctions f et g et un nombre réel a :

$$\int a\times f(x)\,\mathrm{d}x = \dots\dots\dots\dots \quad \text{et} \quad \int \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \dots\dots\dots\dots$$

Intégrons : $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x =$ ....

car ....

VII. Intégration par parties.

Rappel : $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x =$ ....

Formule d'intégration par parties :

$\displaystyle\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x =$ .... ou $\displaystyle\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x =$ ....

Exemples :

4 Pour calculer $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x$ on a, d'après la formule d'intégration par parties, deux possibilités :

- $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ où $\begin{cases} u'(x) = \dots\dots \\ v(x) = \dots\dots \end{cases}$ soit $\begin{cases} u(x) = \dots\dots \\ v'(x) = \dots\dots \end{cases}$

  $\displaystyle= u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x =$ ....

  .... est plus compliqué à intégrer que $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x$: ....

- $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x = \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ où $\begin{cases} u(x) = \dots\dots \\ v'(x) = \dots\dots \end{cases}$ soit $\begin{cases} u'(x) = \dots\dots \\ v(x) = \dots\dots \end{cases}$

  $\displaystyle= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x =$ ....

  ....

5 Pour calculer $\displaystyle\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x$ on a à nouveau deux possibilités :

- $\displaystyle\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ où $\begin{cases} u'(x) = \dots\dots \\ v(x) = \dots\dots \end{cases}$ soit $\begin{cases} u(x) = \dots\dots \\ v'(x) = \dots\dots \end{cases}$

  $\displaystyle= u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x =$ ....

  $=$ ....

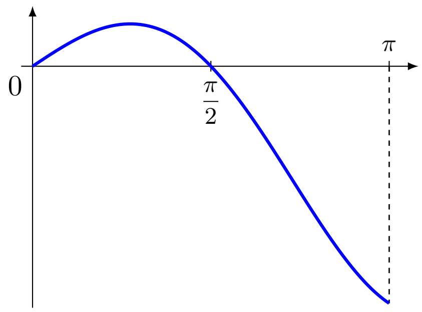
  ....

- $\displaystyle\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ où $\begin{cases} u(x) = \dots\dots \\ v'(x) = \dots\dots \end{cases}$ soit $\begin{cases} u'(x) = \dots\dots \\ v(x) = \dots\dots \end{cases}$

Exercice n° 1: Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

VIII. Interprétation graphique.

1. La relation Chasles.

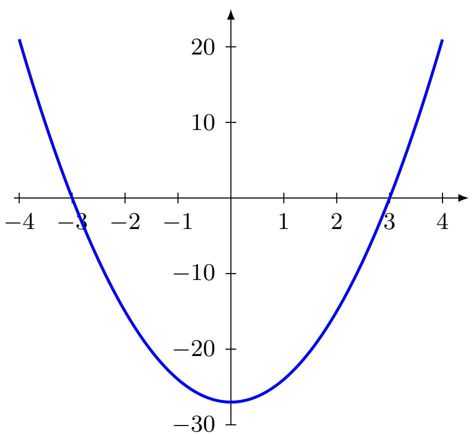


Aire de $\boxed{}$ est égale à ....

Aire de $\boxed{}$ est égale à ....

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)\,\mathrm{d}x \underset{\text{Chasles}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \text{Aire } \boxed{} - \text{Aire } \boxed{}$$
$$= \boxed{\text{Aire } \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Exemple : Soit $f\colon \begin{array}{ccc} [-4\,,\,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^2-27 \end{array}$ dont le graphe est tracée ci-dessous :



Aire de $\boxed{}$ est égale à $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \left(3x^2-27\right)\mathrm{d}x = \ldots$

Aire de $\boxed{}$ est égale à $\displaystyle -\int_{-3}^{0} \left(3x^2-27\right)\mathrm{d}x = \int_{0}^{-3} \left(3x^2-27\right)\mathrm{d}x = \ldots$

> Lorsqu'on permute les bornes d'intégration,
> on change le signe de l'intégrale :
> $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\displaystyle\int_{-4}^{-3} f(x)\,\mathrm{d}x =$ ....

$\displaystyle\int_{0}^{-3} f(x)\,\mathrm{d}x =$ ....

D'où :

$\displaystyle\int_{-4}^{-3} f(x)\,\mathrm{d}x =$ .... $\qquad \displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x =$ ....

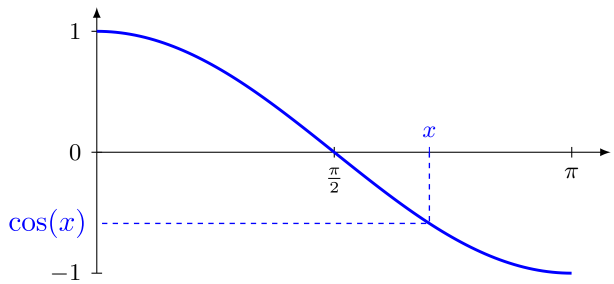
$\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x =$ .... $\qquad \displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x =$ ....

$\displaystyle\int_{0}^{-4} f(x)\,\mathrm{d}x =$ .... $\qquad \displaystyle\int_{-3}^{-4} f(x)\,\mathrm{d}x =$ ....

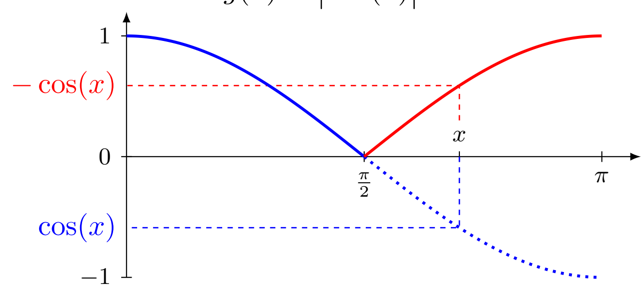
Remarque : Pour $a < b$, l'aire .... $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ prend en compte le signe de la fonction, alors que l'aire .... est toujours positive, elle correspond à $\displaystyle\int_a^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$.

Exemple :

$f(x) = \cos(x)$



$g(x) = \left|\cos(x)\right|$



On voit que : $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x =$ .....

Par le calcul :

$$\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$=$$

$$=$$

On voit que : $\displaystyle\int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x = 2\times$ ....

Par le calcul :

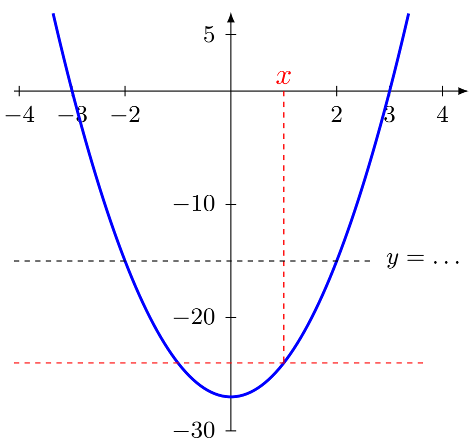
$$\int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Exemple : On continue avec $f(x) = 3x^2 - 27$, et on cherche à calculer l'aire coloriée en orange :



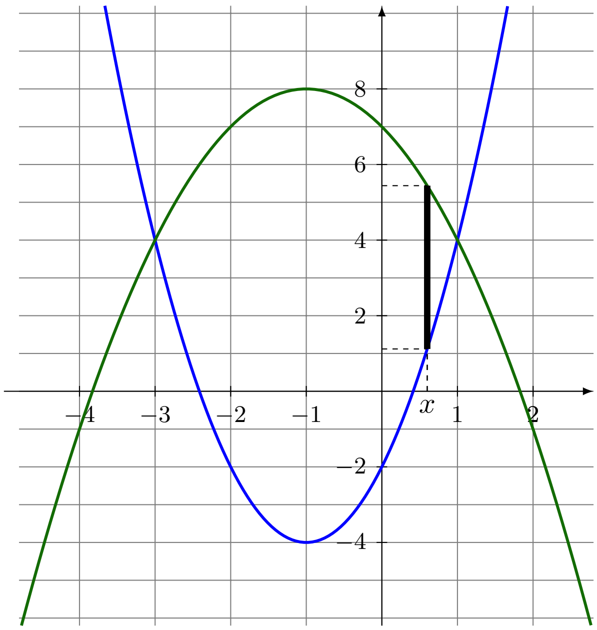
Le rectangle rouge a pour hauteur .... et largeur $\mathrm{d}x$ donc l'aire coloriée en orange est :

$$\int_{-2}^{2} \Big[-15 - \big(3x^2 - 27\big)\Big]\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple : On considère les deux fonctions f et g définies par $f(x) = 2x^2 + 4x - 2$ et $g(x) = -x^2 - 2x + 7$.



Le rectangle noire a pour hauteur .... et largeur dx donc l'aire coloriée en rouge est :

....

....

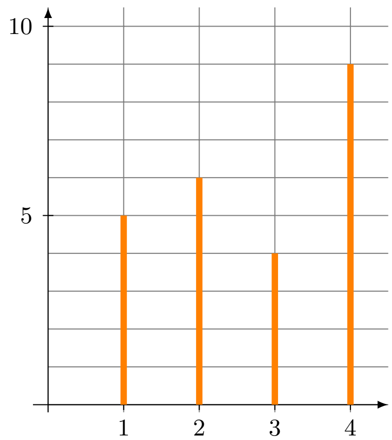
....

....

....

....

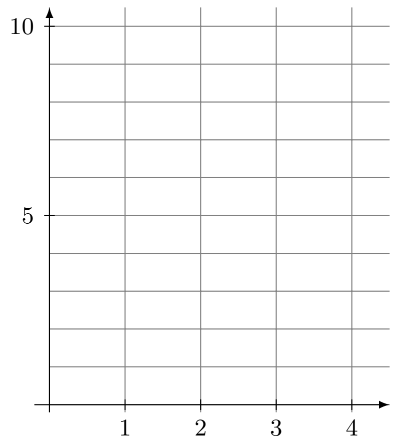
2. Formule de la moyenne.



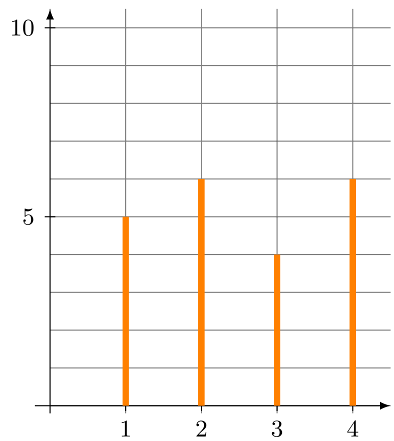
La moyenne de ces 4 valeurs est :

....

Dire que la moyenne est égale à ... revient à dire que toutes les notes ....



Interprétation de la moyenne :

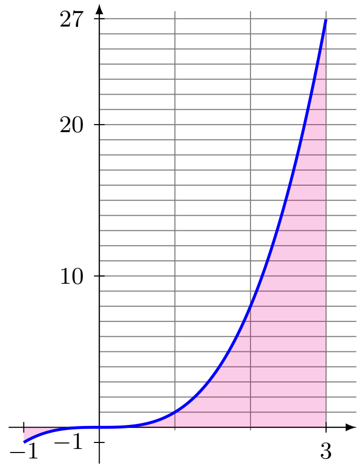


+ =

La somme des écarts à la moyenne est ...... :

....

Moyenne d'une fonction continue :

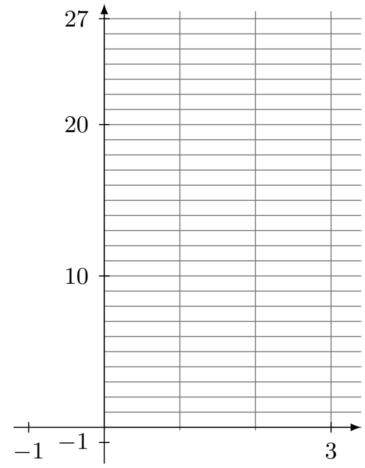


La moyenne de x^3 sur $[-1\,,\,3]$ est égale à

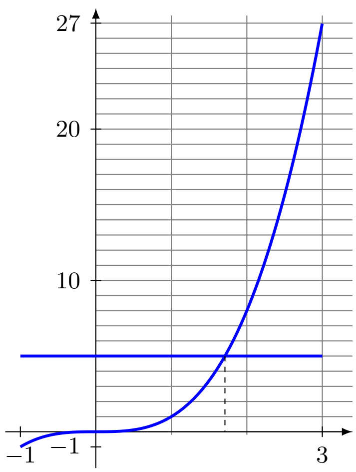
....

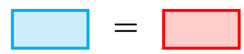
....

Les aires algébriques sont ....



Interprétation de la moyenne d'un fonction continue :





....

La somme des écarts à la moyenne est ...... :

....

Définition:

On appelle .... d'une fonction continue f sur un intervalle $[a\,,\,b]$ l'intégrale $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

3. Valeur efficace d'un régime sinusoïdal.

La valeur .... , dite aussi valeur ..... (de l'anglais *root mean square*, moyenne quadratique) d'un signal périodique, de période T, est la racine carrée de la moyenne du carré de cette grandeur, sur un intervalle de temps donné :

$$V_{\text{efficace}} = \lim_{t\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

Exemple : La valeur efficace U_{eff} d'une tension électrique $u(t)$ d'un courant variable au cours du temps de période T est égale à la tension du courant continu dissipant la même énergie E que $u(t)$ à travers une résistance R sur une période T.

La puissance est la vitesse à laquelle s'écoule l'énergie : $P = \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$. Elle est donnée par $P(t) = u(t)i(t)$ où i son intensité électrique. Sur une période, l'énergie dissipée par la résistance est :

$$E = \int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t \text{ et la puissance moyenne est } \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

- Dans le cas d'un courant continue, sa tension est .... Comme $U = RI$, on a $I = \dfrac{U}{R}$ et $P = UI =$ .... , et P est une constante : $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = P$ donc, sur une période, $E = P \times T = \dfrac{1}{R}U^2T$

- Dans le cas d'un courant périodique $E = \displaystyle\int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t =$ .... , d'où :

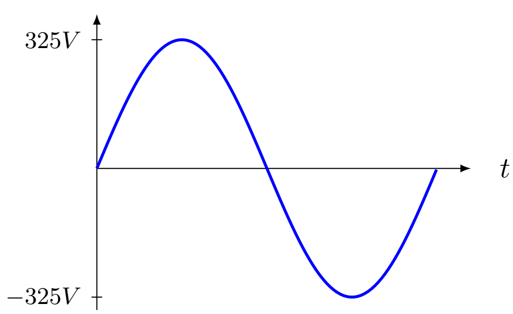
$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t \text{ soit } \boxed{U_{\text{eff}} = \qquad\qquad}$$

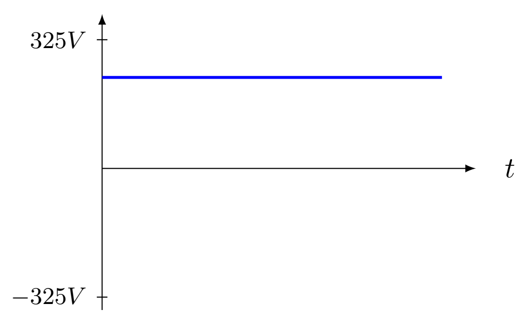
Ainsi, si $u(t) = U_{\max}\sin(t)$, alors $T =$ ..... et $U_{\text{eff}} = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(U_{\max}\sin(t)\right)^2\mathrm{d}t}$.

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(t)^2\,\mathrm{d}t =$ ....

d'où $U_{\text{eff}} =$ ....

En France, le réseau électrique distribue une tension électrique sinusoïdale d'une amplitude de 325 volts et d'une fréquence de 50 Hz. La tension efficace est de .... :





IX. Intégration des fractions rationnelles.

On cherche à intégrer $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$ où $a \neq 0$.

- **Cas n° 1, ($\Delta > 0$) :** $ax^2 + bx + c$ a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 :

Méthode

On factorise le dénominateur : $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{a(x - r_1)(x - r_2)}$. Il existe alors deux réels A et B tels que : $f(x) = \dfrac{A}{x - r_1} + \dfrac{B}{x - r_2}$. Il s'en suit que $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x =$ ....

Exemple : $f(x) = \dfrac{7x-11}{x^2-x-6}$. $\Delta =$ .... donc x^2-x-6 a deux racines :

$r_1 =$ et $r_2 =$.

Donc, $f(x) = \dfrac{A}{x-(-2)} + \dfrac{B}{x-3} =$ ....

Par identification : $\begin{cases} A+B= \\ -3A+2B= \end{cases}$ on résous le système : $\begin{cases} A= \\ B= \end{cases}$

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x =$ ....

Exemple : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$?

$\dfrac{1}{x^2-1} =$ ....

Par identification : $\begin{cases} A+B= \\ A-B= \end{cases}$ on résous le système : $\begin{cases} A= \\ B= \end{cases}$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} =$ ....

- **Cas n° 2, ($\Delta = 0$) :** ax^2+bx+c a une racine réelle r :

Méthode

On factorise le dénominateur : $f(x) = \dfrac{\alpha x+\beta}{a(x-r)^2}$. Il existe alors deux réels A et B tels que :

$f(x) = \dfrac{A}{(x-r)^2} + \dfrac{B}{x-r}$. Il s'en suit que $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x =$ ....

Exemple : $f(x) = \dfrac{-2x+9}{x^2-8x+16}$. $\Delta =$ .... donc $x^2-8x+16$ a une racine double :

$r = \dfrac{-b}{2a} =$ .... On factorise : $f(x) =$.

Donc, $f(x) =$ ....

Par identification : $\begin{cases} B= \\ A-4B= \end{cases}$ on résous le système : $\begin{cases} A= \\ B= \end{cases}$

Il s'en suit que $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x =$ ....

X. Calcul différentiel et application au calcul intégral.

1. Les dérivées de la fonction tangente.

$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ donc dériver la tangente revient à dériver un quotient où $\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v(x) = \cos(x) \end{cases}$ soit $\begin{cases} u'(x) = \dots \\ v'(x) = \dots \end{cases}$

$\tan'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Formule de dérivation :

$$\tan'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

2. Différentielles.

Equation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en $x = a$:

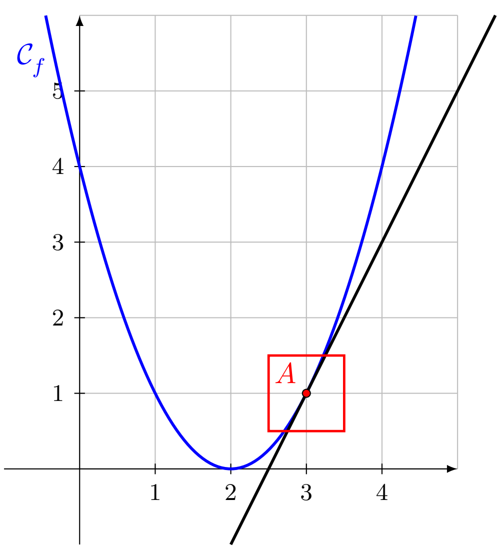
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

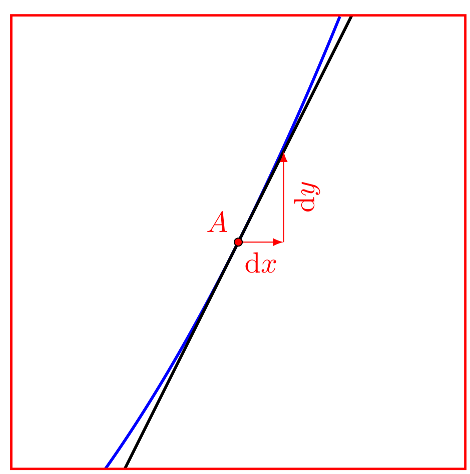
Exemple : Considérons la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 4x + 4$.

On a $f'(x) = \dots\dots\dots\dots$ et l'équation réduite de sa tangente en $x = 3$ est :

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = \qquad\qquad\qquad\qquad \\ f'(3) = \end{array}\right\} \text{donc } y =$$

Qu'est-ce qu'une tangente ? Dire qu'une fonction f est dérivable en $x = 3$ revient à dire que, localement, autour du point A d'abscisse 3, la courbe $\mathcal{C}_f$ est « plate » comme le montre la figure suivante :





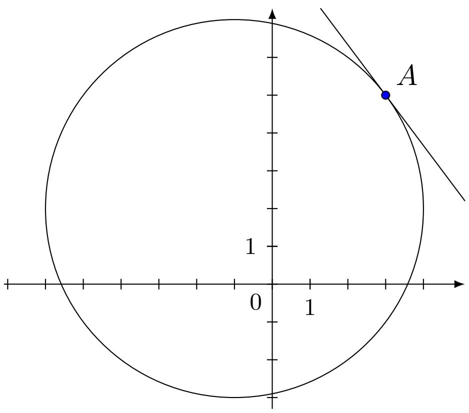
Autrement dit, localement, on dit « au voisinage » du point A, la courbe $\mathcal{C}_f$ peut être assimilée à la droite de pente $f'(3)$ qu'on appelle sa tangente.

Ainsi, $f'(3) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \quad \ldots\ldots$

- $\mathrm{d}y = \ldots\ldots\ldots$ signifie qu'au voisinage du point A une variation « infinitésimale » de x, notée $\mathrm{d}x$, entraîne une variation « infinitésimale » des y notée $\mathrm{d}y$ des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ qui est égale à $2\,\mathrm{d}x$.
- $\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots$ signifie qu'au voisinage du point A une variation « infinitésimale » des ordonnées, $\mathrm{d}y$, entraîne une variation « infinitésimale » $\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y$ des abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$.

$\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}f$ sont appelées des $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. Tangente par la voie différentielle.



Considérons le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Le point $A(3, \ldots) \in \mathcal{C}$.

Déterminons la pente de la tangente à $\mathcal{C}$ passant par A :

- **Par la voie classique :**

$$\begin{array}{rcl} (y-2)^2 & = & 25-(x+1)^2 \\ y-2 = -\sqrt{25-(x+1)^2} & \text{ou} & y-2=\sqrt{25-(x+1)^2} \\ y = -\sqrt{25-(x+1)^2}+2 & \text{ou} & y=\sqrt{25-(x+1)^2}+2 \end{array}$$

Le point A est sur la courbe $y = \sqrt{25-(x+1)^2}+2$ car $y_A > 2$.

On pose $f(x) = \sqrt{25-(x+1)^2}+2$, on a : $f'(x) =$

Donc, la pente est $f'(3) =$

- **Par la voie différentielle :** On différentie $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$

$$\begin{array}{rcl} 2\times 1\times(x+1)\,\mathrm{d}x + 2\times 1\times(y-2)\,\mathrm{d}y & = & 0 \\ (y-2)\,\mathrm{d}y & = & -(x+1)\,\mathrm{d}x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} & = & \dfrac{-(x+1)}{y-2} \end{array}$$

En A on a : $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-(3+1)}{5-2} = -\dfrac{4}{3}$

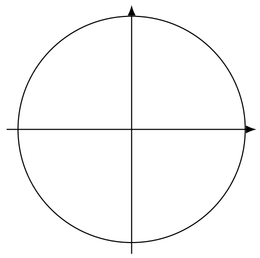
4. Dérivées de arctan, arccos, et arcsin.

- Soit $u(x) = \tan(x)$ autrement dit, $x(u) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ soit $\mathrm{d}u = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Donc, $\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \mathrm{d}x$ et donc $x'(u) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ autrement dit : $\boxed{\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$

- Soit $u(x) = \sin(x)$ autrement dit, $x(u) =$ ....

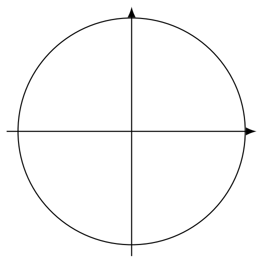


$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x) = \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathrm{d}u = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \ \dots\dots$$

$$x'(u) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \dots\dots\dots\dots \quad \text{autrement dit :} \quad \boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

- Soit $u(x) = \cos(x)$ autrement dit, $x(u) =$ ....



$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x) = \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathrm{d}u = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{d}u}{-\sqrt{1-u^2}} = \ \dots\dots$$

$$x'(u) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \dots\dots\dots\dots \quad \text{autrement dit :} \quad \boxed{\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

5. Intégration par changement de variable.

Le changement de variable est une technique d'intégration très efficace. Nous allons l'illustrer à travers différents exemples. Par exemple pour rechercher la primitive de la fonction composée $f(g(x))$ on pose souvent le changement de variable $u = g(x)$.
Rappelons que le rapport $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ représente la dérivée de la fonction u par rapport à la variable x : $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x)$.

Exemple : Calculons $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Pour faire « disparaître » la racine carrée de l'intégrale, effectuons le changement de variable suivant : $u = \sqrt{x}$
Avec ce changement de variable on a :

- **Changement de différentielle :** $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x) =$ ....

- **Changement de bornes d'intégration :**
  Si $x = 1$ alors $u =$ ....
  Si $x = 4$ alors $u =$ ....

$\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ....

....

Exemple : Calculons $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3(x)}$.

Pour faire « disparaître » le logarithme, effectuons le changement de variable suivant : $u = \ln(x)$
Avec ce changement de variable on a :

- **Changement de différentielle :** $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x) =$ ....

- **Changement de bornes d'intégration :**
  Si $x = \mathrm{e}$ alors $u =$ ....
  Si $x = \mathrm{e}^3$ alors ....

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3(x)} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Exemple : Recherchons une primitive de $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}$.

Effectuons le changement de variable suivant : $u = \cos(x)$.
Avec ce changement de variable on a :

- **Changement de différentielle :** $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- **Changement de bornes d'intégration :** $\dots\dots\dots\dots\dots$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On est amené à rechercher la primitive de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{u^2-1}$:

$u^2 - 1$ a deux racines $\dots$ et $\dots$, donc il existe deux réels A et B tels que :

$$\frac{1}{u^2-1} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Par identification, on obtient $\begin{cases} A + B = \dots \\ A - B = \dots \end{cases}$ soit $\begin{cases} A = \\ B = \end{cases}$

Ainsi, $\dfrac{1}{u^2-1} = \dfrac{}{u-1} + \dfrac{}{u+1}$

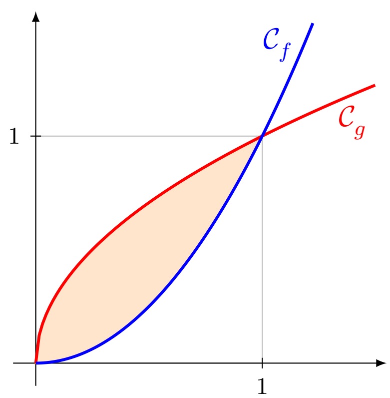
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Remarque : $\ln(a) - \ln(b) = \dots\dots\dots\dots$ donc :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

XI. Intégrales et mesures.

1. Calcul de l'aire située entre deux courbes.



On considère les deux fonctions f et g définie par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

L'aire située entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ est :

Propriété

Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) \geqslant g(x)$ sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
L'aire du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est

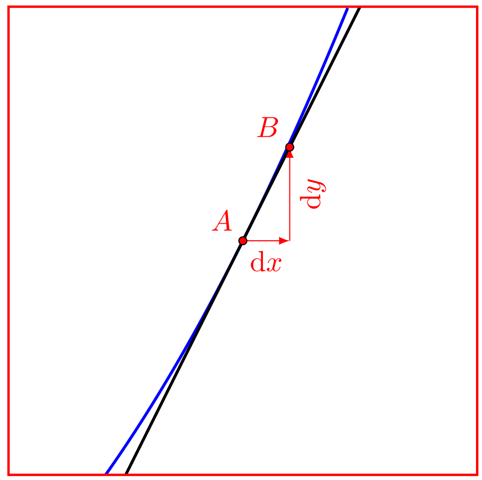
$$\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x$$

2. Calcul de la longueur d'une courbe.

On a vu que que si une fonction f est dérivable, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est, au voisinage de chacun des points, assimilable à un segment de longueur :

$$\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \quad =$$

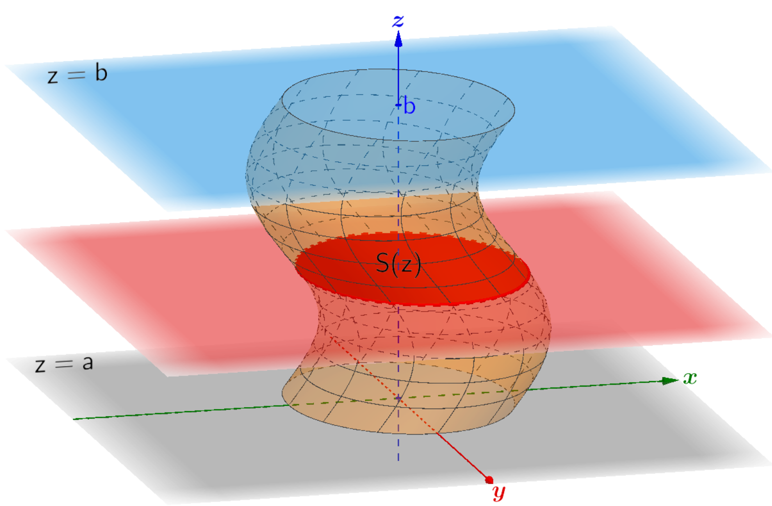
$$=$$



Propriété

Etant donnée une fonction f sur dérivable sur un intervalle $[a\,;\,b]$. La longueur de la courbe $\mathcal{C}_f$ située entre droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x$

3. Volume d'un solide.

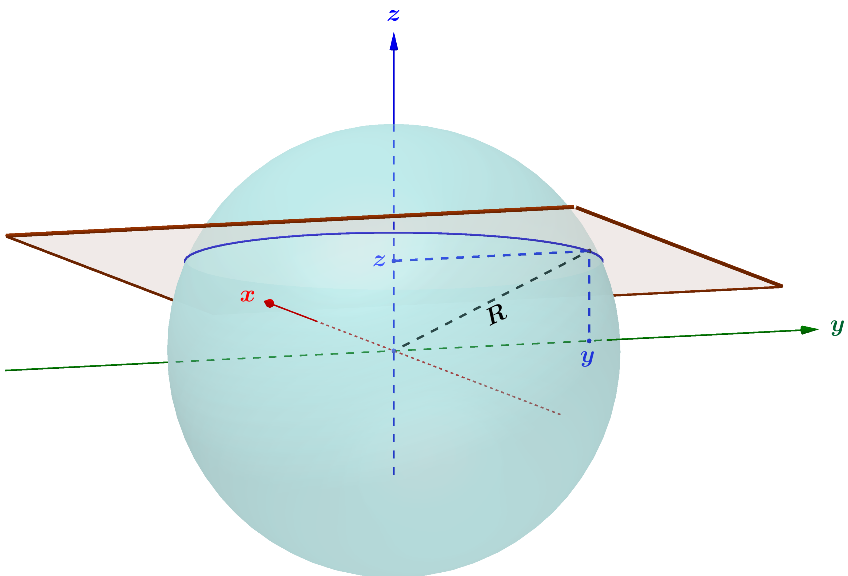


Notons $S(z)$ est la section de la surface avec le plan de cote z, et $\mathcal{A}(z)$ son aire.

Le volume du solide compris entre les plans d'équation $z = a$ et $z = b$ est

Exemples :

- Le volume d'une sphère de rayon R :



La section est un disque de rayon

. . . .

Son aire est $\mathcal{A}(z) =$ . . . .

Le volume de la sphère est donc :

$$\int_{-R}^{R} \mathcal{A}(z)\mathrm{d}z = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

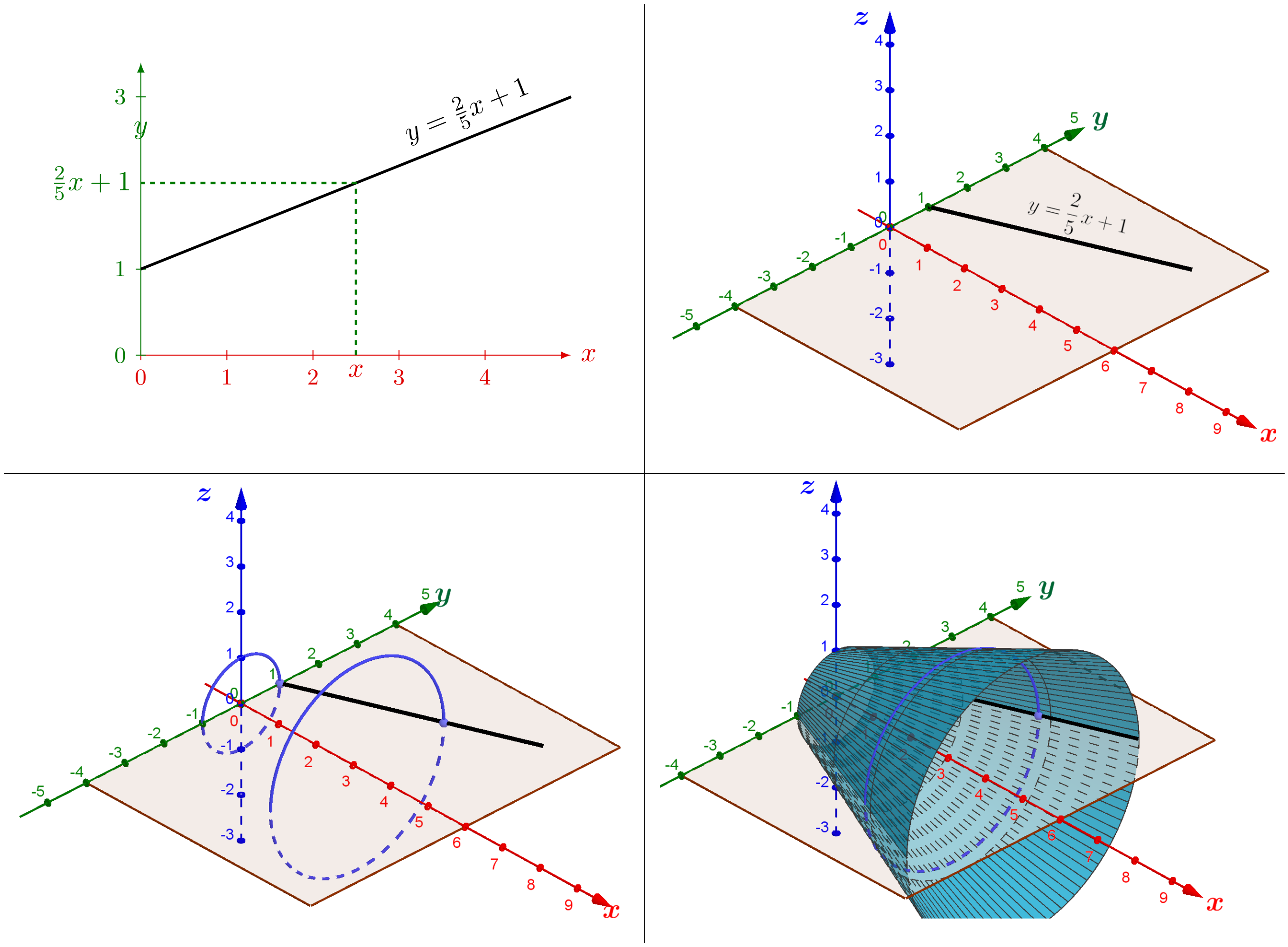
$$= \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. Volume d'un solide de révolution.

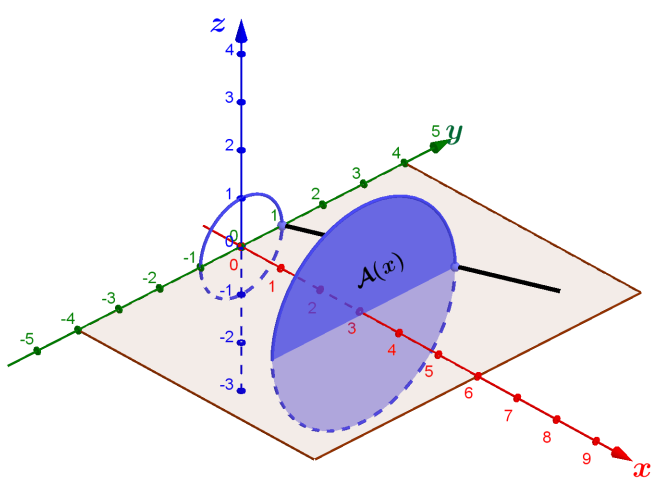
On obtient un solide de révolution en faisant tourner une courbe autour d'un axe.

Exemples :

- Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2}{5}x + 1$ définie sur $[0\,;5]$, et faisons-la tourner autour de l'axe des abscisses.



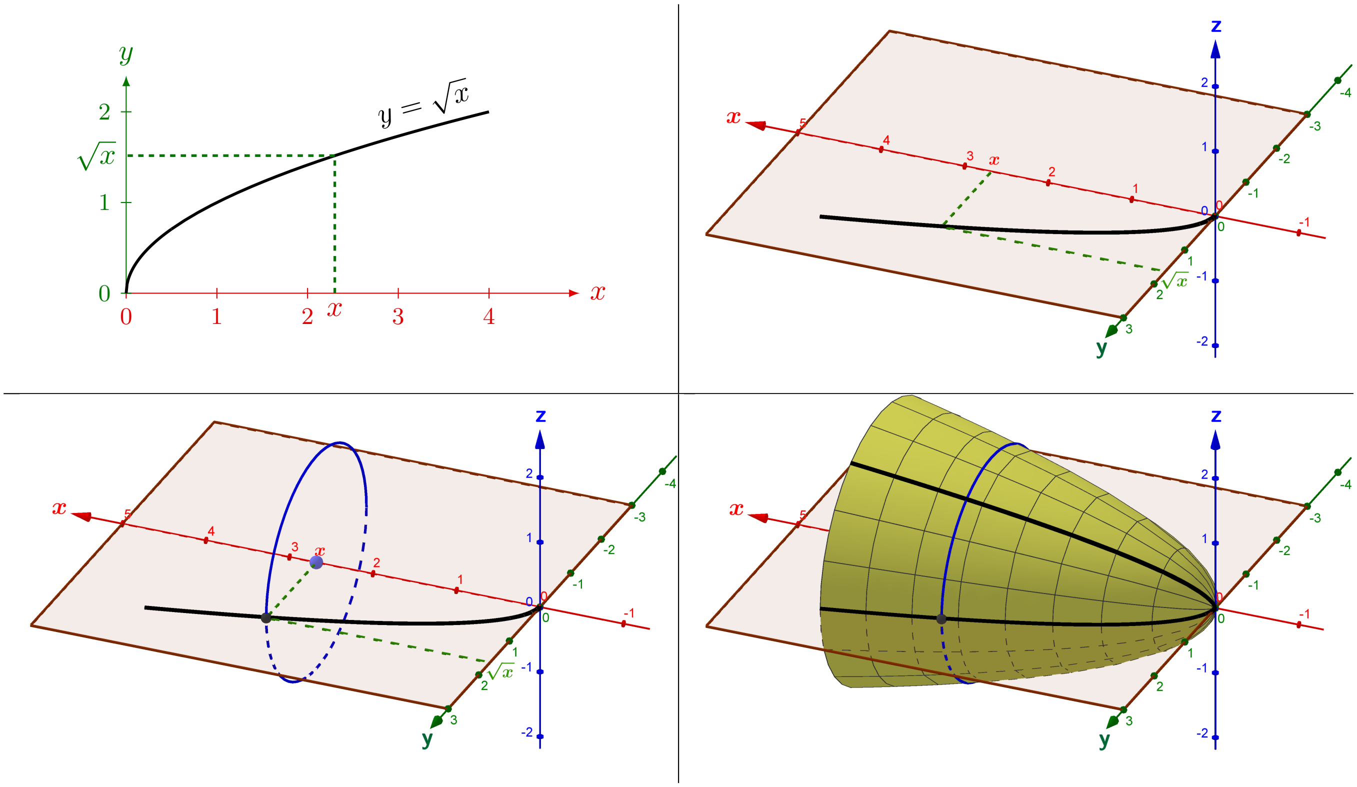
On commence par calculer l'aire $\mathcal{A}(x)$ de la section du solide de révolution (tronc de cône) avec le plan :



$$\mathcal{A}(x) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le volume est donc

- Considérons la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0\,;\,4]$, et faisons-la tourner autour de l'axe des abscisses.



On obtient un solide de révolution appelé ....

Son volume : $S(x)$ est un disque de rayon $r =$ ..... . Donc, son aire est $\mathcal{A}(x) =$ ....

Le volume est donc