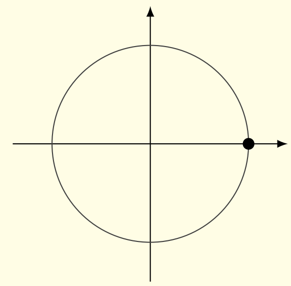
Méthodes de résolution d'équations

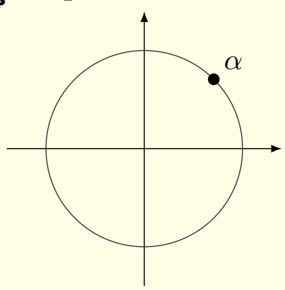
I. Equations trigonométriques.

Propriété

Un angle possède une infinité de mesures en radians. La mesure d'un angle est la seule mesure comprise dans l'intervalle ....



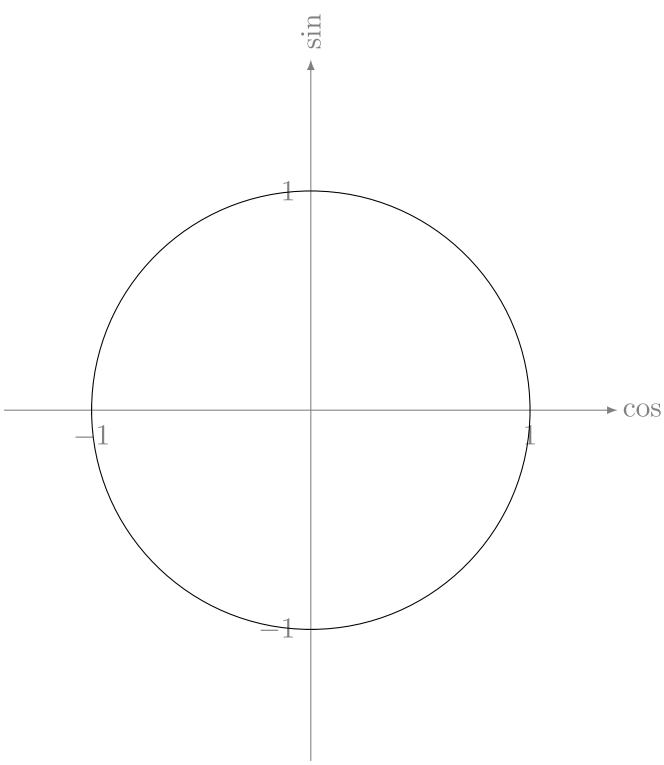
Propriété



Additionner π ou $-\pi$ a une mesure en radians revient à faire un ....

1. Les valeurs remarquables du sinus et du cosinus.

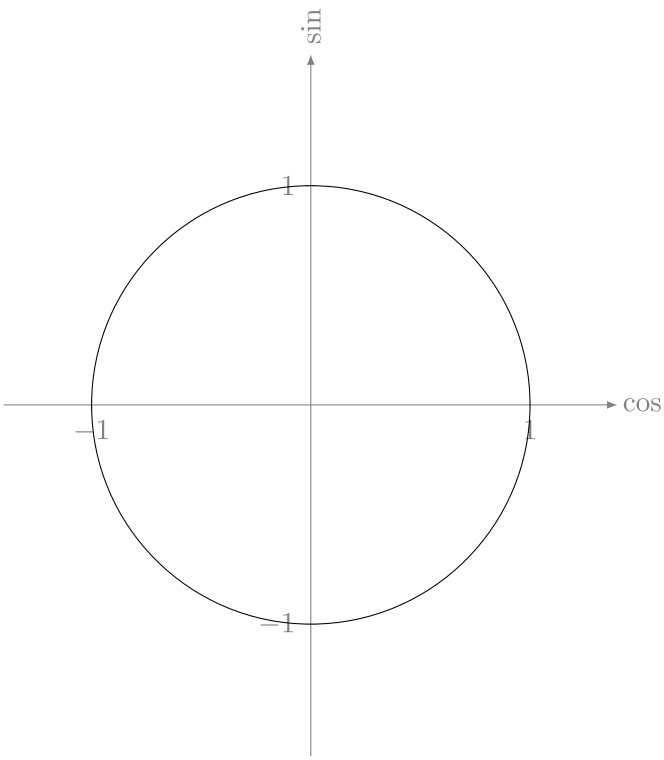
Sinus et cosinus des multiples de $\dfrac{\pi}{4}$:



x	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$-\dfrac{\pi}{2}$
$\cos(x)$				
$\sin(x)$				

x	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{-\pi}{4}$	$-\dfrac{3\pi}{4}$
$\cos(x)$				
$\sin(x)$				

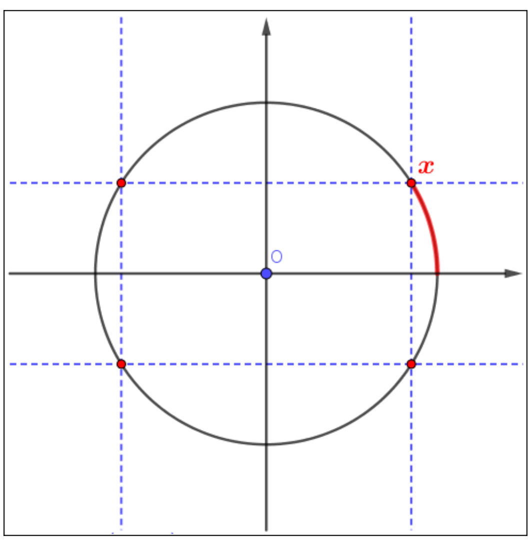
Sinus et cosinus des multiples de $\dfrac{\pi}{6}$:



x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos(x)$				
$\sin(x)$				

x	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{6}$
$\cos(x)$				
$\sin(x)$				

Rappel:



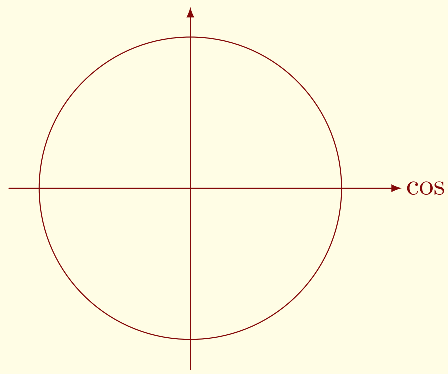
- $\cos(-x) = \ldots\ldots.$
- $\sin(-x) = \ldots\ldots.$
- $\cos(\pi - x) = \ldots\ldots.$
- $\sin(\pi - x) = \ldots\ldots.$
- $\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi) = \ldots\ldots.$
- $\sin(x + \pi) = \sin(x - \pi) = \ldots\ldots.$

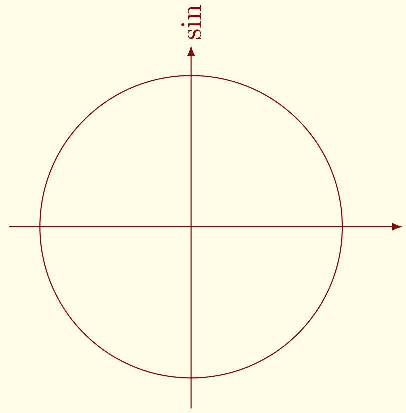
Additionner ou soustraire π revient à faire un demi-tour.

2. Equations idéales

Solutions des équations

- $\cos x = \cos\alpha \iff x = \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\sin x = \sin\alpha \iff x = \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$





Exercice n° 1: Résoudre

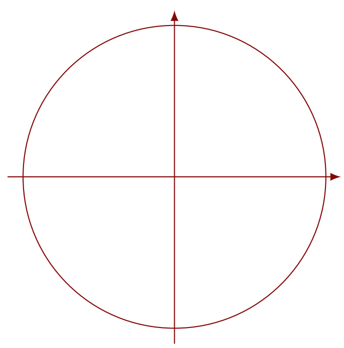
i. $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$

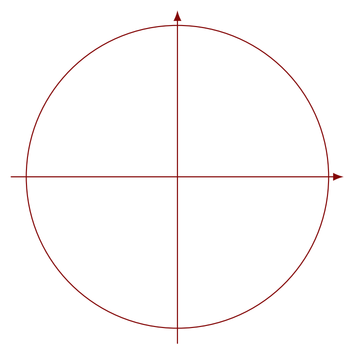
ii. $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. Equations réelles

Rappel:

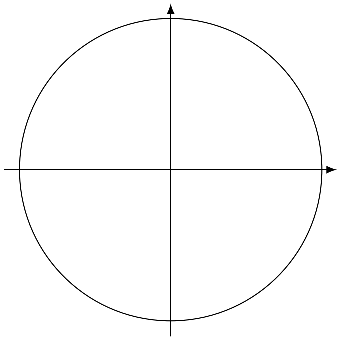
- L'arc de sinus de x (arcsin(x) ou $\sin^{-1}(x)$) donne la solution de l'équation $\sin\alpha = x$ qui est située sur l'arc $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$;
- L'arc de cosinus de x (arccos(x) ou $\cos^{-1}(x)$) donne la solution de l'équation $\sin\alpha = x$ qui est située sur l'arc $[0\,,\,\pi]$.



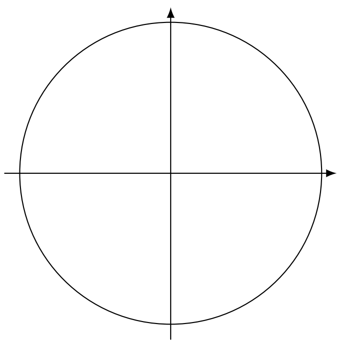


Exercice n° 2: Résoudre en donnant les solutions en degrés (à 10^{-1} près) et en radians (à 10^{-4} près), puis les placer sur le cercle associé.

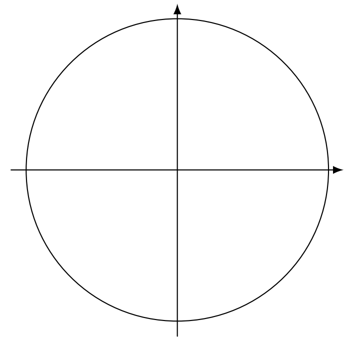
i. $\sin(x) = 0,4$



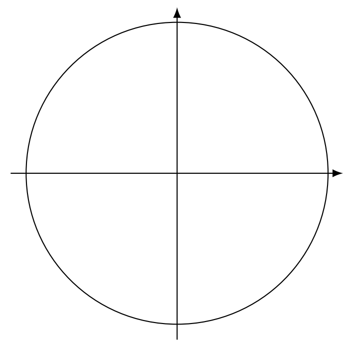
ii. $\cos(x) = 0,7$



iii. $\sin(x) = -0,6$



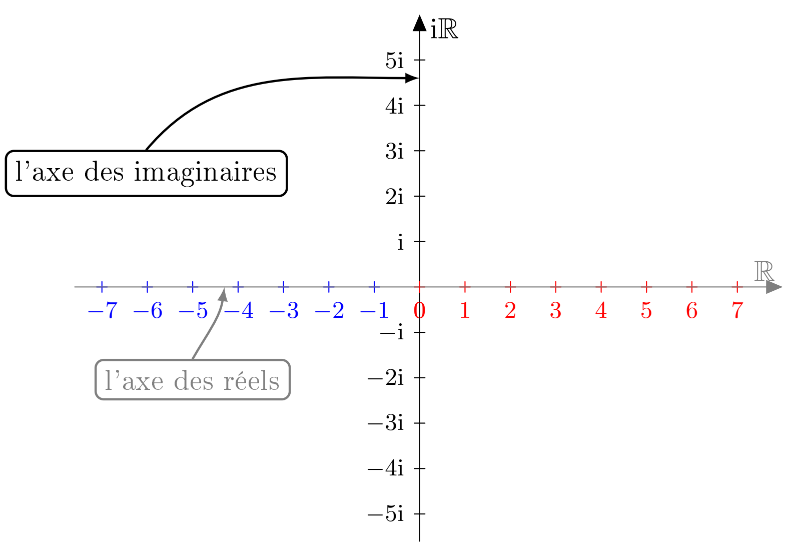
iv. $\cos(x) = -0,3$



II. Les nombres complexes

1. Le plan complexe.

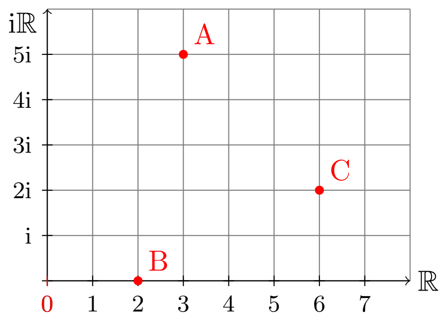
Plaçons-nous dans un repère orthonormé direct :



Définition:

On appelle .... , le plan muni d'un repère orthonormé direct où :

- l'axe des abscisses est appelé .... ;
- l'axe des ordonnées est appelé .... ;
- à chaque point du plan M on associe un nombre complexe, noté ... , appelé l' .... du point M.



L'affixe du point A est le nombre complexe ...., noté ...

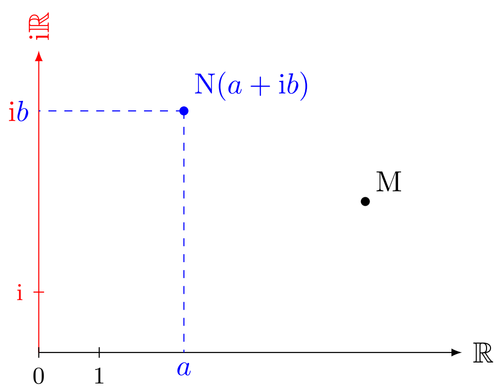
$z_B =$ ....

$z_C =$ ....

Définition:

L'ensemble des affixes des points du plan complexe est l'ensemble des .... , noté ... . Chaque élément z de l'ensemble $\mathbb{C}$ est appelé, nombre complexe, et s'écrit de manière unique $z = a + ib$, a et b étant des réels.

- a est appelée la .... de z et est notée $\mathrm{Re}(z)$;
- b est appelée la .... de z et est notée $\mathrm{Im}(z)$.



Remarque :

- si $b = 0$ alors $z = a$, z est ..... : le point N est sur l'axe des abscisses (l'axe réel) ;
- si $a = 0$ alors $z = ib$, on dit que z est un ....

Nombre complexe	partie réelle	partie imaginaire
$2+3\mathrm{i}$		
$2-3\mathrm{i}$		
$\sqrt{3}-\dfrac{4\mathrm{i}}{7}$		
i		
$-\dfrac{1}{3}$		
$-\mathrm{i}+1$		
$2\,(\mathrm{i}+3)$		

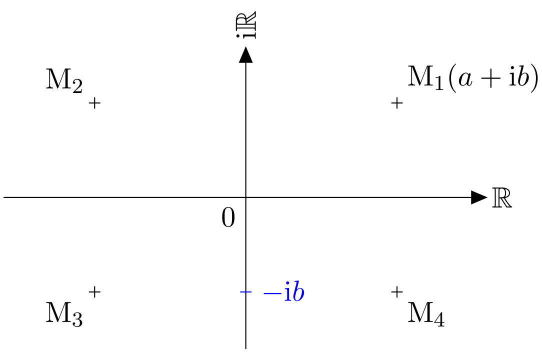
Ce sont des nombres, on peut donc faire des opérations. Commençons par la multiplication par un réel, l'addition et la soustraction de :

$$z = 1-4\mathrm{i} \text{ et } z' = -2+3\mathrm{i}$$

- $-2z =$ ....
- $z+z' =$ ....
- $z-z' =$ ....
- $2z+3z' =$ ....

   $=$ ....

2. Conjugué d'un complexe



L'affixe du :

- point M_1 est .....
- symétrique de A par rapport à l'axe imaginaire : .....
- symétrique de B par rapport à l'axe réel : .....
- symétrique de M_1 par rapport à l'axe imaginaire : .....
- symétrique de M_2 par rapport à l'axe réel : .....
- symétrique de M_3 par rapport à l'axe imaginaire : .....

Définition:
On appelle .... du nombre complexe $z=a+\mathrm{i}b$, le nombre complexe ....

Exemple : $\overline{2+4\mathrm{i}} =$ .... $\overline{2-4\mathrm{i}} =$ .... $\overline{\overline{2-4\mathrm{i}}} =$ .... $\overline{\mathrm{i}-7} =$ ....

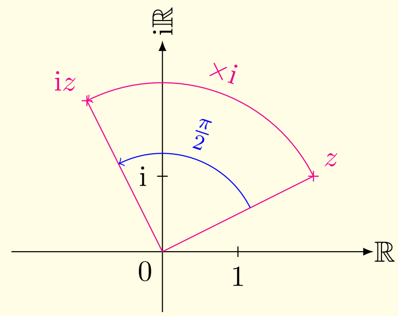
3. Multiplication par i.

Définition:

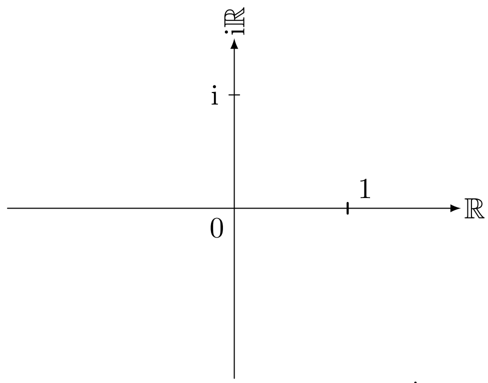
Soit $z \in \mathbb{C}$ l'affixe d'un point M dans le plan complexe.

Multiplier un point d'affixe z par i revient à lui faire subir

....



Exemple : Dans le plan complexe, construisons i, i^2, i^3, et i^4.



Propriété
$\mathrm{i}^2 = \ldots$

Application : Posons $z = 1 + 3\mathrm{i}$ et $z' = -2 + \mathrm{i}$.

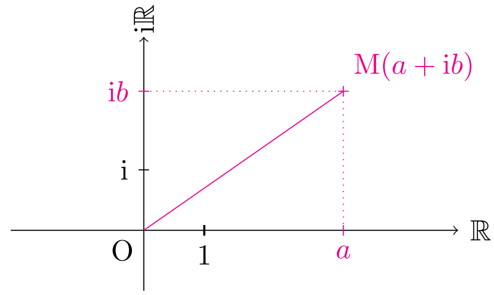
- $\mathrm{i}z =$ ....
- $\mathrm{i}z' =$ ....
- $zz' =$ ....

  $=$ ....
- $z + \overline{z} =$ ....
- $z + \overline{z'} =$ ....
- $z\overline{z} =$ ....

4. Module d'un nombre complexe.

Dans le plan complexe d'origine O considérons le point M d'affixe z dont la partie réelle est a et la partie imaginaire b.

La longueur OM = ...

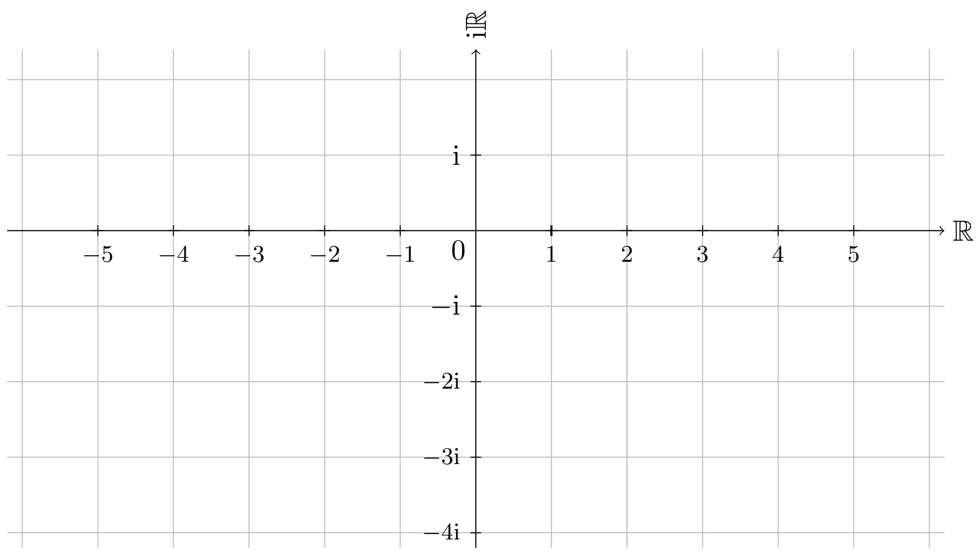


Définition:

Soit $z \in \mathbb{C}$. Le .... du nombre complexe z, noté ..... est le réel positif ....

Exemple : Calculons les modules suivants et place les nombres complexes correspondants dans un plan complexe :

- $|5+\mathrm{i}| =$ ....
- $|5-\mathrm{i}| =$ ....
- $|2-3\mathrm{i}| =$ ....
- $|2| =$ ....
- $|-4\mathrm{i}| =$ ....
- $|-4+2\mathrm{i}| =$ ....
- $|-3-3\mathrm{i}| =$ ....
- $|-5| =$ ....



Module et conjugaison

Etant donné un nombre complexe $z = a + ib$: $z \times \overline{z} = \left|z\right|^2 = a^2 + b^2$

Autrement dit, $\left|z\right| = \sqrt{z \times \overline{z}}$

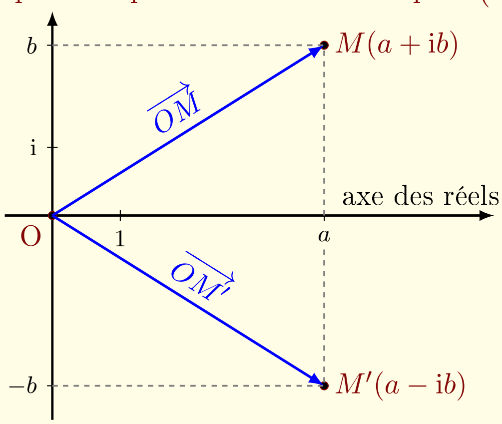
Démonstration

$z \times \overline{z} = (a+\mathrm{i}b)\overline{(a+\mathrm{i}b)} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Résumé

Le plan complexe est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ orthonormé.



- $z_M = \dots\dots\dots$ est l'affixe du point M ;
- $z'_M = \dots\dots\dots$ est le conjugué de z_M ;
- M' est le $\dots\dots\dots$ du point M par rapport à l'axe des nombres réels ;
- $\mathrm{O}M = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- $z\overline{z} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Propriété : Le module est compatible avec la multiplication et la division

Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 où $z_2 \neq 0$ et tout entier relatif n, on a :

$$\left|z_1 \times z_2\right| = \dots\dots\dots\dots \quad , \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \dots\dots\dots \quad , \text{ et } \left|z_2^n\right| = \dots\dots\dots$$

Exercice n° 3: Calcule les modules suivants :

i. $\left|-17\mathrm{i}\right| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

ii. $\left|\dfrac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

iii. $\left|(2+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})\right| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

iv. $\left|(2+4\mathrm{i})^3\right| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

La compatibilité avec la multiplication n'entraîne pas la compatibilité avec l'addition :

$$\left|1+\mathrm{i}\right| = \dots\dots \quad \text{alors que } \left|1\right| + \left|\mathrm{i}\right| = \dots\dots\dots \quad \text{donc} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Inverse et quotient
Pour déterminer la forme algébrique d'un inverse ou d'un quotient, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du ....

Exercice n° 4: Détermine la forme algébrique :

- $\dfrac{1}{-1+4\text{i}} =$ ....

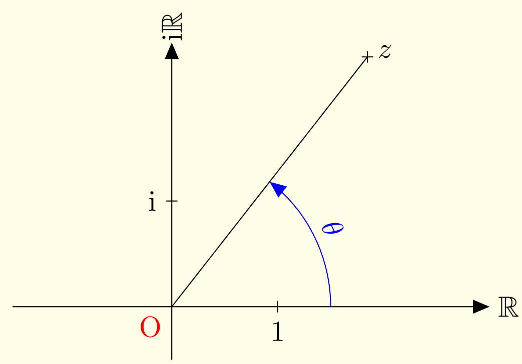
  $=$ ....

- $\dfrac{-3+\text{i}}{5+3\text{i}} =$ ....

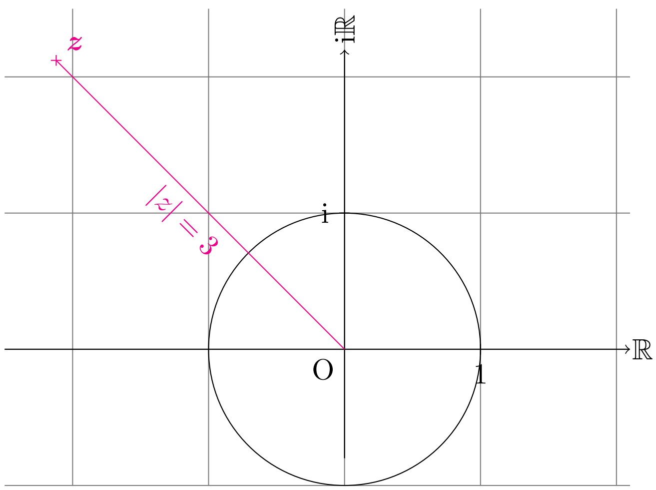
  $=$ ....

Définition:

Dans un plan complexe muni d'un repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v},)$, soit z un nombre complexe non nul, et M le point d'affixe z. On appelle .... de z tout nombre réel θ tel que $\theta = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ $[2\pi]$. On note $\theta =$ ..... .



Remarque : On donne toujours la mesure principale de l'angle, c'est-à-dire la mesure comprise dans l'intervalle $]-\pi\ ,\ \pi]$.
Exemple :

1. 

   (a) Un argument de z est

   (b) $z_0 =$

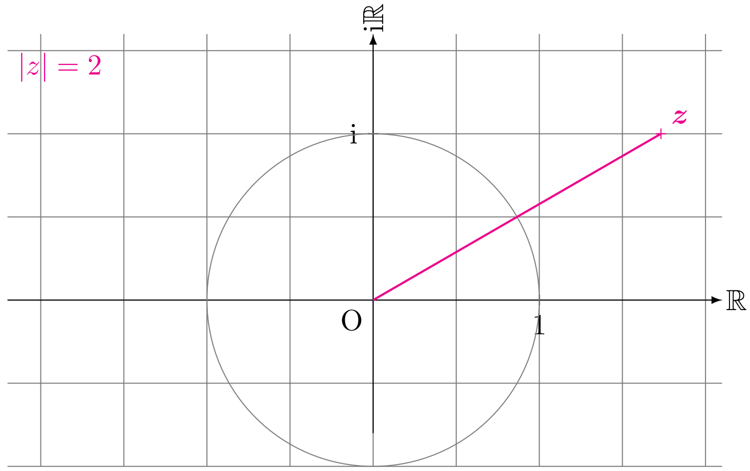
   (c) $z =$

2.

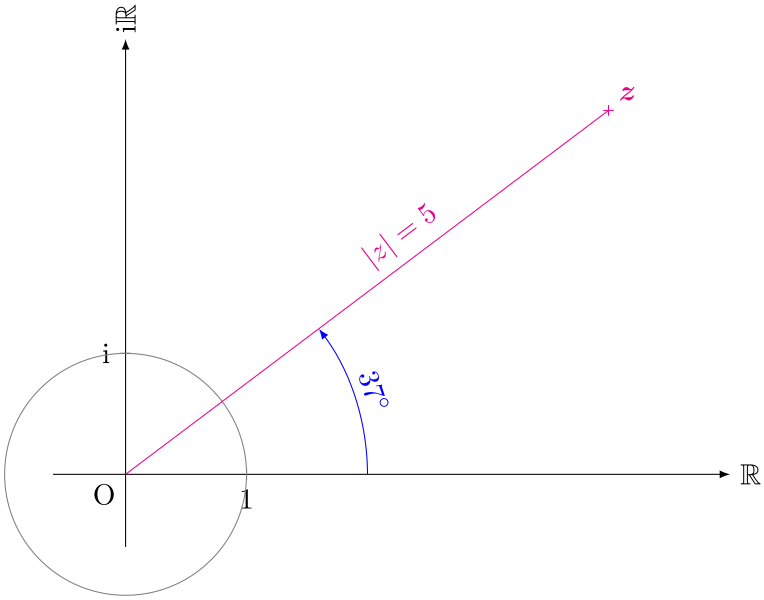
(a) Un argument de z est

(b) $z_0 =$

(c) $z =$



3.



La forme trigonométrique de z est :

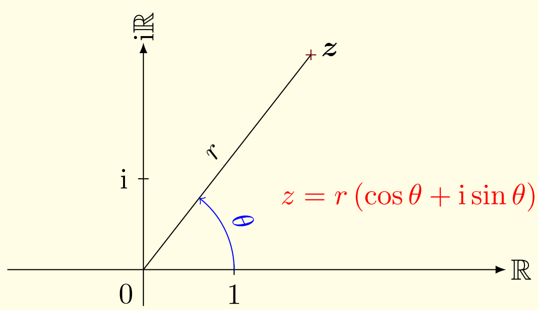
....

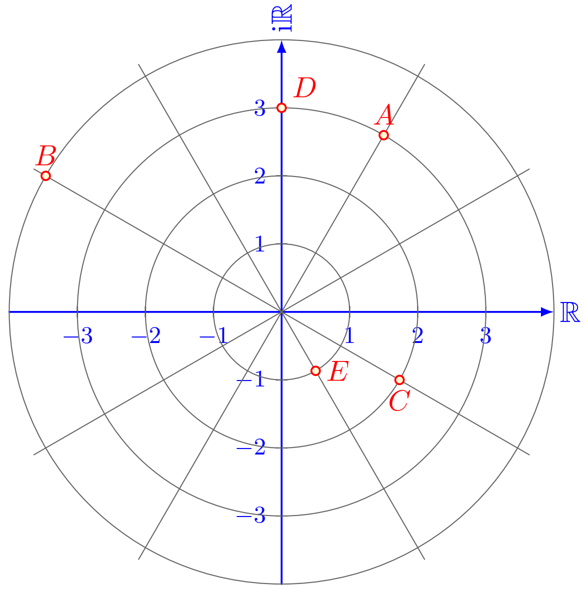
Définition:

Tout nombre complexe .... z peut-être écrit sous la forme $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec :

- $\arg(z) = \theta \in \mathbb{R}$ est l' .... de z ;
- $|z| = r \in \mathbb{R}_+^*$ est le .... de z.

Cette écriture s'appelle la .... de z.





- $z_A =$ ....
- $z_B =$ ....
- $z_C =$ ....
- $z_D =$ ....
- $z_E =$ ....

Propriété

Si $z = a + ib$ et $z \neq 0$ alors $z = r\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$ où

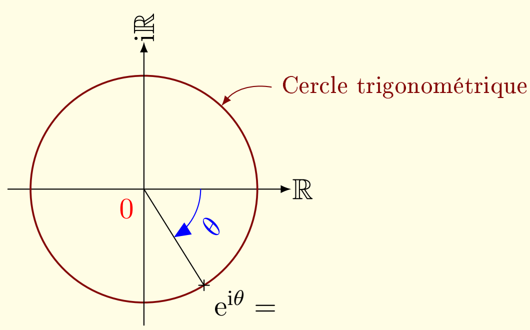
$r = |z| =$ .... $\cos\theta =$ .... $\sin\theta =$ ....

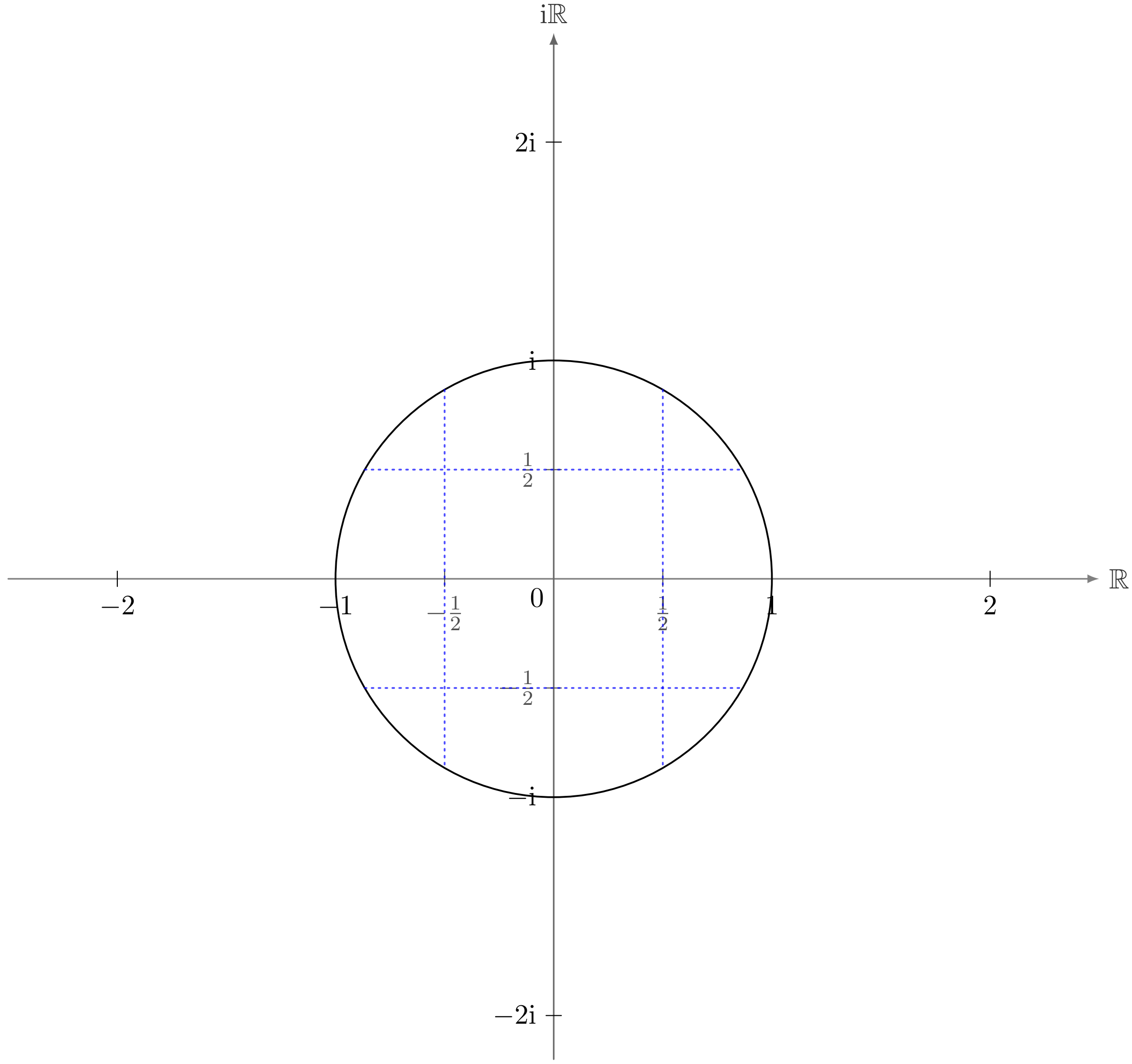
III. La forme exponentielle.

Définition:

Etant donné un nombre réel θ, on note ..... le nombre complexe $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

On lit « exponentielle de i thêta »

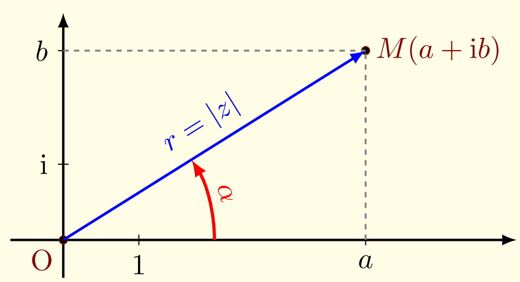




Résumé

Si $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe .... , alors il existe un unique réel .... r et un unique réel $\alpha \in]-\pi\,,\,\pi]$ tels que :

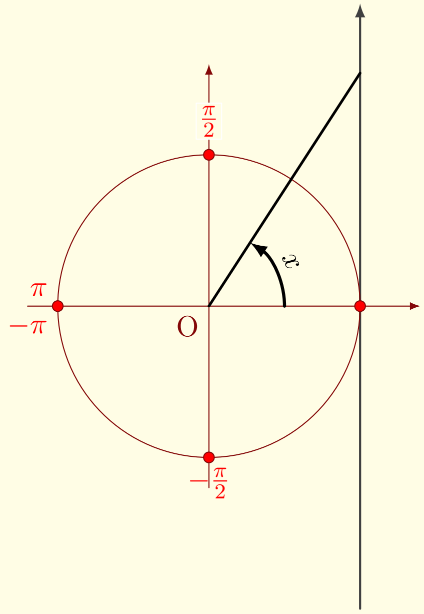
$$z = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



α est un .... de z, et r son ....

IV. Complément trigonométrique : l'arc de tangente

Définition et Propriétés



La tangente d'un angle de mesure x, notée $\tan(x)$ est .... du point M.

- On démontre que $\tan(x) =$ ....
- La tangente est une fonction périodique de période
- La tangente n'est donc pas définie sur les angles droits : $\mathcal{D}_{\tan} =$ ....

Regardons ce rappel du plus près, et notons $\mathcal{T}$ la courbe représentative de la fonction tangente. :

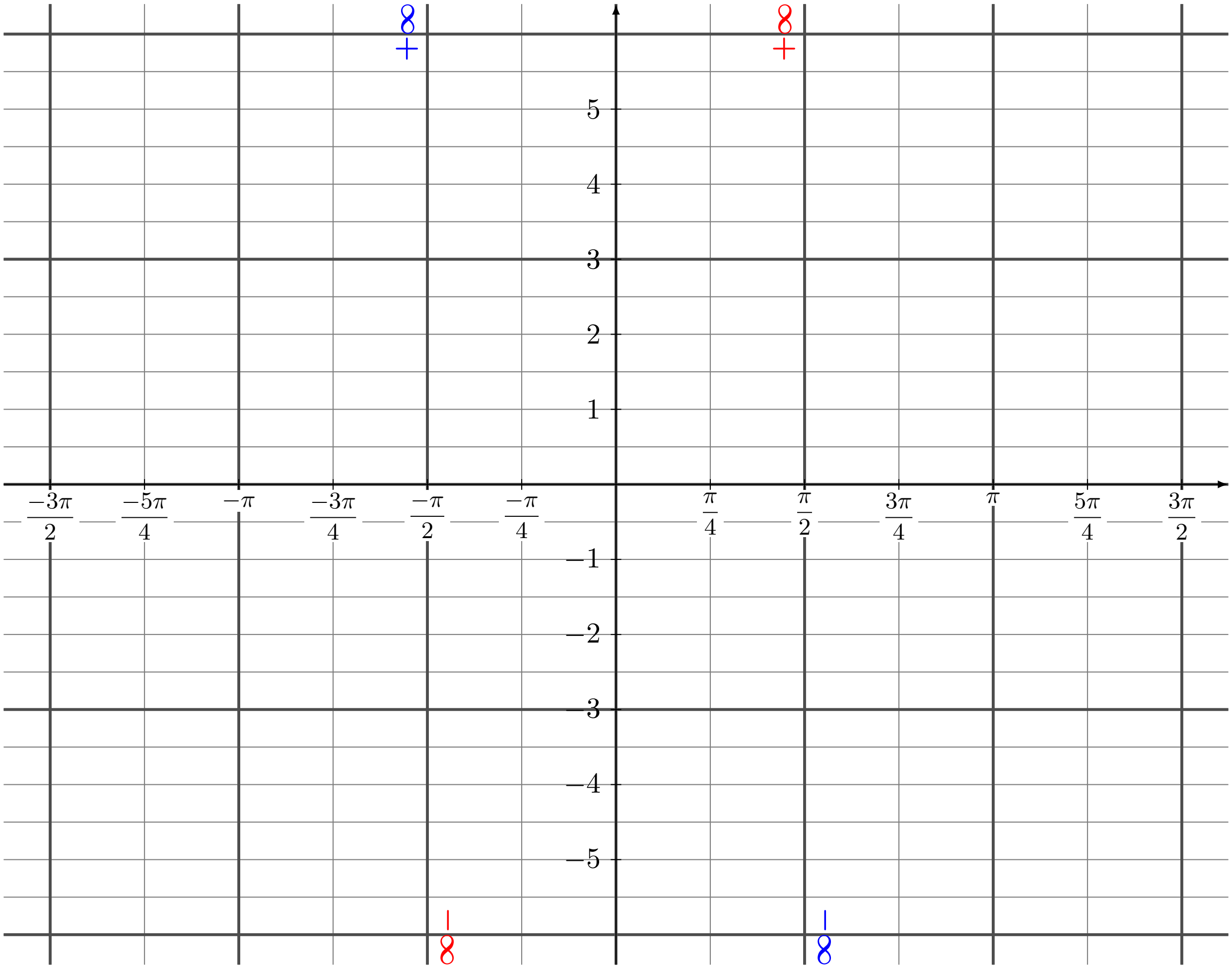
- $\tan(0) =$
- $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) =$
- $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) =$
- $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) =$

- $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

  En effet, $\mathcal{T}$ admet une ....
- $\tan(-x) =$

  Autrement dit, $\mathcal{T}$ est symétrique par rapport à
- $\tan(x+\pi) =$

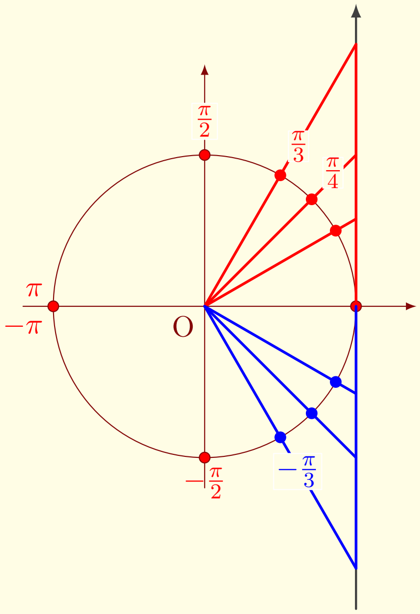
  On voit que la tangent est ....



On voit que $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = \quad \ldots\ldots$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = \quad \ldots\ldots$,

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = \quad \ldots\ldots$, et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = \quad \ldots\ldots$

Valeurs remarquables



$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

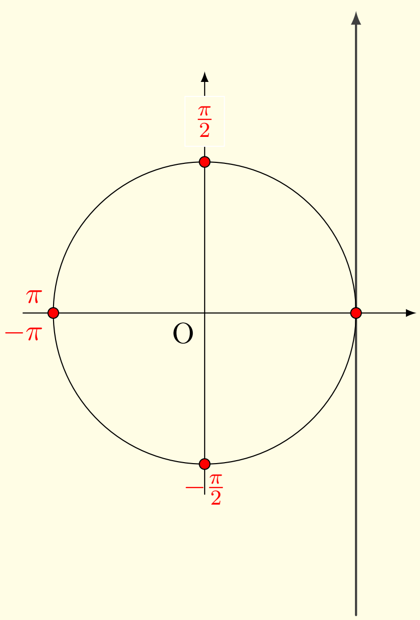
$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple : Détermine les mesures principales, en radians à 10^{-3} près, des solutions des équations trigonométriques suivantes :

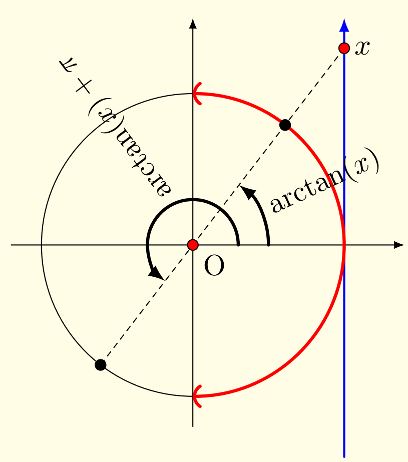
i. $\tan(x) = 1$. ....

ii. $\tan(x) = -\sqrt{3}$. ....

Propriété



- L'arc de tangente de x ($\arctan(x)$ ou $\tan^{-1}(x)$) donne la solution de l'équation $\tan\alpha = x$ qui est située sur l'arc $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\tan x = \tan\alpha \iff x = \alpha\ [2\pi]$ ou $x = \alpha + \pi\ [2\pi]$



Exemple : Détermine les mesures principales, en degrés à 10^{-1} près, des solutions des équations trigonométriques suivantes : (On oublie pas de paramétrer la calculatrice en degrés.)

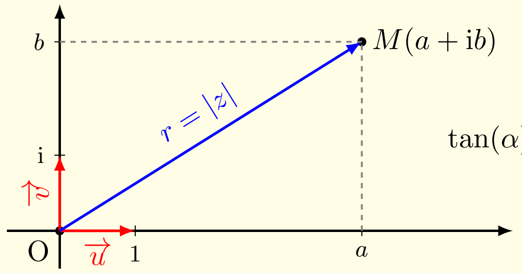
i. $\tan(x) = -0,3$. ....

ii. $\tan(x) = 2$. ....

Pourquoi soustraire π au lieu de l'additionner ? Parce que : ....

Propriété

Si $z = a+ib$ un nombre complexe dont la .... est non nul, alors il un unique mesure principale α tel que :



$\tan(\alpha) =$ ....

- La mesure principale α est du .... que la partie imaginaire b ;
- la forme trigonométrique de z est .... ;
- la forme exponentielle de z est ..... .

Exemple : Détermine la forme exponentielle du nombre complexe $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

- $|z| =$ ....
- $\tan(\alpha) =$ ....

  La partie imaginaire est ....

- La forme exponentielle de z est ....

Exemple : Détermine un argument du nombre complexe $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

$\tan(\alpha) =$ ....

La partie imaginaire est ....