

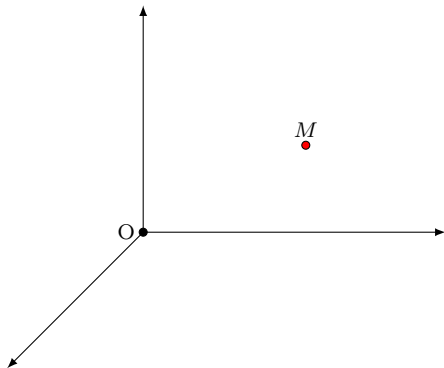
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### 1. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine  $O$  du repère

$$I_O = \int_S \dots\dots\dots dm$$



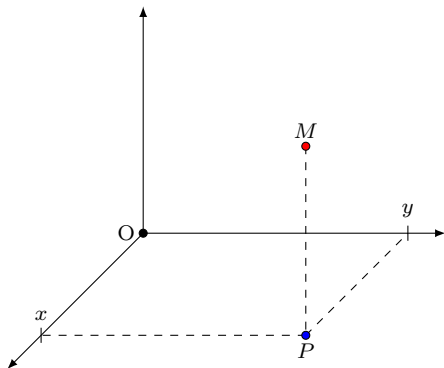
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### 1. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine O du repère

$$I_O = \int_S \dots\dots\dots dm$$



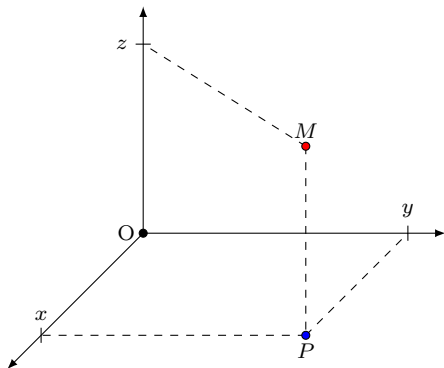
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### 1. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine O du repère

$$I_O = \int_S \dots\dots\dots dm$$



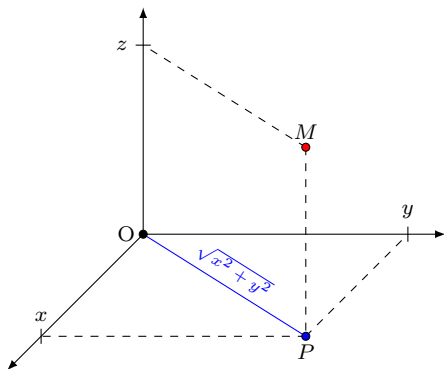
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### 1. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine O du repère

$$I_O = \int_S \dots\dots\dots dm$$



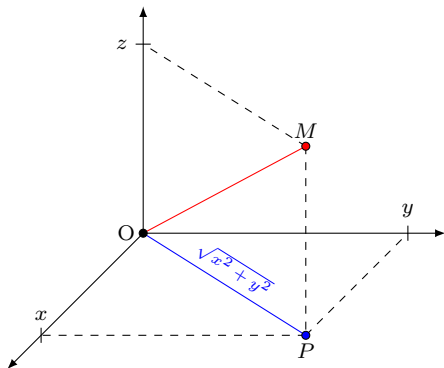
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### 1. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine O du repère

$$I_O = \int_S \dots\dots\dots dm$$



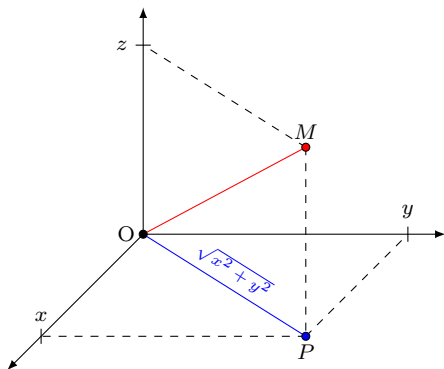
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### 1. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine O du repère

$$I_O = \int_S \dots\dots\dots dm$$



$$OM^2 =$$

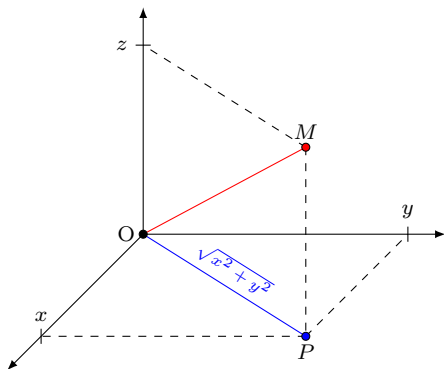
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### 1. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine O du repère

$$I_O = \int_S \dots\dots\dots dm$$



$$OM^2 = OP^2 +$$

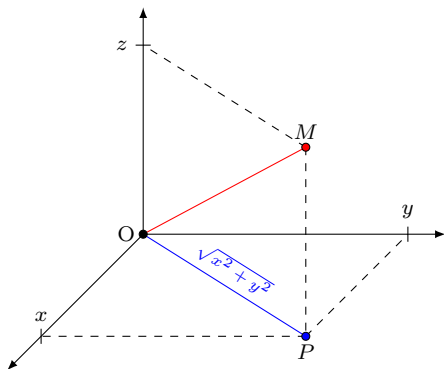
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### 1. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine O du repère

$$I_O = \int_S \dots\dots\dots dm$$



$$OM^2 = OP^2 + z^2$$

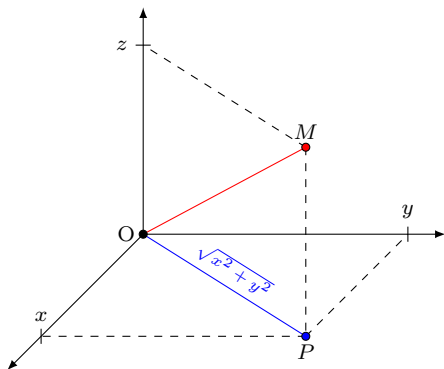
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### 1. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine O du repère

$$I_O = \int_S \dots\dots\dots dm$$



$$OM^2 = OP^2 + z^2$$
$$=$$

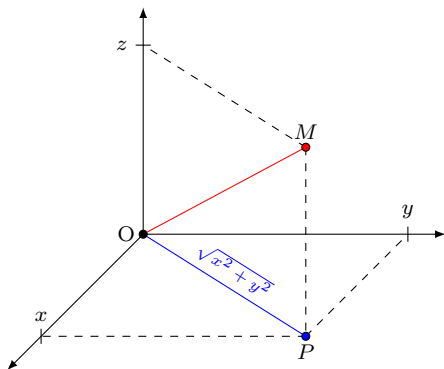
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### 1. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine O du repère

$$I_O = \int_S \dots\dots\dots dm$$



$$\begin{aligned} OM^2 &= OP^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

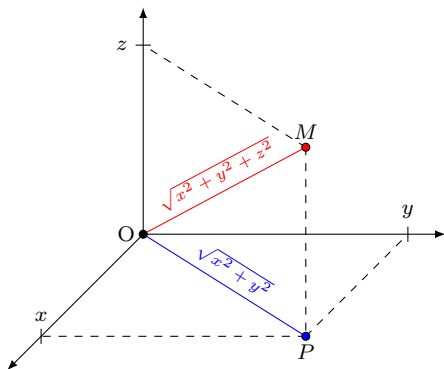
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### 1. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine O du repère

$$I_O = \int_S \dots \dots \dots dm$$



$$\begin{aligned} OM^2 &= OP^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

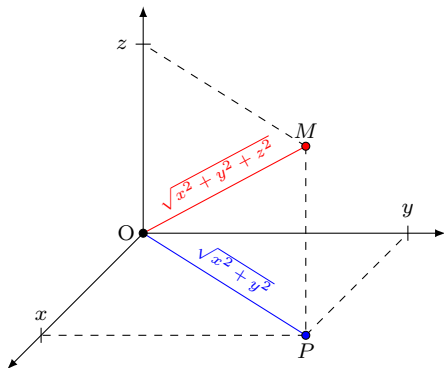
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### 1. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine O du repère

$$I_O = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$



$$\begin{aligned} OM^2 &= OP^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

## 2. Moment d'inertie d'un solide ( $S$ ).



Par rapport à l'origine  $O$  du repère

$$I_O = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

## 2. Moment d'inertie d'un solide ( $S$ ).



Par rapport à l'origine  $O$  du repère

$$I_O = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$



Par rapport à un axe

$$I_{Ox} = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

## 2. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine O du repère

$$I_O = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$



Par rapport à un axe

$$I_{Ox} = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{Oy} = \int_S (x^2 + z^2) dm$$

## 2. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine O du repère

$$I_O = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$



Par rapport à un axe

$$I_{Ox} = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{Oy} = \int_S (x^2 + z^2) dm$$

$$I_{Oz} = \int_S (x^2 + y^2) dm$$

## 2. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine O du repère

$$I_O = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$



Par rapport à un axe

$$I_{Ox} = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{Oy} = \int_S (x^2 + z^2) dm$$

$$I_{Oz} = \int_S (x^2 + y^2) dm$$



Par rapport à un plan

$$I_{xOy} = \int_S z^2 dm$$

## 2. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine O du repère

$$I_O = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$



Par rapport à un axe

$$I_{Ox} = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{Oy} = \int_S (x^2 + z^2) dm$$

$$I_{Oz} = \int_S (x^2 + y^2) dm$$



Par rapport à un plan

$$I_{xOy} = \int_S z^2 dm$$

$$I_{yOz} = \int_S x^2 dm$$

## 2. Moment d'inertie d'un solide (S).



Par rapport à l'origine O du repère

$$I_O = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$



Par rapport à un axe

$$I_{Ox} = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{Oy} = \int_S (x^2 + z^2) dm$$

$$I_{Oz} = \int_S (x^2 + y^2) dm$$



Par rapport à un plan

$$I_{xOy} = \int_S z^2 dm$$

$$I_{yOz} = \int_S x^2 dm$$

$$I_{xOz} = \int_S y^2 dm$$

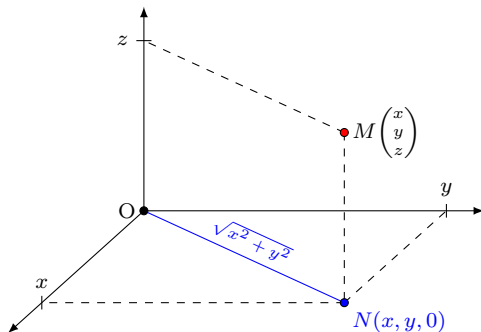


## Remarque

$$| \quad dm = \rho dV = \rho \, dx \, dy \, dz$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

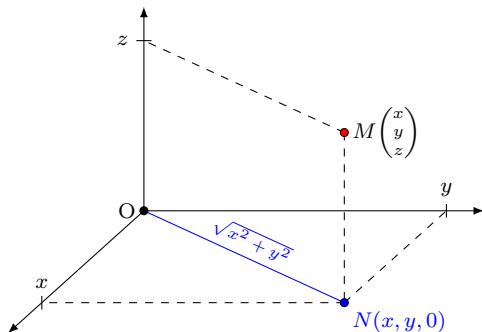
Regardons de plus près le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(Oz)$  :



Par définition le moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$  est

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

Regardons de plus près le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(Oz)$  :

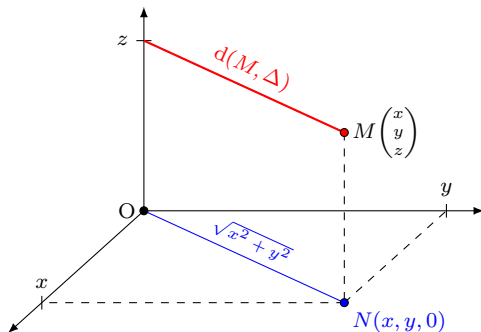


Par définition le moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$  est

$$I_{Oz} = \iiint_S d^2(M, \Delta) \rho(M) dx dy dz$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

Regardons de plus près le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(Oz)$  :



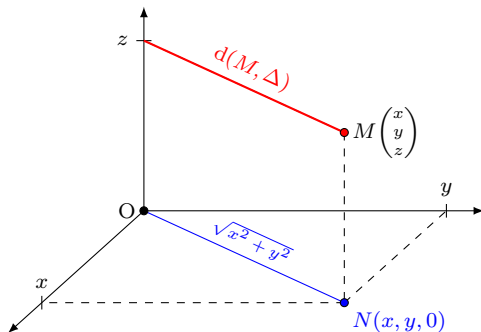
Par définition le moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$  est

$$I_{Oz} = \iiint_S d^2(M, \Delta) \rho(M) dx dy dz$$

Donc, pour  $\Delta = (Oz)$ , on a :  $d^2(M, \Delta) =$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

Regardons de plus près le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(Oz)$  :



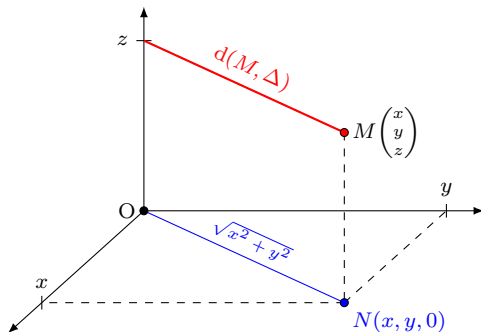
Par définition le moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$  est

$$I_{Oz} = \iiint_S d^2(M, \Delta) \rho(M) dx dy dz$$

Donc, pour  $\Delta = (Oz)$ , on a :  $d^2(M, \Delta) = \mathbf{d^2(M, (Oz)) = ON^2}$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

Regardons de plus près le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(Oz)$  :



Par définition le moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$  est

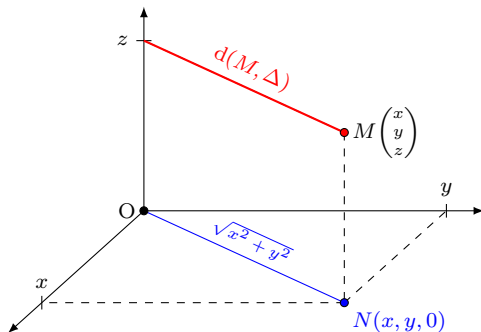
$$I_{Oz} = \iiint_S d^2(M, \Delta) \rho(M) \, dx \, dy \, dz$$

Donc, pour  $\Delta = (Oz)$ , on a :  $d^2(M, \Delta) = \mathbf{d^2(M, (Oz)) = ON^2}$

D'après le théorème de Pythagore,  $ON^2 =$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

Regardons de plus près le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(Oz)$  :



Par définition le moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$  est

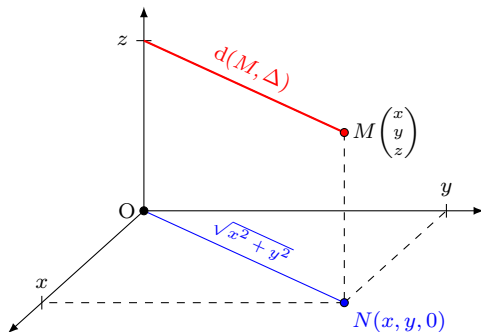
$$I_{Oz} = \iiint_S d^2(M, \Delta) \rho(M) \, dx \, dy \, dz$$

Donc, pour  $\Delta = (Oz)$ , on a :  $d^2(M, \Delta) = \mathbf{d^2(M, (Oz)) = ON^2}$

D'après le théorème de Pythagore,  $ON^2 = x^2 + y^2$ .

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

Regardons de plus près le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(Oz)$  :



Par définition le moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$  est

$$I_{Oz} = \iiint_S d^2(M, \Delta) \rho(M) dx dy dz$$

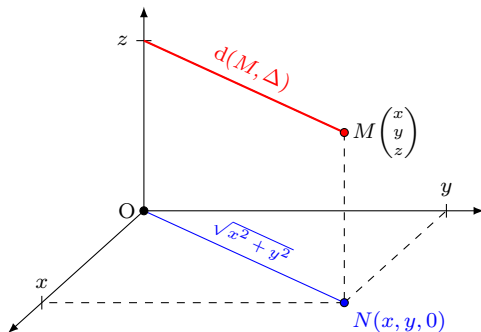
Donc, pour  $\Delta = (Oz)$ , on a :  $d^2(M, \Delta) = \mathbf{d^2(M, (Oz)) = ON^2}$

D'après le théorème de Pythagore,  $ON^2 = x^2 + y^2$ .

C'est pourquoi,  $I_{Oz} =$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

Regardons de plus près le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(Oz)$  :



Par définition le moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$  est

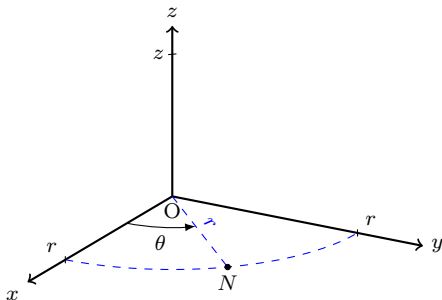
$$I_{Oz} = \iiint_S d^2(M, \Delta) \rho(M) \, dx \, dy \, dz$$

Donc, pour  $\Delta = (Oz)$ , on a :  $d^2(M, \Delta) = \mathbf{d^2(M, (Oz)) = ON^2}$

D'après le théorème de Pythagore,  $ON^2 = x^2 + y^2$ .

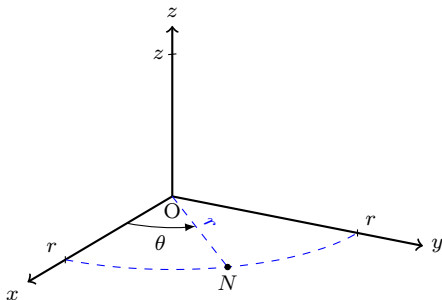
C'est pourquoi,  $I_{Oz} = \iiint_S (x^2 + y^2) \rho(M) \, dx \, dy \, dz$

### 3. Coordonnées cylindriques.



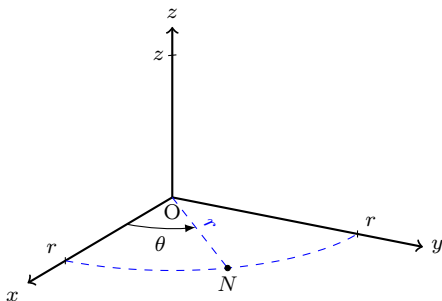
Dans la plan  $(xOy)$ , le point  $N$  a pour coordonnées polaires  $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$  où  $\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$

### 3. Coordonnées cylindriques.



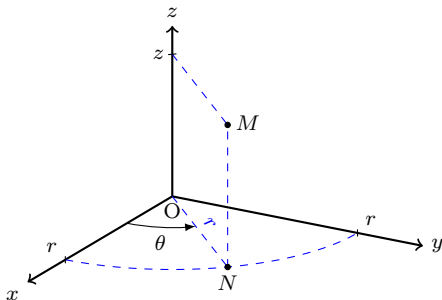
Dans la plan  $(xOy)$ , le point  $N$  a pour coordonnées polaires  $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$  où  $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = \end{cases}$

### 3. Coordonnées cylindriques.



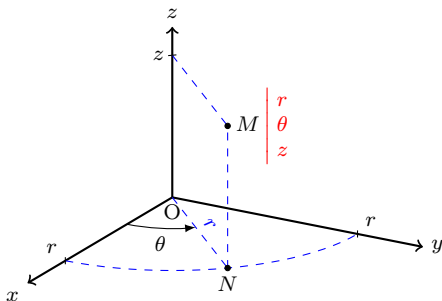
Dans la plan  $(xOy)$ , le point  $N$  a pour coordonnées polaires  $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$  où  $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$

### 3. Coordonnées cylindriques.



Dans la plan  $(xOy)$ , le point  $N$  a pour coordonnées polaires  $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$  où  $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$

### 3. Coordonnées cylindriques.



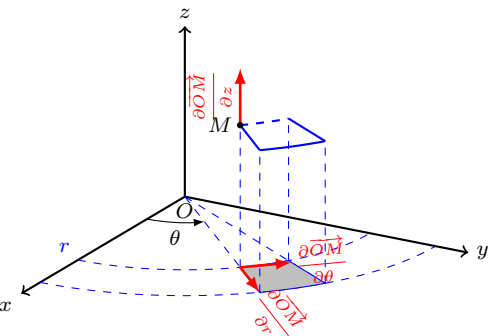
Dans la plan  $(xOy)$ , le point  $N$  a pour coordonnées polaires  $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$  où  $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$

Le point  $M$  a pour coordonnées cylindriques  $\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix}$ .

- 1 Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



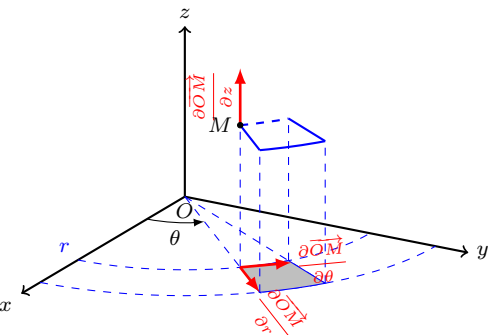
On considère le point  $M(r, \theta, z)$   $\begin{cases} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{cases}$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



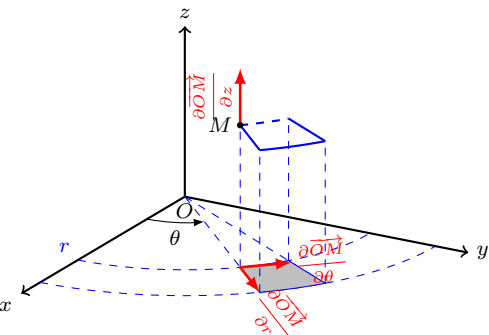
On considère le point  $M(r, \theta, z)$   $\begin{cases} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{cases}$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



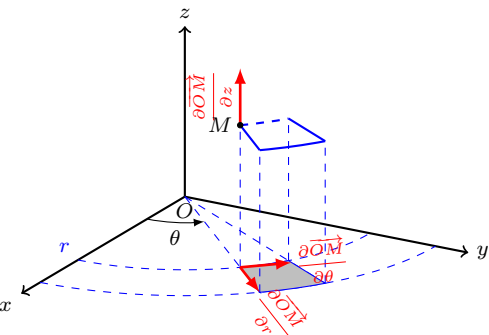
On considère le point  $M(r, \theta, z)$   $\begin{cases} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{cases}$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



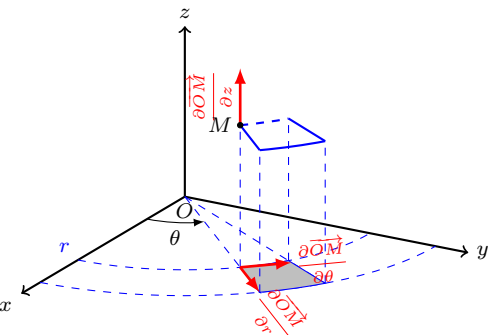
On considère le point  $M(r, \theta, z)$   $\begin{cases} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{cases}$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



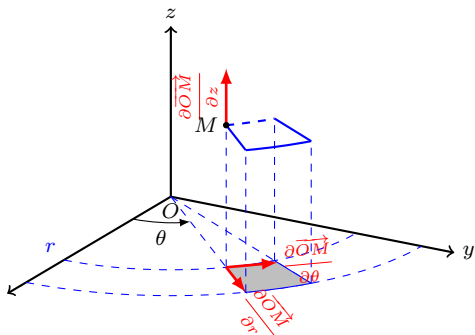
On considère le point  $M(r, \theta, z)$   $\begin{cases} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{cases}$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



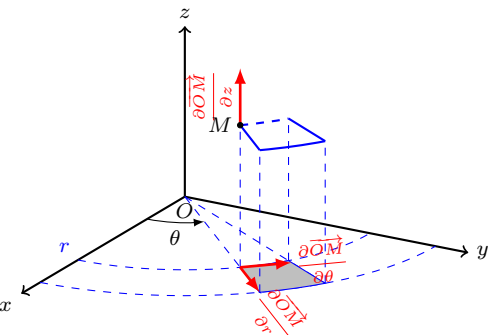
On considère le point  $M(r, \theta, z) \begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{vmatrix}$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



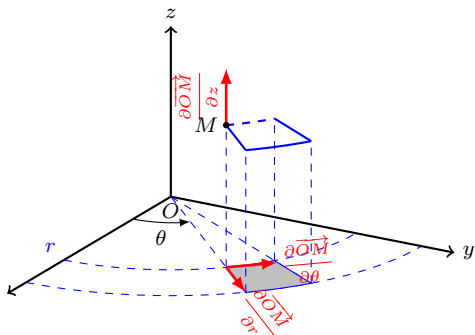
On considère le point  $M(r, \theta, z)$   $\begin{cases} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{cases}$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



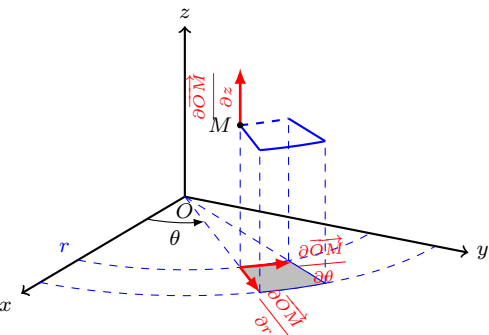
On considère le point  $M(r, \theta, z)$   $\begin{cases} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{cases}$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



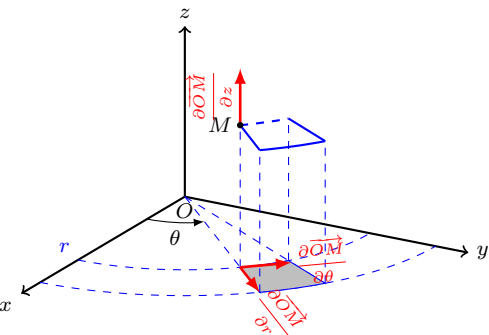
On considère le point  $M(r, \theta, z) \begin{cases} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{cases}$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



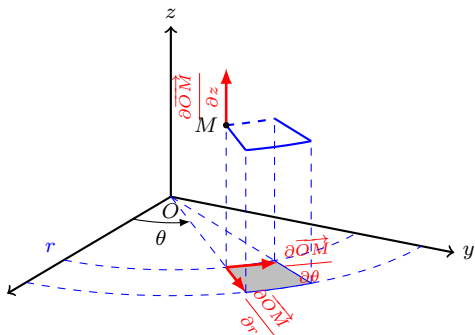
On considère le point  $M(r, \theta, z)$   $\begin{cases} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{cases}$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



On considère le point  $M(r, \theta, z) \begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{vmatrix}$

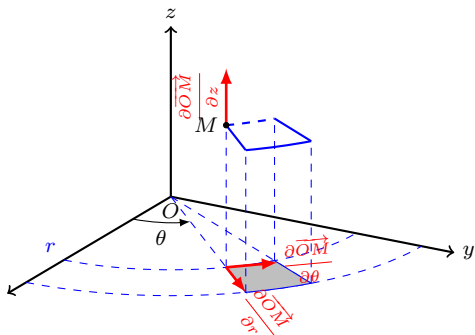
$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \left| \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \\ -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right|$$

# IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



On considère le point  $M(r, \theta, z) \begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{vmatrix}$

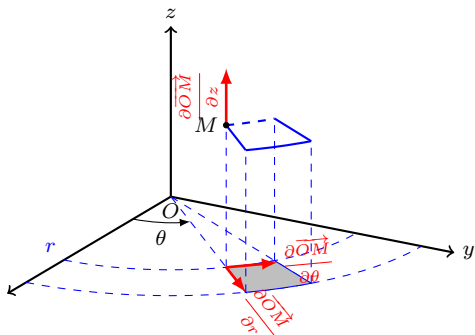
$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

# IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



On considère le point  $M(r, \theta, z)$   $\begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{vmatrix}$

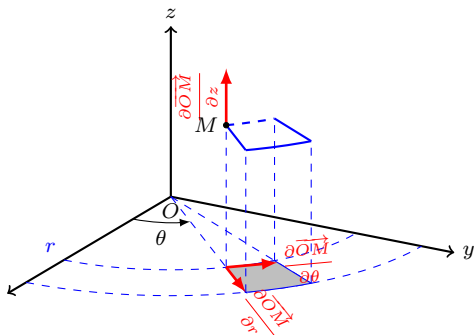
$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

# IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



On considère le point  $M(r, \theta, z)$   $\begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{vmatrix}$

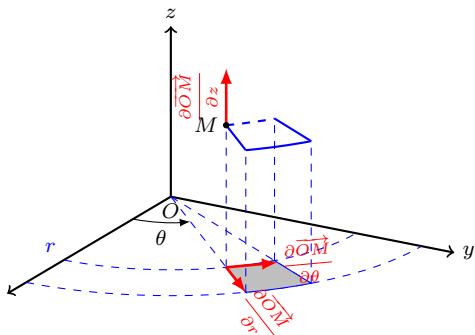
$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

# IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



On considère le point  $M(r, \theta, z)$   $\begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{vmatrix}$

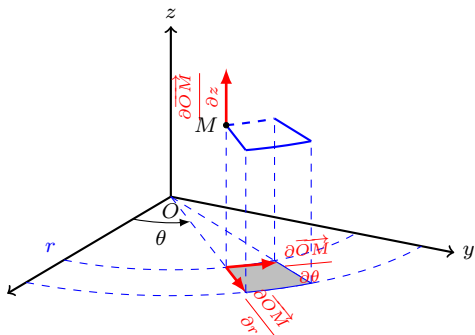
$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

# IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



On considère le point  $M(r, \theta, z) \begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{vmatrix}$

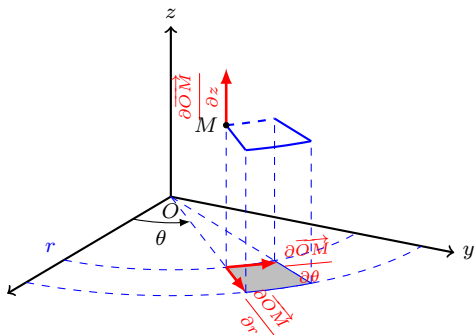
$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

# IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



On considère le point  $M(r, \theta, z)$   $\begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{vmatrix}$

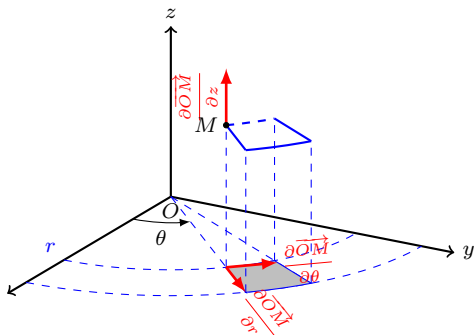
$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



On considère le point  $M(r, \theta, z) \begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{vmatrix}$

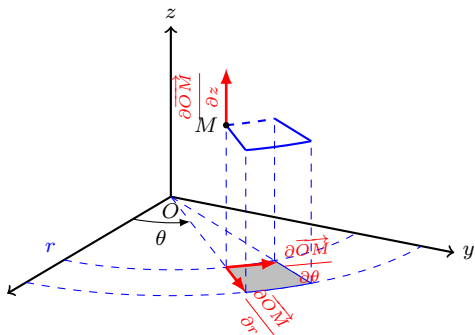
$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

# IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



On considère le point  $M(r, \theta, z)$   $\begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{vmatrix}$

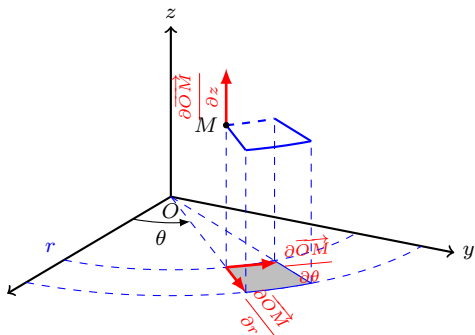
$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

# IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



On considère le point  $M(r, \theta, z) \begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{vmatrix}$

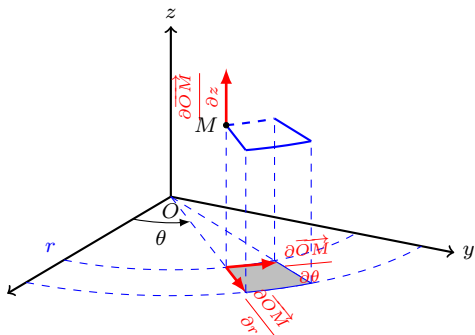
$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left| \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| =$$

# IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



On considère le point  $M(r, \theta, z) \begin{cases} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{cases}$

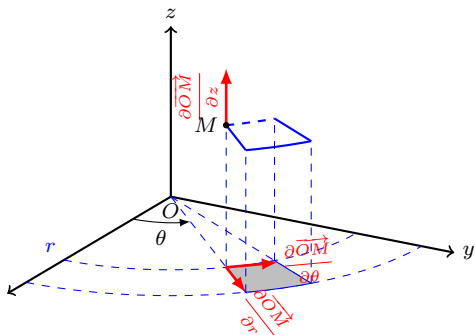
$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} =$$

# IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



On considère le point  $M(r, \theta, z) \begin{cases} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{cases}$

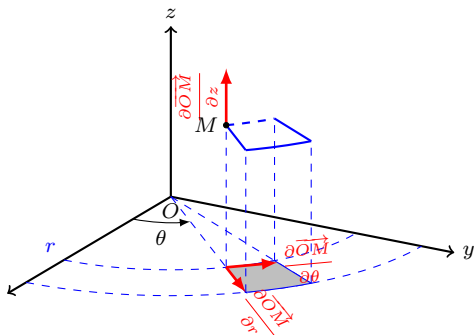
$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

# IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



On considère le point  $M(r, \theta, z) \begin{cases} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{cases}$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

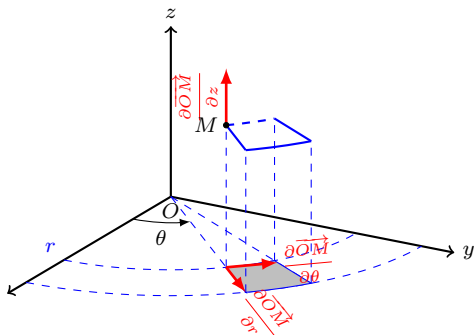
$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

Le jacobien  $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| =$

# IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



On considère le point  $M(r, \theta, z) \begin{cases} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{cases}$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

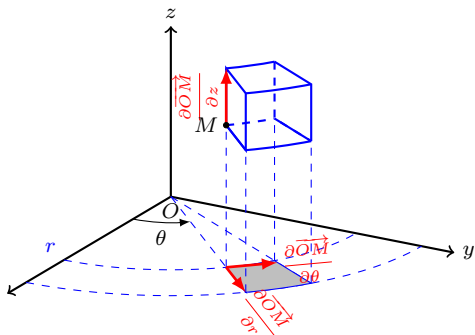
$$\text{et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

Le jacobien  $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = r$  est

# IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

① Approche différentielle de l'élément de volume  $dV$  :



On considère le point  $M(r, \theta, z) \begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{vmatrix}$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

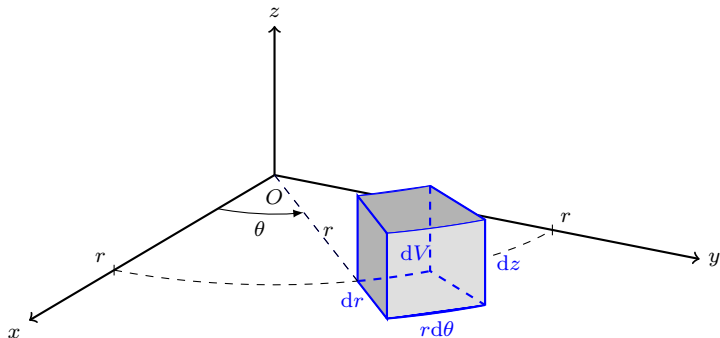
$$\text{et } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

Le jacobien  $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = r$  est l'aire du **paralléloépe** engendré par les vecteurs tangents aux courbes coordonnées.

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

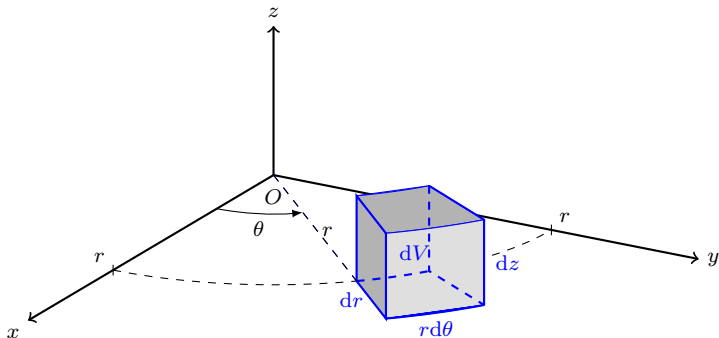
② Approche à la "physicienne" de l'élément de volume  $dV$  :



L'élément de volume  $dV$  est l'aire du paralléloépe **infinitésimal** :

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

② Approche à la "physicienne" de l'élément de volume  $dV$  :



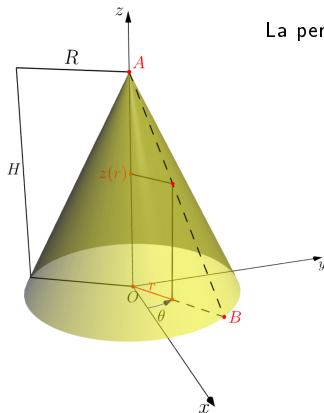
L'élément de volume  $dV$  est l'aire du paralléloépe **infinitésimal** :

$$dV = r dr d\theta dz$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

- 1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.

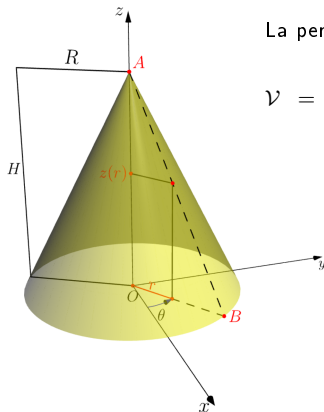


La pente de la droite  $(AB)$  est

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.



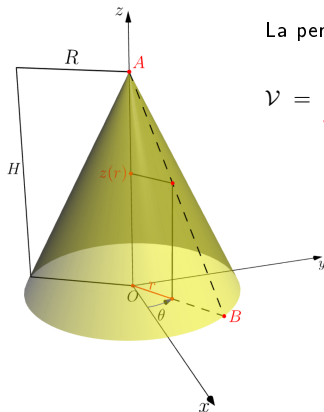
La pente de la droite  $(AB)$  est

$$\mathcal{V} = \iiint_{\text{cône}} dV = \int_0^{2\pi} r d\theta$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.



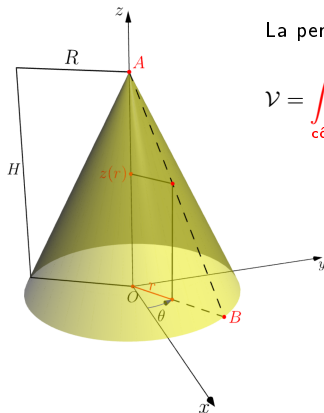
La pente de la droite  $(AB)$  est

$$\mathcal{V} = \iiint_{\text{cône}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

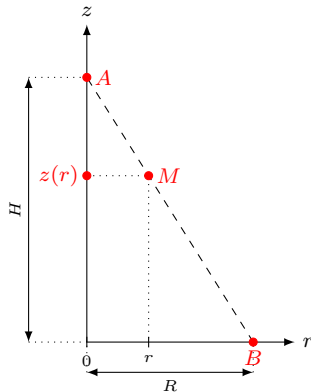
**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.



La pente de la droite  $(AB)$  est

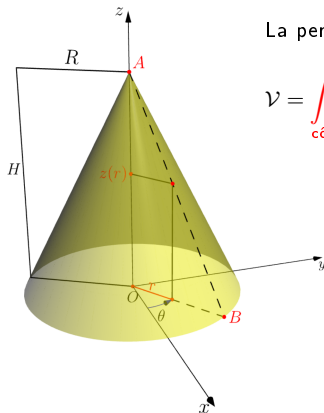
$$\mathcal{V} = \iiint_{\text{cône}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{z(r)} r \, dz \, dr \, d\theta \text{ où } z(r) =$$



## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

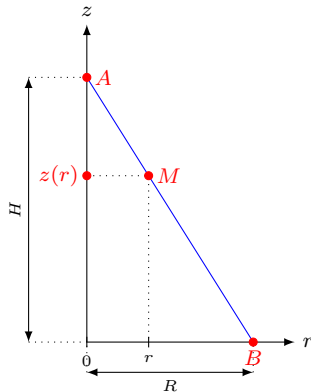
**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.



La pente de la droite  $(AB)$  est

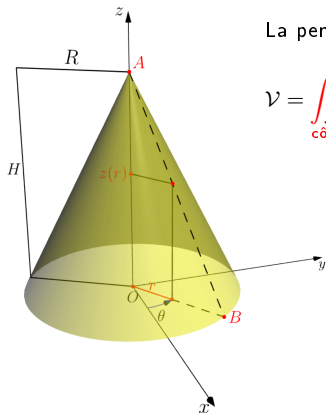
$$\mathcal{V} = \iiint_{\text{cône}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{z(r)} r \, dz \, dr \, d\theta \text{ où } z(r) =$$



## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

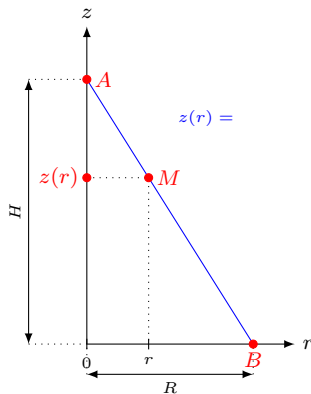
**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.



La pente de la droite  $(AB)$  est

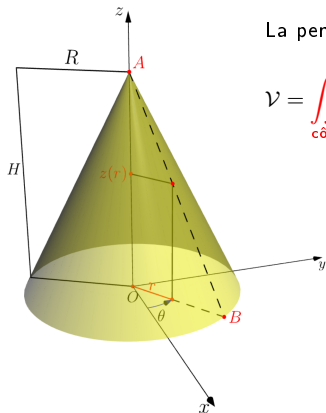
$$\mathcal{V} = \iiint_{\text{cône}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{z(r)} r \, dz \, dr \, d\theta \text{ où } z(r) =$$



## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

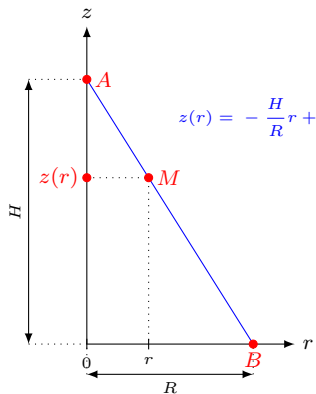
**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.



La pente de la droite  $(AB)$  est  $-\frac{H}{R}$

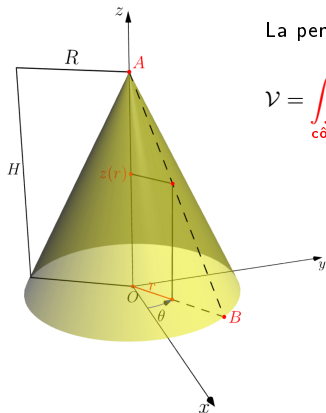
$$\mathcal{V} = \iiint_{\text{cône}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{z(r)} r \, dz \, dr \, d\theta \text{ où } z(r) =$$



## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

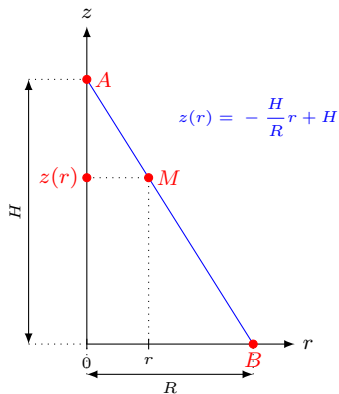
**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.



La pente de la droite  $(AB)$  est  $-\frac{H}{R}$

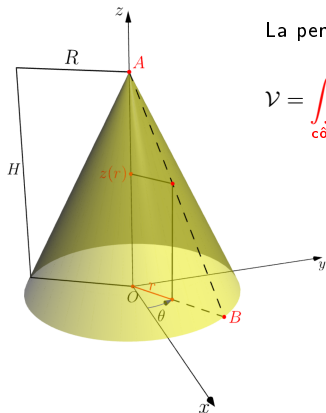
$$\mathcal{V} = \iiint_{\text{cône}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{z(r)} r \, dz \, dr \, d\theta \text{ où } z(r) =$$



## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

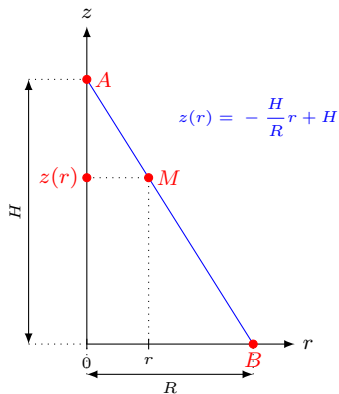
**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.



La pente de la droite  $(AB)$  est  $-\frac{H}{R}$

$$\mathcal{V} = \iiint_{\text{cône}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{z(r)} r \, dz \, dr \, d\theta \text{ où } z(r) = -\frac{H}{R}r + H$$



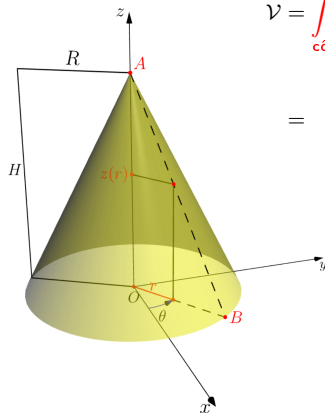
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.

La pente de la droite  $(AB)$  est  $-\frac{H}{R}$

$$\mathcal{V} = \iiint_{\text{cône}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{z(r)} r \, dz \, dr \, d\theta \text{ où } z(r) = -\frac{H}{R}r + H$$



=

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

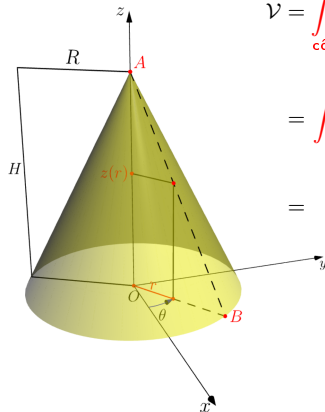
1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.

La pente de la droite  $(AB)$  est  $-\frac{H}{R}$

$$\mathcal{V} = \iiint_{\text{cône}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{z(r)} r \, dz \, dr \, d\theta \text{ où } z(r) = -\frac{H}{R}r + H$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{H - \frac{H}{R}r} r \, dz \, dr \, d\theta$$

=



## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.

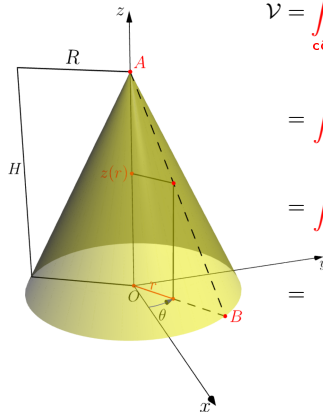
La pente de la droite  $(AB)$  est  $-\frac{H}{R}$

$$\mathcal{V} = \iiint_{\text{cône}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{z(r)} r \, dz \, dr \, d\theta \text{ où } z(r) = -\frac{H}{R}r + H$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{H - \frac{H}{R}r} r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ rz \right]_0^{H - \frac{H}{R}r} \, dr \, d\theta$$

=



## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.

La pente de la droite  $(AB)$  est  $-\frac{H}{R}$

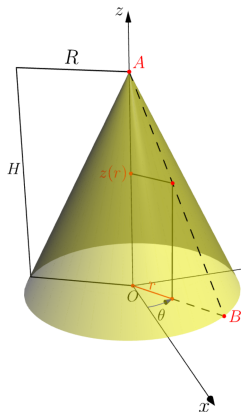
$$\mathcal{V} = \iiint_{\text{cône}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{z(r)} r \, dz \, dr \, d\theta \text{ où } z(r) = -\frac{H}{R}r + H$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{H - \frac{H}{R}r} r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R [rz]_0^{H - \frac{H}{R}r} \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( Hr - \frac{Hr^2}{R} \right) \, dr \, d\theta$$

=



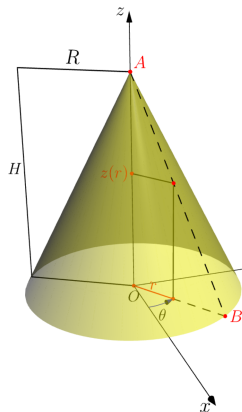
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.

La pente de la droite  $(AB)$  est  $-\frac{H}{R}$

$$\mathcal{V} = \iiint_{\text{cône}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{z(r)} r \, dz \, dr \, d\theta \text{ où } z(r) = -\frac{H}{R}r + H$$



$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{H - \frac{H}{R}r} r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R [rz]_0^{H - \frac{H}{R}r} \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( Hr - \frac{Hr^2}{R} \right) \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ H \frac{r^2}{2} - \frac{H}{R} \frac{r^3}{3} \right]_0^R \, d\theta =$$

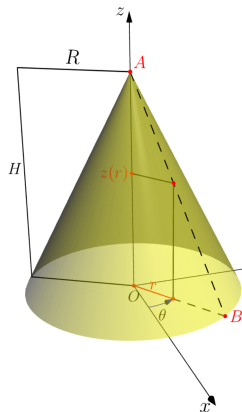
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.

La pente de la droite  $(AB)$  est  $-\frac{H}{R}$

$$\mathcal{V} = \iiint_{\text{cône}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{z(r)} r \, dz \, dr \, d\theta \text{ où } z(r) = -\frac{H}{R}r + H$$



$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{H - \frac{H}{R}r} r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ rz \right]_0^{H - \frac{H}{R}r} dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( Hr - \frac{Hr^2}{R} \right) dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ H \frac{r^2}{2} - \frac{H}{R} \frac{r^3}{3} \right]_0^R d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ H \frac{R^2}{2} - \frac{HR^2}{3} \right] d\theta$$

=

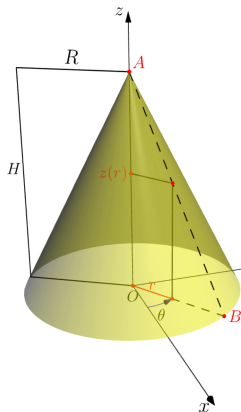
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.

La pente de la droite  $(AB)$  est  $-\frac{H}{R}$

$$\mathcal{V} = \iiint_{\text{cône}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{z(r)} r \, dz \, dr \, d\theta \text{ où } z(r) = -\frac{H}{R}r + H$$



$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{H - \frac{H}{R}r} r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ rz \right]_0^{H - \frac{H}{R}r} dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( Hr - \frac{Hr^2}{R} \right) dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ H \frac{r^2}{2} - \frac{H}{R} \frac{r^3}{3} \right]_0^R d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ H \frac{R^2}{2} - \frac{HR^2}{3} \right] d\theta$$

$$= 2\pi \times \frac{HR^2}{6} =$$

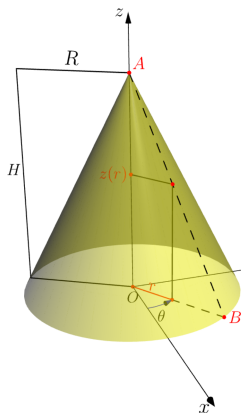
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 6** : On considère une cône homogène de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

1 Détermine le volume  $\mathcal{V}$  de ce cône.

La pente de la droite  $(AB)$  est  $-\frac{H}{R}$

$$\mathcal{V} = \iiint_{\text{cône}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{z(r)} r \, dz \, dr \, d\theta \text{ où } z(r) = -\frac{H}{R}r + H$$



$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{H - \frac{H}{R}r} r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ rz \right]_0^{H - \frac{H}{R}r} dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( Hr - \frac{Hr^2}{R} \right) dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ H \frac{r^2}{2} - \frac{H}{R} \frac{r^3}{3} \right]_0^R d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ H \frac{R^2}{2} - \frac{HR^2}{3} \right] d\theta$$

$$= 2\pi \times \frac{HR^2}{6} = \frac{\pi HR^2}{3}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

- 2 Détermine le centre d'inertie de ce cône.

Les symétries du cône impose trivialement que  $x_G = y_G =$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

- 2 Détermine le centre d'inertie de ce cône.

Les symétries du cône impose trivialement que  $x_G = y_G = 0$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

- 2 Détermine le centre d'inertie de ce cône.

Les symétries du cône impose trivialement que  $x_G = y_G = 0$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{H - \frac{H}{R}r} z \rho r \, dz dr d\theta =$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

- 2 Détermine le centre d'inertie de ce cône.

Les symétries du cône impose trivialement que  $x_G = y_G = 0$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{H-\frac{H}{R}r} z \rho r \, dz dr d\theta = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ r \frac{z^2}{2} \right]_0^{H-\frac{H}{R}r} dr d\theta$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

- 2 Détermine le centre d'inertie de ce cône.

Les symétries du cône impose trivialement que  $x_G = y_G = 0$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{H-\frac{H}{R}r} z \rho r \, dz dr d\theta = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ r \frac{z^2}{2} \right]_0^{H-\frac{H}{R}r} dr d\theta$$

=

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

- 2 Détermine le centre d'inertie de ce cône.

Les symétries du cône impose trivialement que  $x_G = y_G = 0$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{H - \frac{H}{R}r} z \rho r \, dz dr d\theta = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ r \frac{z^2}{2} \right]_0^{H - \frac{H}{R}r} dr d\theta$$

$$= \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R r \frac{1}{2} \left( H - \frac{H}{R}r \right)^2 dr d\theta$$

=

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

- 2 Détermine le centre d'inertie de ce cône.

Les symétries du cône impose trivialement que  $x_G = y_G = 0$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{H - \frac{H}{R}r} z \rho r \, dz dr d\theta = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ r \frac{z^2}{2} \right]_0^{H - \frac{H}{R}r} dr d\theta$$

$$= \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R r \frac{1}{2} \left( H - \frac{H}{R}r \right)^2 dr d\theta$$

$$= \frac{\rho}{M} \frac{1}{2R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r (HR - Hr)^2 dr d\theta$$

=

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

- 2 Détermine le centre d'inertie de ce cône.

Les symétries du cône impose trivialement que  $x_G = y_G = 0$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{H - \frac{H}{R}r} z \rho r \, dz dr d\theta = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ r \frac{z^2}{2} \right]_0^{H - \frac{H}{R}r} dr d\theta$$

$$= \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R r \frac{1}{2} \left( H - \frac{H}{R}r \right)^2 dr d\theta$$

$$= \frac{\rho}{M} \frac{1}{2R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r (HR - Hr)^2 dr d\theta$$

$$= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R (H^2 R^2 r - 2H^2 R r^2 + H^2 r^3) dr d\theta$$

=

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

- 2 Détermine le centre d'inertie de ce cône.

Les symétries du cône impose trivialement que  $x_G = y_G = 0$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{H - \frac{H}{R}r} z \rho r \, dz \, dr \, d\theta = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ r \frac{z^2}{2} \right]_0^{H - \frac{H}{R}r} \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R r \frac{1}{2} \left( H - \frac{H}{R}r \right)^2 \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{\rho}{M} \frac{1}{2R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r (HR - Hr)^2 \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( H^2 R^2 r - 2H^2 R r^2 + H^2 r^3 \right) \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left[ H^2 R^2 \frac{r^2}{2} - 2H^2 R \frac{r^3}{3} + H^2 \frac{r^4}{4} \right]_0^R \, dr \, d\theta$$

=

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

- 2 Détermine le centre d'inertie de ce cône.

Les symétries du cône impose trivialement que  $x_G = y_G = 0$

$$\begin{aligned}z_G &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{H-\frac{H}{R}r} z \rho r \, dz dr d\theta = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ r \frac{z^2}{2} \right]_0^{H-\frac{H}{R}r} dr d\theta \\&= \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R r \frac{1}{2} \left( H - \frac{H}{R}r \right)^2 dr d\theta \\&= \frac{\rho}{M} \frac{1}{2R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r (HR - Hr)^2 dr d\theta \\&= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R (H^2 R^2 r - 2H^2 Rr^2 + H^2 r^3) dr d\theta \\&= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left[ H^2 R^2 \frac{r^2}{2} - 2H^2 R \frac{r^3}{3} + H^2 \frac{r^4}{4} \right]_0^R dr d\theta \\&= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left( H^2 \frac{R^4}{2} - 2H^2 \frac{R^4}{3} + H^2 \frac{R^4}{4} \right) d\theta\end{aligned}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left[ H^2 R^2 \frac{r^2}{2} - 2H^2 R \frac{r^3}{3} + H^2 \frac{r^4}{4} \right]_0^R dr d\theta \\ &= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left( H^2 \frac{R^4}{2} - 2H^2 \frac{R^4}{3} + H^2 \frac{R^4}{4} \right) d\theta \end{aligned}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

$$z_G = \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left[ H^2 R^2 \frac{r^2}{2} - 2H^2 R \frac{r^3}{3} + H^2 \frac{r^4}{4} \right]_0^R dr d\theta$$

$$= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left( H^2 \frac{R^4}{2} - 2H^2 \frac{R^4}{3} + H^2 \frac{R^4}{4} \right) d\theta$$

=

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

$$\begin{aligned}z_G &= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left[ H^2 R^2 \frac{r^2}{2} - 2H^2 R \frac{r^3}{3} + H^2 \frac{r^4}{4} \right]_0^R dr d\theta \\ &= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left( H^2 \frac{R^4}{2} - 2H^2 \frac{R^4}{3} + H^2 \frac{R^4}{4} \right) d\theta \\ &= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \frac{H^2 R^4}{12} d\theta = \frac{2\pi\rho H^2 R^2}{24M} \text{ où } M =\end{aligned}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

$$\begin{aligned}z_G &= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left[ H^2 R^2 \frac{r^2}{2} - 2H^2 R \frac{r^3}{3} + H^2 \frac{r^4}{4} \right]_0^R dr d\theta \\ &= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left( H^2 \frac{R^4}{2} - 2H^2 \frac{R^4}{3} + H^2 \frac{R^4}{4} \right) d\theta \\ &= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \frac{H^2 R^4}{12} d\theta = \frac{2\pi\rho H^2 R^2}{24M} \text{ où } M = \frac{\pi H R^2 \rho}{3} \\ &= \end{aligned}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

$$\begin{aligned}z_G &= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left[ H^2 R^2 \frac{r^2}{2} - 2H^2 R \frac{r^3}{3} + H^2 \frac{r^4}{4} \right]_0^R dr d\theta \\&= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left( H^2 \frac{R^4}{2} - 2H^2 \frac{R^4}{3} + H^2 \frac{R^4}{4} \right) d\theta \\&= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \frac{H^2 R^4}{12} d\theta = \frac{2\pi\rho H^2 R^2}{24M} \text{ où } M = \frac{\pi H R^2 \rho}{3} \\&= \frac{2\pi\rho H^2 R^2}{24 \left( \frac{\pi H R^2 \rho}{3} \right)} =\end{aligned}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

$$\begin{aligned}z_G &= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left[ H^2 R^2 \frac{r^2}{2} - 2H^2 R \frac{r^3}{3} + H^2 \frac{r^4}{4} \right]_0^R dr d\theta \\ &= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left( H^2 \frac{R^4}{2} - 2H^2 \frac{R^4}{3} + H^2 \frac{R^4}{4} \right) d\theta \\ &= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \frac{H^2 R^4}{12} d\theta = \frac{2\pi\rho H^2 R^2}{24M} \text{ où } M = \frac{\pi H R^2 \rho}{3} \\ &= \frac{2\pi\rho H^2 R^2}{24 \left( \frac{\pi H R^2 \rho}{3} \right)} = \frac{2\pi\rho H^2 R^2}{24} \times \frac{3}{\pi H R^2 \rho} =\end{aligned}$$

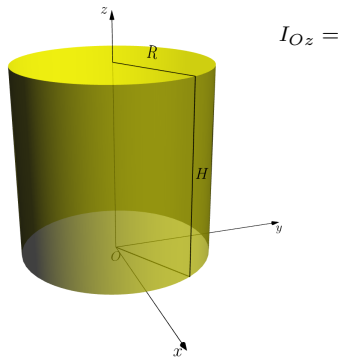
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

$$\begin{aligned}z_G &= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left[ H^2 R^2 \frac{r^2}{2} - 2H^2 R \frac{r^3}{3} + H^2 \frac{r^4}{4} \right]_0^R dr d\theta \\&= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \left( H^2 \frac{R^4}{2} - 2H^2 \frac{R^4}{3} + H^2 \frac{R^4}{4} \right) d\theta \\&= \frac{\rho}{2MR^2} \int_0^{2\pi} \frac{H^2 R^4}{12} d\theta = \frac{2\pi\rho H^2 R^2}{24M} \text{ où } M = \frac{\pi H R^2 \rho}{3} \\&= \frac{2\pi\rho H^2 R^2}{24 \left( \frac{\pi H R^2 \rho}{3} \right)} = \frac{2\pi\rho H^2 R^2}{24} \times \frac{3}{\pi H R^2 \rho} = \frac{H}{4}\end{aligned}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### ③ Application à la mécanique.

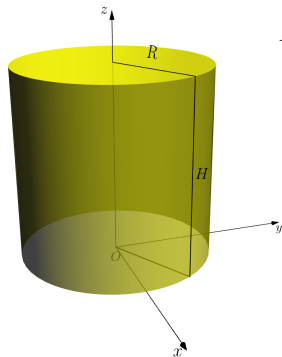
**Exemple n° 7** : Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon  $R$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).



## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### ③ Application à la mécanique.

**Exemple n° 7** : Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon  $R$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).

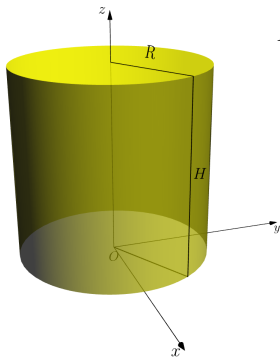


$$I_{Oz} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz$$
$$=$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### ③ Application à la mécanique.

**Exemple n° 7 :** Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon  $R$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).

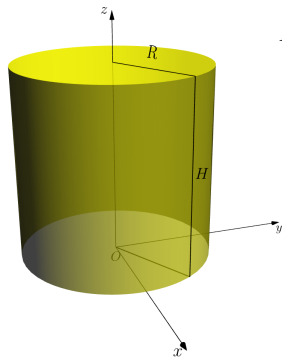


$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)) r dr d\theta dz \end{aligned}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### ③ Application à la mécanique.

**Exemple n° 7 :** Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon  $R$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).

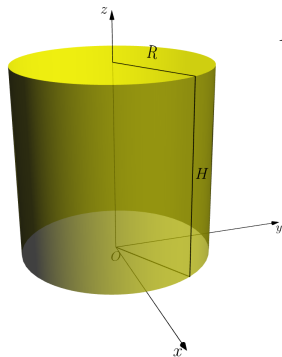


$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{(r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta))}_{=r^2} r dr d\theta dz \\ &= \end{aligned}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### ③ Application à la mécanique.

**Exemple n° 7 :** Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon  $R$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).

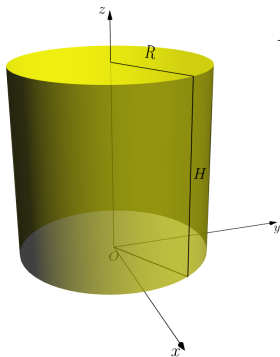


$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{(r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta))}_{=r^2} r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R d\theta dz = \end{aligned}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### ③ Application à la mécanique.

**Exemple n° 7 :** Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon  $R$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).

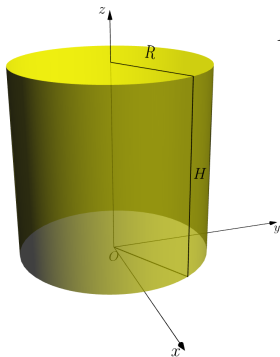


$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{(r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta))}_{=r^2} r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R d\theta dz = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\theta dz \\ &= \end{aligned}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### ③ Application à la mécanique.

**Exemple n° 7 :** Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon  $R$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).

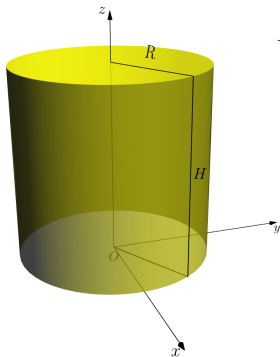


$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{(r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta))}_{=r^2} r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R d\theta dz = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \left[ \frac{R^4}{4} \theta \right]_0^{2\pi} dz = \end{aligned}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### ③ Application à la mécanique.

**Exemple n° 7 :** Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon  $R$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).

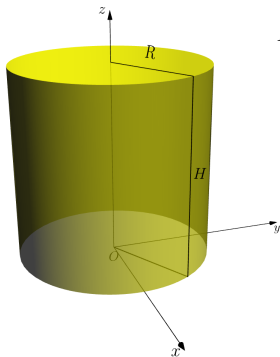


$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{(r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta))}_{=r^2} r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R d\theta dz = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \left[ \frac{R^4}{4} \theta \right]_0^{2\pi} dz = \rho \int_0^H \frac{\pi R^4}{2} dz = \end{aligned}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### ③ Application à la mécanique.

**Exemple n° 7 :** Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon  $R$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).



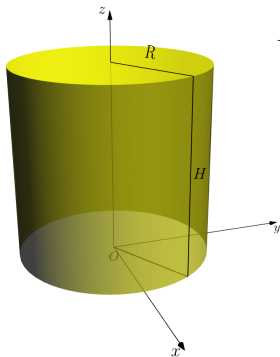
$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{(r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta))}_{=r^2} r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R d\theta dz = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \left[ \frac{R^4}{4} \theta \right]_0^{2\pi} dz = \rho \int_0^H \frac{\pi R^4}{2} dz = \frac{\rho \pi R^4 H}{2} \end{aligned}$$

Comme la masse du cylindre est  $M =$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### ③ Application à la mécanique.

**Exemple n° 7 :** Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon  $R$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).



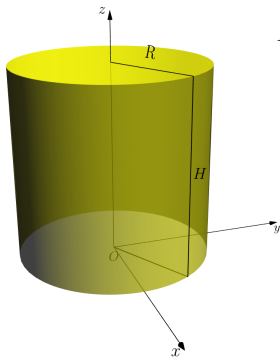
$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{(r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta))}_{=r^2} r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R d\theta dz = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \left[ \frac{R^4}{4} \theta \right]_0^{2\pi} dz = \rho \int_0^H \frac{\pi R^4}{2} dz = \frac{\rho \pi R^4 H}{2} \end{aligned}$$

Comme la masse du cylindre est  $M = \pi R^2 H \rho$ ,

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### ③ Application à la mécanique.

**Exemple n° 7 :** Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon  $R$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).



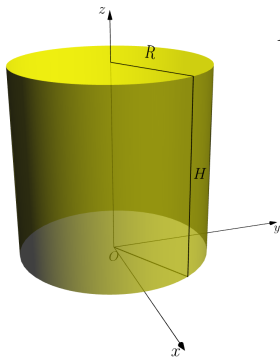
$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{(r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta))}_{=r^2} r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R d\theta dz = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \left[ \frac{R^4}{4} \theta \right]_0^{2\pi} dz = \rho \int_0^H \frac{\pi R^4}{2} dz = \frac{\rho \pi R^4 H}{2} \end{aligned}$$

Comme la masse du cylindre est  $M = \pi R^2 H \rho$ , on a :  $I_{Oz} =$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### ③ Application à la mécanique.

**Exemple n° 7 :** Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon  $R$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).



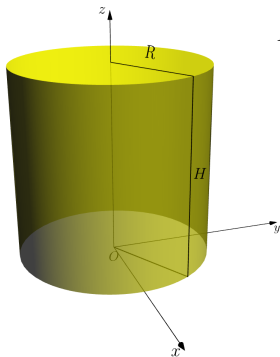
$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{(r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta))}_{=r^2} r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R d\theta dz = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \left[ \frac{R^4}{4} \theta \right]_0^{2\pi} dz = \rho \int_0^H \frac{\pi R^4}{2} dz = \frac{\rho \pi R^4 H}{2} \end{aligned}$$

Comme la masse du cylindre est  $M = \pi R^2 H \rho$ , on a :  $I_{Oz} = \frac{(\rho \pi R^2 H) R^2}{2} =$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

### ③ Application à la mécanique.

**Exemple n° 7 :** Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon  $R$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).



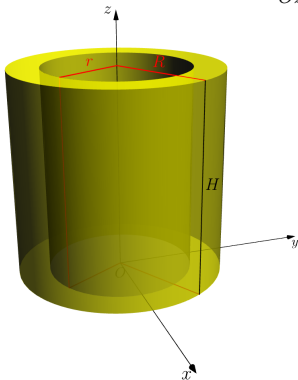
$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{(r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta))}_{=r^2} r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R d\theta dz = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \left[ \frac{R^4}{4} \theta \right]_0^{2\pi} dz = \rho \int_0^H \frac{\pi R^4}{2} dz = \frac{\rho \pi R^4 H}{2} \end{aligned}$$

Comme la masse du cylindre est  $M = \pi R^2 H \rho$ , on a :  $I_{Oz} = \frac{(\rho \pi R^2 H) R^2}{2} = \frac{MR^2}{2}$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 8** : Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon extérieur  $R_2$ , de rayon intérieur  $R_1$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).

$$I_{Oz} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz$$



=

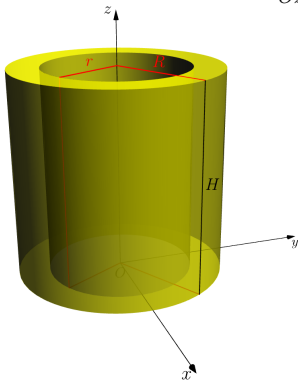
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 8** : Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon extérieur  $R_2$ , de rayon intérieur  $R_1$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).

$$I_{Oz} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz$$

$$= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr d\theta dz$$

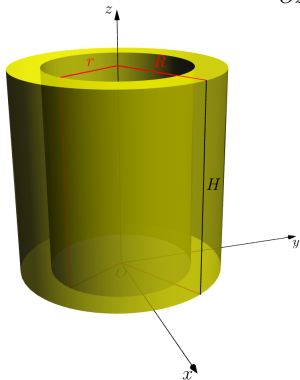
=



## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 8** : Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon extérieur  $R_2$ , de rayon intérieur  $R_1$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).

$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} d\theta dz = \end{aligned}$$



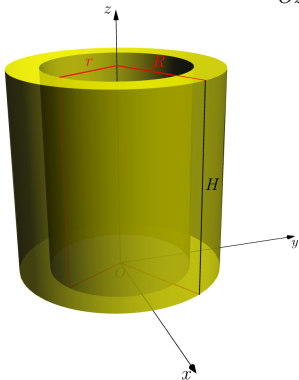
## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 8** : Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon extérieur  $R_2$ , de rayon intérieur  $R_1$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).

$$I_{Oz} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz$$

$$= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr d\theta dz$$

$$= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} d\theta dz = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} d\theta dz$$



## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 8** : Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon extérieur  $R_2$ , de rayon intérieur  $R_1$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).

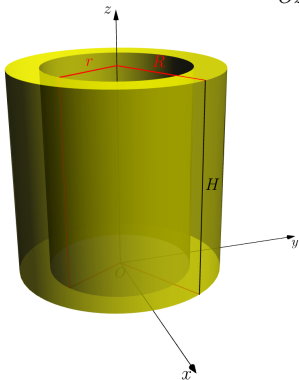
$$I_{Oz} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz$$

$$= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr d\theta dz$$

$$= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} d\theta dz = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} d\theta dz$$

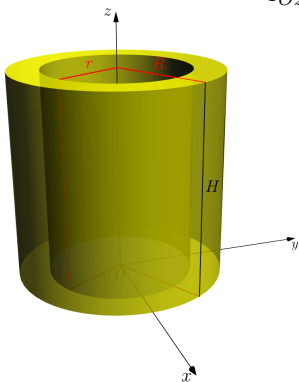
$$= \rho \int_0^H \left[ \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \theta \right]_0^{2\pi} dz$$

=



## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 8** : Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon extérieur  $R_2$ , de rayon intérieur  $R_1$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).

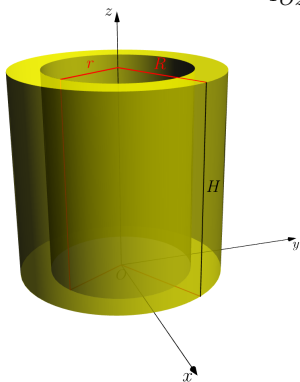


$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} d\theta dz = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \left[ \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \theta \right]_0^{2\pi} dz \\ &= \rho \int_0^H \frac{\pi (R_2^4 - R_1^4)}{2} dz = \frac{\rho \pi (R_2^4 - R_1^4) H}{2} \end{aligned}$$

Comme la masse du cylindre est  $M =$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 8** : Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon extérieur  $R_2$ , de rayon intérieur  $R_1$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).



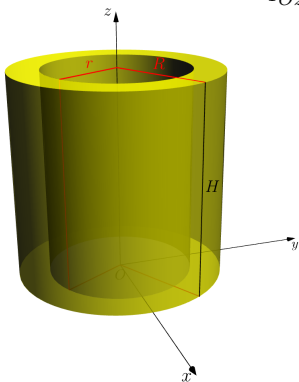
$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} d\theta dz = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \left[ \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \theta \right]_0^{2\pi} dz \\ &= \rho \int_0^H \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2} dz = \frac{\rho\pi(R_2^4 - R_1^4)H}{2} \end{aligned}$$

Comme la masse du cylindre est  $M = \pi(R_2^2 - R_1^2)H\rho$ , on a :

$$I_{Oz} =$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 8** : Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon extérieur  $R_2$ , de rayon intérieur  $R_1$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).



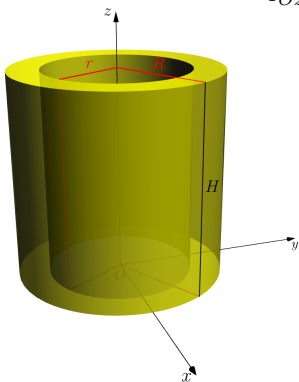
$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} d\theta dz = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} d\theta dz \\ &= \rho \int_0^H \left[ \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \theta \right]_0^{2\pi} dz \\ &= \rho \int_0^H \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2} dz = \frac{\rho\pi(R_2^4 - R_1^4)H}{2} \end{aligned}$$

Comme la masse du cylindre est  $M = \pi(R_2^2 - R_1^2)H\rho$ , on a :

$$I_{Oz} = \frac{\rho\pi(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)H}{2} =$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

**Exemple n° 8** : Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène ( $\rho$  est constant), de rayon extérieur  $R_2$ , de rayon intérieur  $R_1$ , de hauteur  $H$ , et d'axe de révolution ( $Oz$ ).



$$\begin{aligned}I_{Oz} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (x^2 + y^2) \rho r dr d\theta dz \\&= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr d\theta dz \\&= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} d\theta dz = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} d\theta dz \\&= \rho \int_0^H \left[ \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \theta \right]_0^{2\pi} dz \\&= \rho \int_0^H \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2} dz = \frac{\rho\pi(R_2^4 - R_1^4)H}{2}\end{aligned}$$

Comme la masse du cylindre est  $M = \pi(R_2^2 - R_1^2)H\rho$ , on a :

$$I_{Oz} = \frac{\rho\pi(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)H}{2} = \frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

$$I_{Oz} = \frac{\rho\pi(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)H}{2} = \frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$

**Conséquence physique** : Une roue creuse descend **???** vite une pente qu'une roue pleine de même masse.

## IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.

$$I_{Oz} = \frac{\rho\pi(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)H}{2} = \frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$

**Conséquence physique** : Une roue creuse descend **moins** vite une pente qu'une roue pleine de même masse.