

1. Centre d'inertie

Pour une distribution discrète de n points matériels A_1, A_2, \dots, A_n de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n , on appelle **centre d'inertie** d'un objet, ou **centre de masse** l'unique point G défini par :

1. Centre d'inertie

Pour une distribution discrète de n points matériels A_1, A_2, \dots, A_n de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n , on appelle **centre d'inertie** d'un objet, ou **centre de masse** l'unique point G défini par :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{AA_i} \text{ où } m = \sum_{i=1}^n m_i \text{ est la masse des points matériels.}$$

1. Centre d'inertie

Pour une distribution discrète de n points matériels A_1, A_2, \dots, A_n de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n , on appelle **centre d'inertie** d'un objet, ou **centre de masse** l'unique point G défini par :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{AA_i} \text{ où } m = \sum_{i=1}^n m_i \text{ est la masse des points matériels.}$$

Cet égalité est indépendante du choix du point A . Elle exprime comment on va d'un point A au point G .

1. Centre d'inertie

Pour une distribution discrète de n points matériels A_1, A_2, \dots, A_n de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n , on appelle **centre d'inertie** d'un objet, ou **centre de masse** l'unique point G défini par :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{AA_i} \text{ où } m = \sum_{i=1}^n m_i \text{ est la masse des points matériels.}$$

Cet égalité est indépendante du choix du point A . Elle exprime comment on va d'un point A au point G .

Pour une distribution continue de de masse répartie dans un domaine \mathcal{D} du plan avec une densité de masse $\rho(M)$ en tout point $M(x, y) \in \mathcal{D}$ la formule précédente devient :

1. Centre d'inertie

Pour une distribution discrète de n points matériels A_1, A_2, \dots, A_n de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n , on appelle **centre d'inertie** d'un objet, ou **centre de masse** l'unique point G défini par :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{AA_i} \text{ où } m = \sum_{i=1}^n m_i \text{ est la masse des points matériels.}$$

Cet égalité est indépendante du choix du point A . Elle exprime comment on va d'un point A au point G .

Pour une distribution continue de de masse répartie dans un domaine \mathcal{D} du plan avec une densité de masse $\rho(M)$ en tout point $M(x, y) \in \mathcal{D}$ la formule précédente devient :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) \overrightarrow{AM} \, dx \, dy \text{ où } m = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) \, dx \, dy.$$

1. Centre d'inertie

Pour une distribution discrète de n points matériels A_1, A_2, \dots, A_n de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n , on appelle **centre d'inertie** d'un objet, ou **centre de masse** l'unique point G défini par :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{AA_i} \text{ où } m = \sum_{i=1}^n m_i \text{ est la masse des points matériels.}$$

Cet égalité est indépendante du choix du point A . Elle exprime comment on va d'un point A au point G .

Pour une distribution continue de de masse répartie dans un domaine \mathcal{D} du plan avec une densité de masse $\rho(M)$ en tout point $M(x, y) \in \mathcal{D}$ la formule précédente devient :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) \overrightarrow{AM} \, dx \, dy \text{ où } m = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) \, dx \, dy.$$

En particulier, si on prend $A = O$ où O est l'origine du repère cette égalité devient :

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \, dx \, dy$$

1. Centre d'inertie

Pour une distribution discrète de n points matériels A_1, A_2, \dots, A_n de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n , on appelle **centre d'inertie** d'un objet, ou **centre de masse** l'unique point G défini par :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{AA_i} \text{ où } m = \sum_{i=1}^n m_i \text{ est la masse des points matériels.}$$

Cet égalité est indépendante du choix du point A . Elle exprime comment on va d'un point A au point G .

Pour une distribution continue de de masse répartie dans un domaine \mathcal{D} du plan avec une densité de masse $\rho(M)$ en tout point $M(x, y) \in \mathcal{D}$ la formule précédente devient :

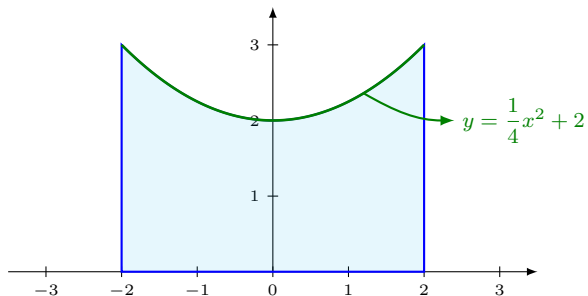
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) \overrightarrow{AM} \, dx \, dy \text{ où } m = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) \, dx \, dy.$$

En particulier, si on prend $A = O$ où O est l'origine du repère cette égalité devient :

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \, dx \, dy \text{ soit } \begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \iint_{\mathcal{D}} x \rho(x, y) \, dx \, dy \\ y_G = \frac{1}{m} \iint_{\mathcal{D}} y \rho(x, y) \, dx \, dy \end{cases}$$

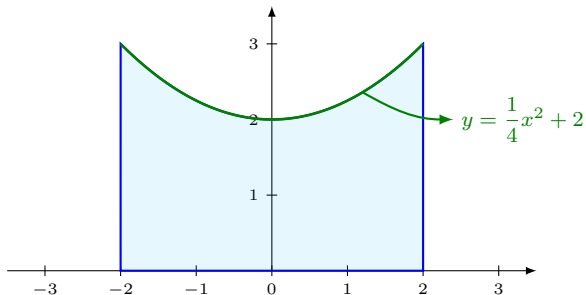
III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :

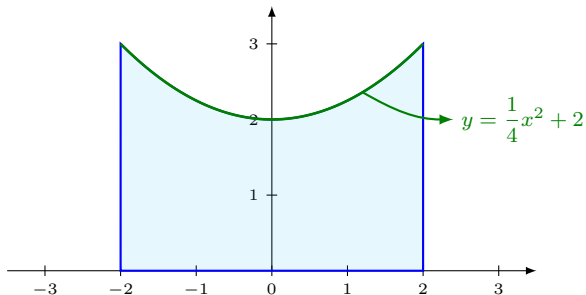


Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque :

$$m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy =$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :

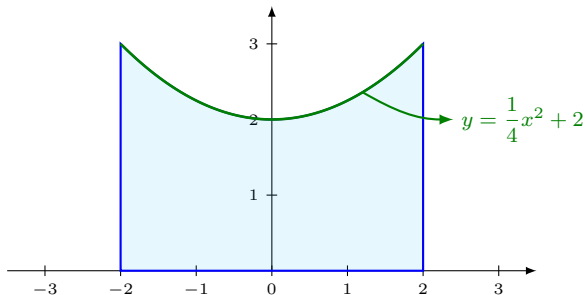


Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque :

$$m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{1}{4}x^2 + 2} 1 \, dy \, dx =$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



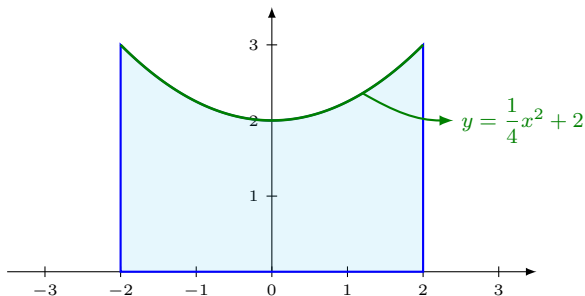
Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque :

$$m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{1}{4}x^2+2} 1 \, dy \, dx = \int_{-2}^2 [y]_0^{\frac{1}{4}x^2+2} \, dx = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + 2 \right) \, dx$$

=

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :

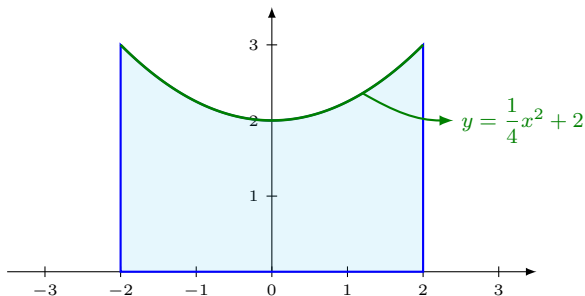


Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque :

$$\begin{aligned} m &= \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{1}{4}x^2+2} 1 \, dy \, dx = \int_{-2}^2 [y]_0^{\frac{1}{4}x^2+2} \, dx = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + 2 \right) \, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{12} + 2x \right]_{-2}^2 = \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :

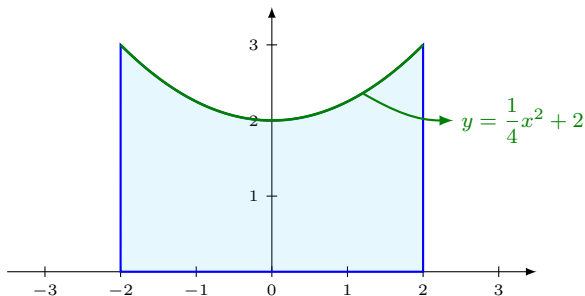


Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque :

$$\begin{aligned} m &= \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{1}{4}x^2+2} 1 \, dy \, dx = \int_{-2}^2 [y]_0^{\frac{1}{4}x^2+2} \, dx = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + 2 \right) \, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{12} + 2x \right]_{-2}^2 = \frac{14}{3} - \left(-\frac{14}{3} \right) = \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :

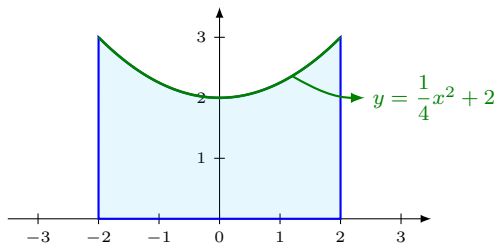


Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque :

$$\begin{aligned} m &= \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{1}{4}x^2+2} 1 \, dy \, dx = \int_{-2}^2 [y]_0^{\frac{1}{4}x^2+2} \, dx = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + 2 \right) \, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{12} + 2x \right]_{-2}^2 = \frac{14}{3} - \left(-\frac{14}{3} \right) = \frac{28}{3} \end{aligned}$$

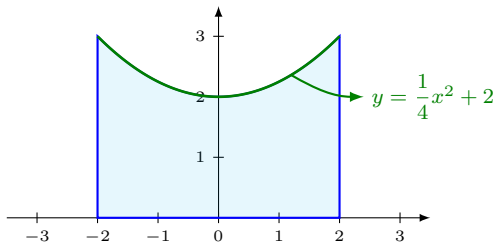
III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

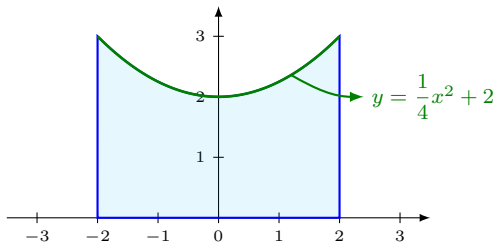
Exercice n° 8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



Corrigé : Pour des raisons évidentes de symétrie, le centre d'inertie est situé sur

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

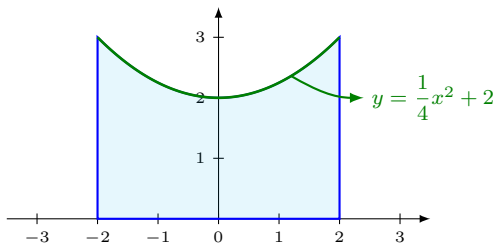
Exercice n° 8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



Corrigé : Pour des raisons évidentes de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe de symétrie de \mathcal{D} donc $x_G =$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

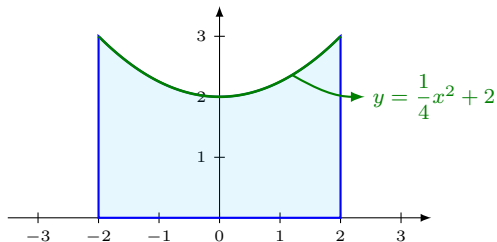
Exercice n° 8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



Corrigé : Pour des raisons évidentes de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe de symétrie de \mathcal{D} donc $x_G = 0$.

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :

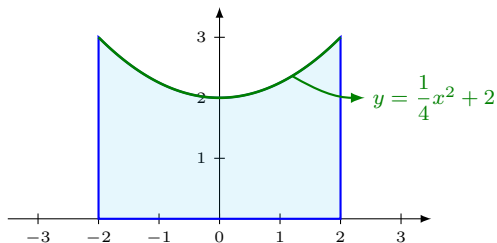


Corrigé : Pour des raisons évidentes de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe de symétrie de \mathcal{D} donc $x_G = 0$.

$$y_G = \frac{3}{28} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{1}{4}x^2+2} y \, dy \, dx =$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



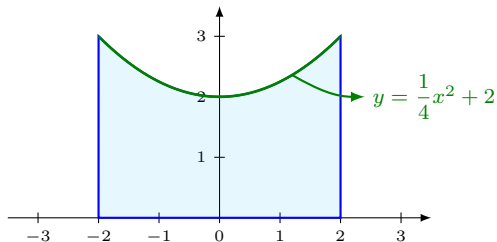
Corrigé : Pour des raisons évidentes de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe de symétrie de D donc $x_G = 0$.

$$y_G = \frac{3}{28} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{1}{4}x^2+2} y \, dy \, dx = \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{4}x^2+2} dx$$

=

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :

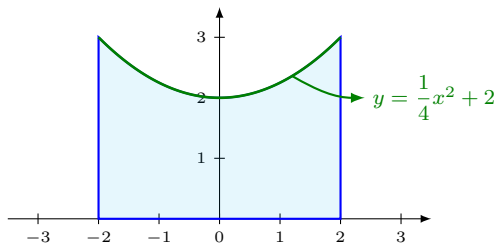


Corrigé : Pour des raisons évidentes de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe de symétrie de \mathcal{D} donc $x_G = 0$.

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{3}{28} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{1}{4}x^2+2} y \, dy \, dx = \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{4}x^2+2} dx \\ &= \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x^2 + 2 \right)^2 dx = \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :

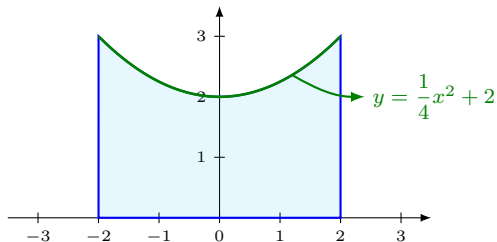


Corrigé : Pour des raisons évidentes de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe de symétrie de \mathcal{D} donc $x_G = 0$.

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{3}{28} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{1}{4}x^2+2} y \, dy \, dx = \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{4}x^2+2} dx \\ &= \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x^2 + 2 \right)^2 dx = \frac{3}{56} \int_{-2}^2 \left(\frac{x^4}{16} + x^2 + 4 \right) dx = \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :

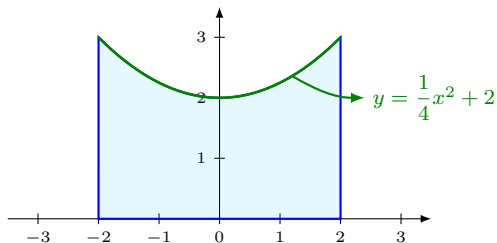


Corrigé : Pour des raisons évidentes de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe de symétrie de \mathcal{D} donc $x_G = 0$.

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{3}{28} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{1}{4}x^2+2} y \, dy \, dx = \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{4}x^2+2} dx \\ &= \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x^2 + 2 \right)^2 dx = \frac{3}{56} \int_{-2}^2 \left(\frac{x^4}{16} + x^2 + 4 \right) dx = \frac{3}{56} \left[\frac{x^5}{80} + \frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 \\ &= \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :

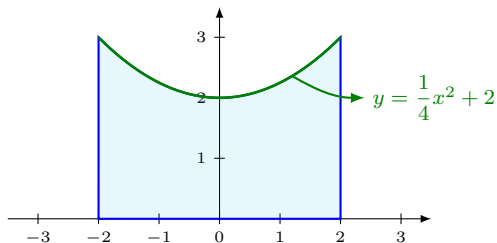


Corrigé : Pour des raisons évidentes de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe de symétrie de \mathcal{D} donc $x_G = 0$.

$$\begin{aligned}y_G &= \frac{3}{28} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{1}{4}x^2+2} y \, dy \, dx = \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{4}x^2+2} dx \\&= \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x^2 + 2 \right)^2 dx = \frac{3}{56} \int_{-2}^2 \left(\frac{x^4}{16} + x^2 + 4 \right) dx = \frac{3}{56} \left[\frac{x^5}{80} + \frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 \\&= \frac{3}{56} \left(\frac{166}{15} - \left(-\frac{166}{15} \right) \right) =\end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :

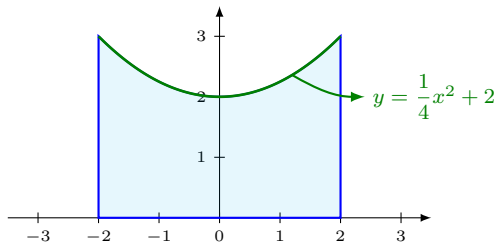


Corrigé : Pour des raisons évidentes de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe de symétrie de \mathcal{D} donc $x_G = 0$.

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{3}{28} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{1}{4}x^2+2} y \, dy \, dx = \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{4}x^2+2} dx \\ &= \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x^2 + 2 \right)^2 dx = \frac{3}{56} \int_{-2}^2 \left(\frac{x^4}{16} + x^2 + 4 \right) dx = \frac{3}{56} \left[\frac{x^5}{80} + \frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{3}{56} \left(\frac{166}{15} - \left(-\frac{166}{15} \right) \right) = \frac{83}{70} \simeq \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°8 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :

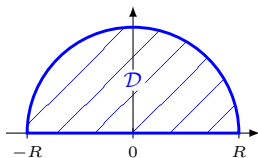


Corrigé : Pour des raisons évidentes de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe de symétrie de \mathcal{D} donc $x_G = 0$.

$$\begin{aligned}y_G &= \frac{3}{28} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{1}{4}x^2+2} y \, dy \, dx = \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{4}x^2+2} dx \\&= \frac{3}{28} \int_{-2}^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x^2 + 2 \right)^2 dx = \frac{3}{56} \int_{-2}^2 \left(\frac{x^4}{16} + x^2 + 4 \right) dx = \frac{3}{56} \left[\frac{x^5}{80} + \frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 \\&= \frac{3}{56} \left(\frac{166}{15} - \left(-\frac{166}{15} \right) \right) = \frac{83}{70} \simeq 1,19\end{aligned}$$

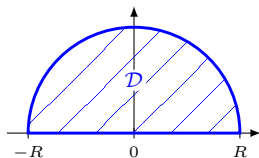
III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

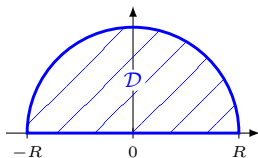
Exercice n° 9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :



Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque : $m =$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

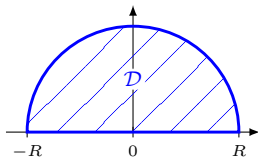
Exercice n°9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :



Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \mathcal{A}(\mathcal{D}) =$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

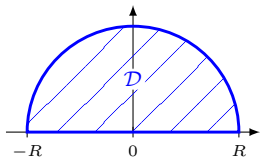
Exercice n°9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :



Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{\pi R^2}{2}$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :

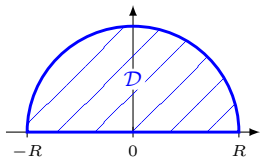


Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{\pi R^2}{2}$

Pour des raison de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :

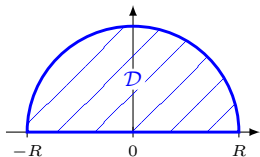


Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{\pi R^2}{2}$

Pour des raison de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des ordonnées : $x_G =$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :

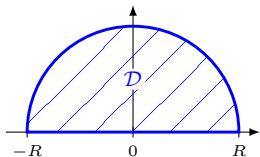


Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{\pi R^2}{2}$

Pour des raison de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des ordonnées : $x_G = 0$.

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :



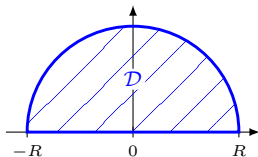
Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{\pi R^2}{2}$

Pour des raison de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des ordonnées : $x_G = 0$.

$y_G =$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :



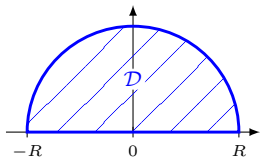
Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{\pi R^2}{2}$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des ordonnées : $x_G = 0$.

$$y_G = \frac{2}{\pi R^2} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy =$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :



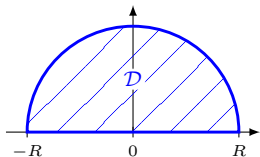
Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{\pi R^2}{2}$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des ordonnées : $x_G = 0$.

$$y_G = \frac{2}{\pi R^2} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R y \, r \, dr \, d\theta =$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :



Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{\pi R^2}{2}$

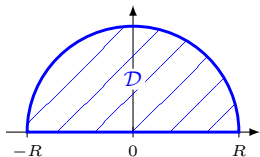
Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des ordonnées : $x_G = 0$.

$$y_G = \frac{2}{\pi R^2} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R y \, r \, dr \, d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R r \sin(\theta) \, r \, dr \, d\theta$$

=

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :



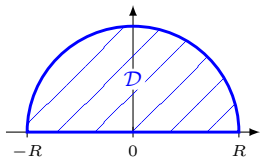
Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{\pi R^2}{2}$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des ordonnées : $x_G = 0$.

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{2}{\pi R^2} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R y \, r \, dr \, d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R r \sin(\theta) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta = \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :



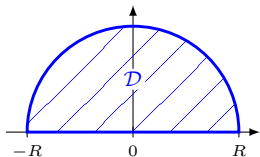
Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{\pi R^2}{2}$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des ordonnées : $x_G = 0$.

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{2}{\pi R^2} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R y \, r \, dr \, d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R r \sin(\theta) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \left(\int_0^{\pi} \sin(\theta) \, d\theta \right) \left(\int_0^R r^2 \, dr \right) \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :



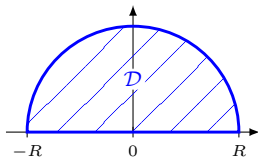
Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{\pi R^2}{2}$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des ordonnées : $x_G = 0$.

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{2}{\pi R^2} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R y \, r \, dr \, d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R r \sin(\theta) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \left(\int_0^{\pi} \sin(\theta) \, d\theta \right) \left(\int_0^R r^2 \, dr \right) \\ &= \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :



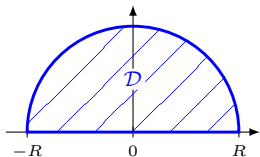
Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{\pi R^2}{2}$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des ordonnées : $x_G = 0$.

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{2}{\pi R^2} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R y \, r \, dr \, d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R r \sin(\theta) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \left(\int_0^{\pi} \sin(\theta) \, d\theta \right) \left(\int_0^R r^2 \, dr \right) \\ &= \frac{2}{\pi R^2} [-\cos(\theta)]_0^{\pi} \times \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :



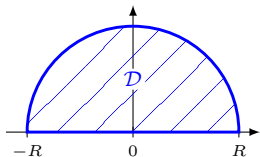
Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{\pi R^2}{2}$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des ordonnées : $x_G = 0$.

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{2}{\pi R^2} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^\pi \int_0^R y \, r \, dr \, d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^\pi \int_0^R r \sin(\theta) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \left(\int_0^\pi \sin(\theta) \, d\theta \right) \left(\int_0^R r^2 \, dr \right) \\ &= \frac{2}{\pi R^2} [-\cos(\theta)]_0^\pi \times \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{2}{\pi R^2} \times 2 \times \frac{R^3}{3} = \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n°9 : Détermine le centre d'inertie G de cet demi-disque mince et homogène :

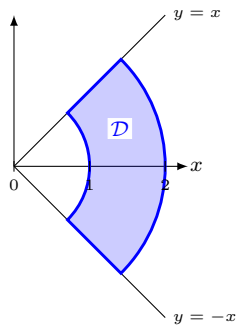


Corrigé : On commence par calculer la masse de la plaque : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{\pi R^2}{2}$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des ordonnées : $x_G = 0$.

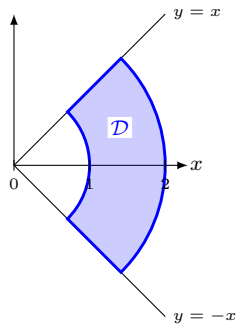
$$\begin{aligned} y_G &= \frac{2}{\pi R^2} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R y \, r \, dr \, d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R r \sin(\theta) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \left(\int_0^{\pi} \sin(\theta) \, d\theta \right) \left(\int_0^R r^2 \, dr \right) \\ &= \frac{2}{\pi R^2} [-\cos(\theta)]_0^{\pi} \times \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{2}{\pi R^2} \times 2 \times \frac{R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi} \end{aligned}$$

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



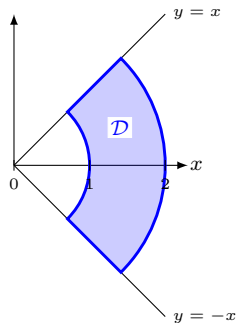
Corrigé : $m =$

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



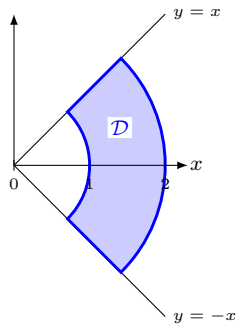
Corrigé : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy =$

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



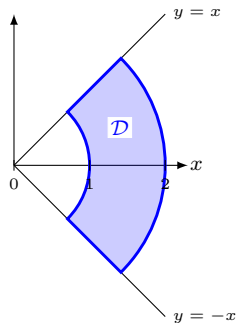
Corrigé : $m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \, d\theta \, dr$

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



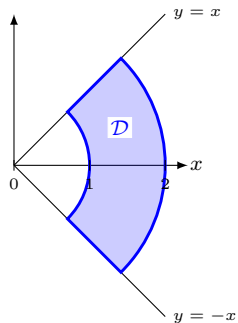
$$\begin{aligned} \text{Corrigé : } m &= \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \, d\theta \, dr \\ &= \end{aligned}$$

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



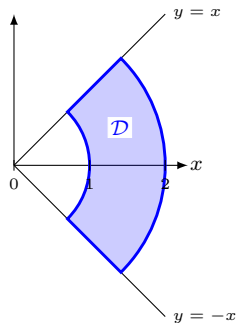
$$\begin{aligned}\text{Corrigé : } m &= \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \, d\theta \, dr \\ &= \int_1^2 \left[r\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr =\end{aligned}$$

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



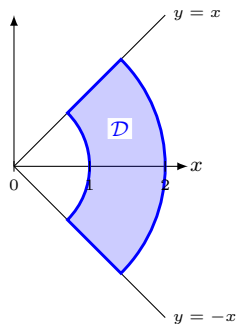
$$\begin{aligned} \text{Corrigé : } m &= \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \, d\theta \, dr \\ &= \int_1^2 \left[r\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr = \int_1^2 \frac{\pi}{2} r \, dr = \end{aligned}$$

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



$$\begin{aligned}
 \text{Corrigé : } m &= \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \, d\theta \, dr \\
 &= \int_1^2 \left[r\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr = \int_1^2 \frac{\pi}{2} r \, dr = \left[\frac{\pi r^2}{4} \right]_1^2 =
 \end{aligned}$$

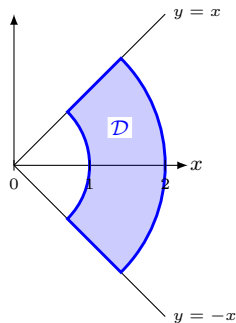
Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



$$\begin{aligned}\text{Corrigé : } m &= \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \, d\theta \, dr \\ &= \int_1^2 \left[r\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr = \int_1^2 \frac{\pi}{2} r \, dr = \left[\frac{\pi r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



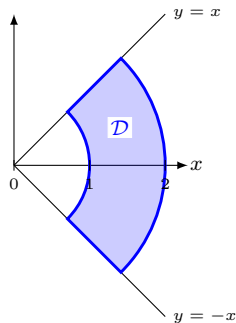
Corrigé :

$$m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \, d\theta \, dr$$

$$= \int_1^2 \left[r\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr = \int_1^2 \frac{\pi}{2} r \, dr = \left[\frac{\pi r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{3\pi}{4}$$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des abscisses : $y_G = 0$.

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



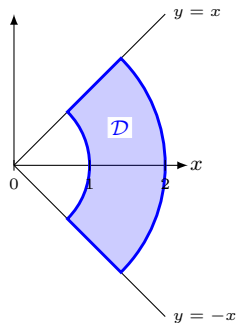
$$\text{Corrigé : } m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \, d\theta \, dr$$

$$= \int_1^2 \left[r\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr = \int_1^2 \frac{\pi}{2} r \, dr = \left[\frac{\pi r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{3\pi}{4}$$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des abscisses : $y_G = 0$.

$$x_G = \frac{4}{3\pi} \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy =$$

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :

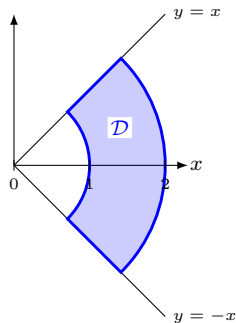


$$\begin{aligned}
 \text{Corrigé : } m &= \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \, d\theta \, dr \\
 &= \int_1^2 \left[r\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr = \int_1^2 \frac{\pi}{2} r \, dr = \left[\frac{\pi r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{3\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des abscisses : $y_G = 0$.

$$x_G = \frac{4}{3\pi} \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy = \frac{4}{3\pi} \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, dr =$$

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



Corrigé :

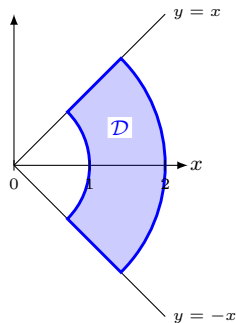
$$m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \, d\theta \, dr$$

$$= \int_1^2 \left[r\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr = \int_1^2 \frac{\pi}{2} r \, dr = \left[\frac{\pi r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{3\pi}{4}$$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des abscisses : $y_G = 0$.

$$x_G = \frac{4}{3\pi} \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy = \frac{4}{3\pi} \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, dr = \frac{4}{3\pi} \int_1^2 \left[r^2 \sin(\theta) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr$$

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



$$\text{Corrigé : } m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \, d\theta \, dr$$

$$= \int_1^2 \left[r\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr = \int_1^2 \frac{\pi}{2} r \, dr = \left[\frac{\pi r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{3\pi}{4}$$

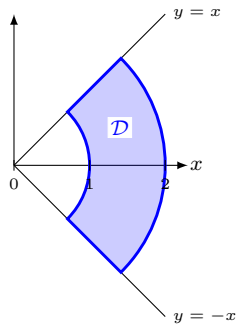
Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des abscisses : $y_G = 0$.

$$x_G = \frac{4}{3\pi} \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy = \frac{4}{3\pi} \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, dr = \frac{4}{3\pi} \int_1^2 \left[r^2 \sin(\theta) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr$$

=

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :

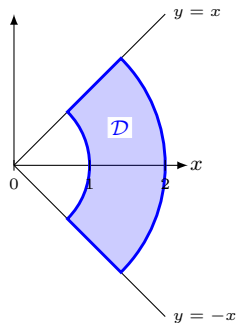


$$\begin{aligned}\text{Corrigé : } m &= \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \, d\theta \, dr \\ &= \int_1^2 \left[r\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr = \int_1^2 \frac{\pi}{2} r \, dr = \left[\frac{\pi r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des abscisses : $y_G = 0$.

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{4}{3\pi} \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy = \frac{4}{3\pi} \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, dr = \frac{4}{3\pi} \int_1^2 \left[r^2 \sin(\theta) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr \\ &= \frac{4}{3\pi} \int_1^2 r^2 \sqrt{2} \, dr =\end{aligned}$$

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :

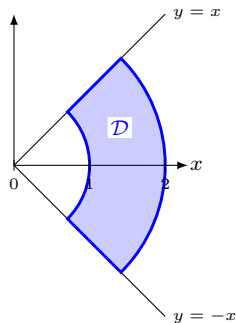


$$\begin{aligned} \text{Corrigé : } m &= \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \, d\theta \, dr \\ &= \int_1^2 \left[r\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr = \int_1^2 \frac{\pi}{2} r \, dr = \left[\frac{\pi r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des abscisses : $y_G = 0$.

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{4}{3\pi} \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy = \frac{4}{3\pi} \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, dr = \frac{4}{3\pi} \int_1^2 \left[r^2 \sin(\theta) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr \\ &= \frac{4}{3\pi} \int_1^2 r^2 \sqrt{2} \, dr = \frac{4}{3\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \sqrt{2} = \end{aligned}$$

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



Corrigé :

$$m = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \, d\theta \, dr$$

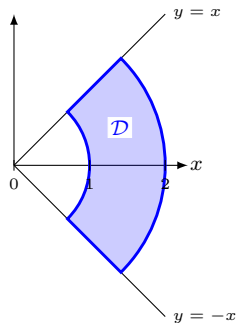
$$= \int_1^2 \left[r\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr = \int_1^2 \frac{\pi}{2} r \, dr = \left[\frac{\pi r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{3\pi}{4}$$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des abscisses : $y_G = 0$.

$$x_G = \frac{4}{3\pi} \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy = \frac{4}{3\pi} \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, dr = \frac{4}{3\pi} \int_1^2 \left[r^2 \sin(\theta) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr$$

$$= \frac{4}{3\pi} \int_1^2 r^2 \sqrt{2} \, dr = \frac{4}{3\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \sqrt{2} = \frac{4}{3\pi} \times \frac{7\sqrt{2}}{3} =$$

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :

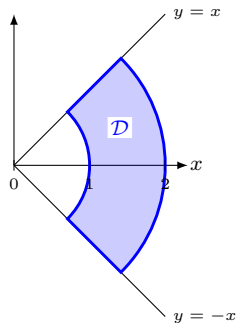


$$\begin{aligned} \text{Corrigé : } m &= \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \, d\theta \, dr \\ &= \int_1^2 \left[r\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr = \int_1^2 \frac{\pi}{2} r \, dr = \left[\frac{\pi r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des abscisses : $y_G = 0$.

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{4}{3\pi} \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy = \frac{4}{3\pi} \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, dr = \frac{4}{3\pi} \int_1^2 \left[r^2 \sin(\theta) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr \\ &= \frac{4}{3\pi} \int_1^2 r^2 \sqrt{2} \, dr = \frac{4}{3\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \sqrt{2} = \frac{4}{3\pi} \times \frac{7\sqrt{2}}{3} = \frac{28\sqrt{2}}{9\pi} \simeq \end{aligned}$$

Exercice n° 10 : Détermine le centre d'inertie G de cette plaque mince et homogène :



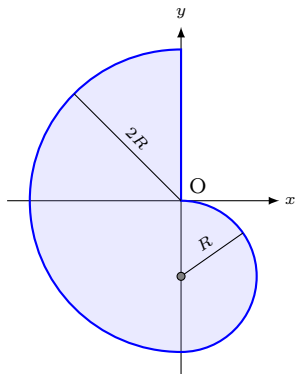
$$\begin{aligned} \text{Corrigé : } m &= \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \, d\theta \, dr \\ &= \int_1^2 \left[r\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr = \int_1^2 \frac{\pi}{2} r \, dr = \left[\frac{\pi r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe des abscisses : $y_G = 0$.

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{4}{3\pi} \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy = \frac{4}{3\pi} \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, dr = \frac{4}{3\pi} \int_1^2 \left[r^2 \sin(\theta) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \, dr \\ &= \frac{4}{3\pi} \int_1^2 r^2 \sqrt{2} \, dr = \frac{4}{3\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \sqrt{2} = \frac{4}{3\pi} \times \frac{7\sqrt{2}}{3} = \frac{28\sqrt{2}}{9\pi} \simeq 1,40 \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

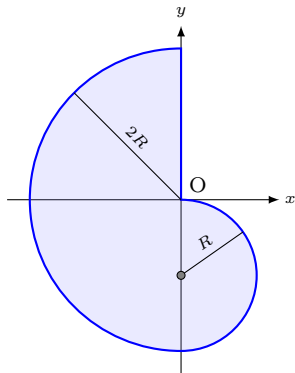
Exercice n° 11 : Détermine les coordonnées (x_G, y_G) du centre d'inertie de la plaque mince et homogène ($\rho = 1$ constant) suivante :



Corrigé : On note \mathcal{D}_1 le demi-disque de rayon $2R$ et \mathcal{D}_2 celui de rayon R .

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 11 : Détermine les coordonnées (x_G, y_G) du centre d'inertie de la plaque mince et homogène ($\rho = 1$ constant) suivante :

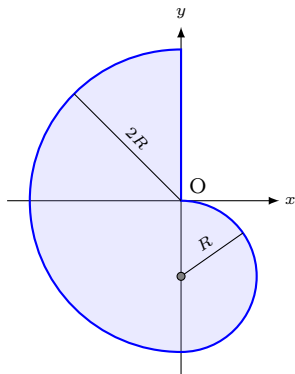


Corrigé : On note \mathcal{D}_1 le demi-disque de rayon $2R$ et \mathcal{D}_2 celui de rayon R .

La masse de \mathcal{D}_2 est

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 11 : Détermine les coordonnées (x_G, y_G) du centre d'inertie de la plaque mince et homogène ($\rho = 1$ constant) suivante :

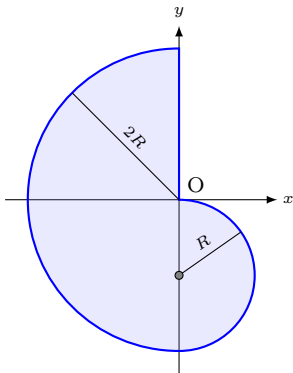


Corrigé : On note \mathcal{D}_1 le demi-disque de rayon $2R$ et \mathcal{D}_2 celui de rayon R .

La masse de \mathcal{D}_2 est $\frac{\pi R^2}{2}$, celle de \mathcal{D}_1 est

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 11 : Détermine les coordonnées (x_G, y_G) du centre d'inertie de la plaque mince et homogène ($\rho = 1$ constant) suivante :

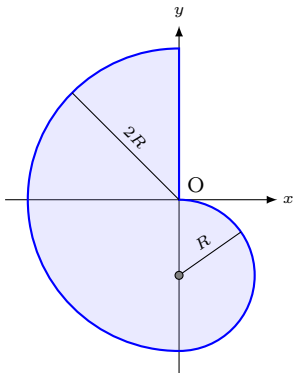


Corrigé : On note \mathcal{D}_1 le demi-disque de rayon $2R$ et \mathcal{D}_2 celui de rayon R .

La masse de \mathcal{D}_2 est $\frac{\pi R^2}{2}$, celle de \mathcal{D}_1 est $\frac{\pi(2R)^2}{2} = 2\pi R^2$.

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 11 : Détermine les coordonnées (x_G, y_G) du centre d'inertie de la plaque mince et homogène ($\rho = 1$ constant) suivante :



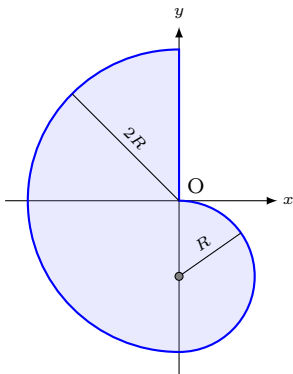
Corrigé : On note \mathcal{D}_1 le demi-disque de rayon $2R$ et \mathcal{D}_2 celui de rayon R .

La masse de \mathcal{D}_2 est $\frac{\pi R^2}{2}$, celle de \mathcal{D}_1 est $\frac{\pi(2R)^2}{2} = 2\pi R^2$.

La masse total M est $\frac{5\pi R^2}{2}$.

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 11 : Détermine les coordonnées (x_G, y_G) du centre d'inertie de la plaque mince et homogène ($\rho = 1$ constant) suivante :



Corrigé : On note \mathcal{D}_1 le demi-disque de rayon $2R$ et \mathcal{D}_2 celui de rayon R .

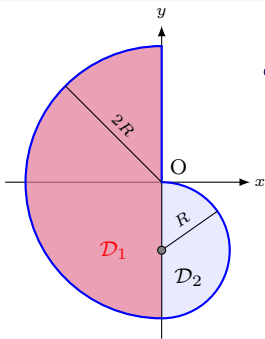
La masse de \mathcal{D}_2 est $\frac{\pi R^2}{2}$, celle de \mathcal{D}_1 est $\frac{\pi(2R)^2}{2} = 2\pi R^2$.

La masse total M est $\frac{5\pi R^2}{2}$.

Pour calculer $x_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$, nous avons découpé le domaine selon l'axe des ordonnées en deux sous-domaines \mathcal{D}_1 et

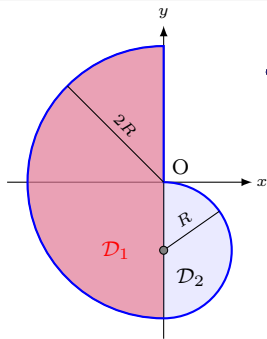
$$\mathcal{D}_2 : x_G = \frac{1}{M} \left(\iint_{\mathcal{D}_1} x \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{D}_2} x \, dx \, dy \right).$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



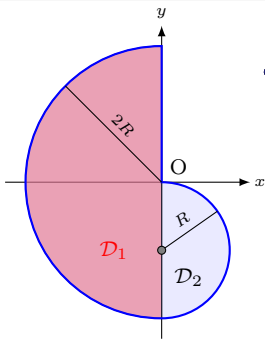
- $\iint_{\mathcal{D}_1} x \, dx \, dy =$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



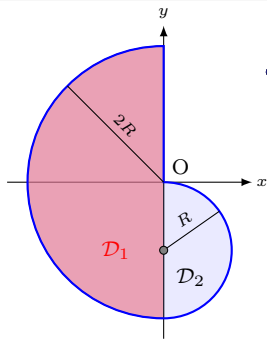
- $$\iint_{\mathcal{D}_1} x \, dx \, dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{2R} r^2 \cos(\theta) \, dr \, d\theta$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



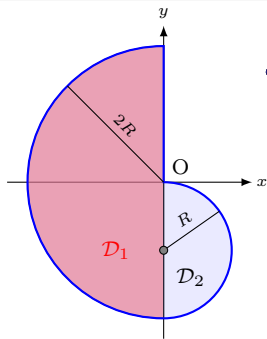
$$\begin{aligned} \bullet \iint_{\mathcal{D}_1} x \, dx \, dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{2R} r^2 \cos(\theta) \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[r^3 \cos(\theta) \right]_0^{2R} \, d\theta = \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



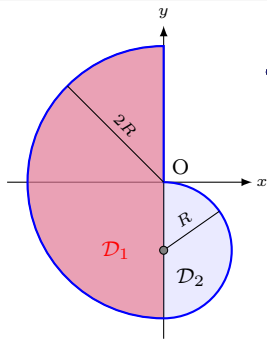
$$\begin{aligned} \bullet \iint_{\mathcal{D}_1} x \, dx \, dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{2R} r^2 \cos(\theta) \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[r^3 \cos(\theta) \right]_0^{2R} \, d\theta = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 8R^3 \cos(\theta) \, d\theta \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



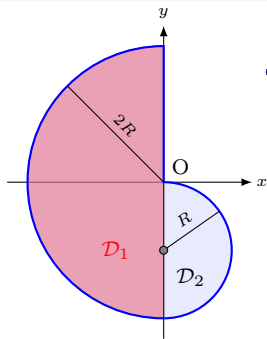
$$\begin{aligned} \bullet \iint_{\mathcal{D}_1} x \, dx \, dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{2R} r^2 \cos(\theta) \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[r^3 \cos(\theta) \right]_0^{2R} \, d\theta = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 8R^3 \cos(\theta) \, d\theta \\ &= \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



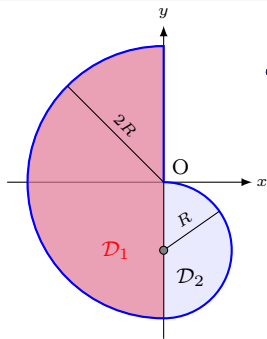
$$\begin{aligned} \bullet \iint_{\mathcal{D}_1} x \, dx \, dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{2R} r^2 \cos(\theta) \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[r^3 \cos(\theta) \right]_0^{2R} \, d\theta = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 8R^3 \cos(\theta) \, d\theta \\ &= \frac{8R^3}{3} \left[\sin(\theta) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



$$\begin{aligned} \bullet \iint_{\mathcal{D}_1} x \, dx \, dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{2R} r^2 \cos(\theta) \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[r^3 \cos(\theta) \right]_0^{2R} \, d\theta = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 8R^3 \cos(\theta) \, d\theta \\ &= \frac{8R^3}{3} \left[\sin(\theta) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{-16R^3}{3} \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

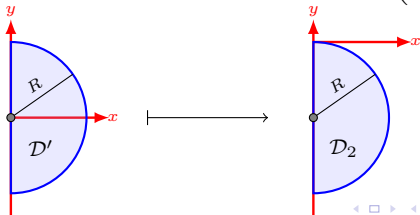


$$\begin{aligned}
 \bullet \iint_{\mathcal{D}_1} x \, dx \, dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{2R} r^2 \cos(\theta) \, dr \, d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[r^3 \cos(\theta) \right]_0^{2R} \, d\theta = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 8R^3 \cos(\theta) \, d\theta \\
 &= \frac{8R^3}{3} \left[\sin(\theta) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{-16R^3}{3}
 \end{aligned}$$

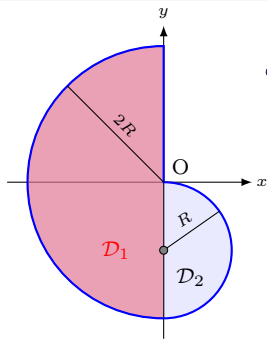
\bullet Pour calculer $\iint_{\mathcal{D}_2}$ on considère le changement de variable $\Phi: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}_2$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

Autrement dit, $\Phi:$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

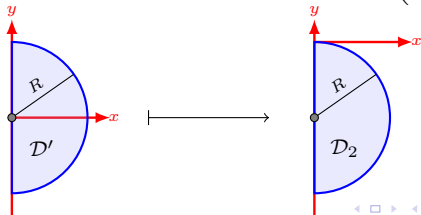


$$\begin{aligned} \bullet \iint_{\mathcal{D}_1} x \, dx \, dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{2R} r^2 \cos(\theta) \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[r^3 \cos(\theta) \right]_0^{2R} \, d\theta = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 8R^3 \cos(\theta) \, d\theta \\ &= \frac{8R^3}{3} \left[\sin(\theta) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{-16R^3}{3} \end{aligned}$$

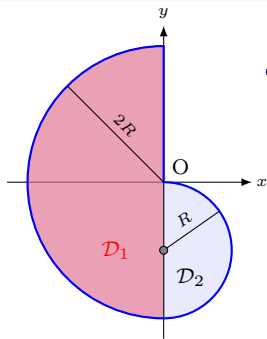
• Pour calculer $\iint_{\mathcal{D}_2}$ on considère le changement de variable $\Phi: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}_2$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x = u \\ y = v \end{cases}$$

Autrement dit, $\Phi:$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

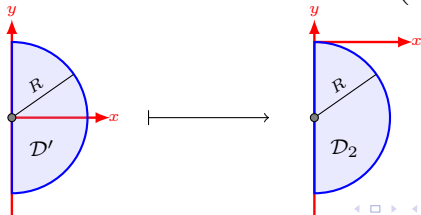


$$\begin{aligned}
 \bullet \iint_{\mathcal{D}_1} x \, dx \, dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{2R} r^2 \cos(\theta) \, dr \, d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[r^3 \cos(\theta) \right]_0^{2R} \, d\theta = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 8R^3 \cos(\theta) \, d\theta \\
 &= \frac{8R^3}{3} \left[\sin(\theta) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{-16R^3}{3}
 \end{aligned}$$

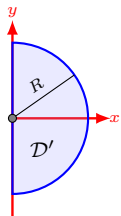
\bullet Pour calculer $\iint_{\mathcal{D}_2}$ on considère le changement de variable $\Phi: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}_2$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x = u \\ y = v - R \end{cases}$$

Autrement dit, $\Phi:$

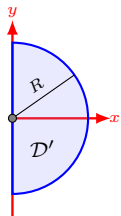


III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



- On considère le changement de variable $\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}_2$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u \\ y = v - R \end{cases}$$

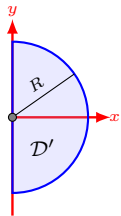
III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



- On considère le changement de variable $\Phi: D' \rightarrow D_2$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x = u \\ y = v - R \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| =$$

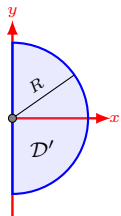
III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



- On considère le changement de variable $\Phi: D' \longrightarrow D_2$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u \\ y = v - R \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

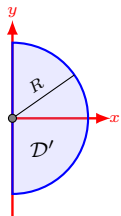
III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



- On considère le changement de variable $\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}_2$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u \\ y = v - R \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

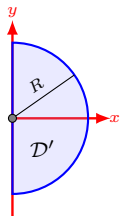
III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



- On considère le changement de variable $\Phi: D' \rightarrow D_2$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x = u \\ y = v - R \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

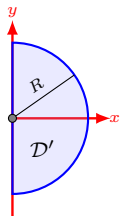
III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



- On considère le changement de variable $\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}_2$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u \\ y = v - R \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ donc, } \iint_{\mathcal{D}_2 = \Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

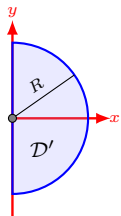


- On considère le changement de variable $\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}_2$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u \\ y = v - R \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ donc, } \iint_{\mathcal{D}_2 = \Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv$$

$$\iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv =$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

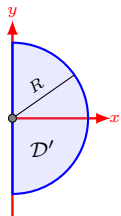


- On considère le changement de variable $\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}_2$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u \\ y = v - R \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ donc, } \iint_{\mathcal{D}_2 = \Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv$$

$$\iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r \cos(\theta) \, r \, dr \, d\theta =$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

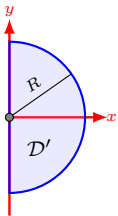


- On considère le changement de variable $\Phi: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}_2$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x = u \\ y = v - R \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ donc, } \iint_{\mathcal{D}_2 = \Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv$$

$$\iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r \cos(\theta) \, r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3} \cos(\theta) \, d\theta =$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

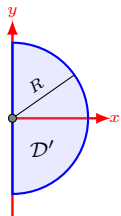


- On considère le changement de variable $\Phi: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}_2$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x = u \\ y = v - R \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ donc, } \iint_{\mathcal{D}_2 = \Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv$$

$$\iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r \cos(\theta) \, r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3} \cos(\theta) \, d\theta = \frac{R^3}{3} [\sin(\theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R^3}{3}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



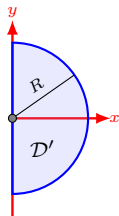
- On considère le changement de variable $\Phi: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}_2$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x = u \\ y = v - R \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ donc, } \iint_{\mathcal{D}_2 = \Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv$$

$$\iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r \cos(\theta) r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3} \cos(\theta) \, d\theta = \frac{R^3}{3} [\sin(\theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R^3}{3}$$

Par conséquent, $x_G =$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



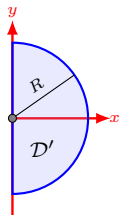
- On considère le changement de variable $\Phi: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}_2$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x = u \\ y = v - R \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ donc, } \iint_{\mathcal{D}_2 = \Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv$$

$$\iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r \cos(\theta) r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3} \cos(\theta) \, d\theta = \frac{R^3}{3} [\sin(\theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R^3}{3}$$

$$\text{Par conséquent, } x_G = \frac{1}{M} \left(\frac{-16R^3}{3} + \frac{2R^3}{3} \right) =$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



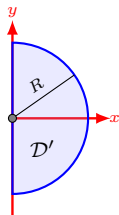
- On considère le changement de variable $\Phi: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}_2$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x = u \\ y = v - R \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ donc, } \iint_{\mathcal{D}_2 = \Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv$$

$$\iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r \cos(\theta) r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3} \cos(\theta) \, d\theta = \frac{R^3}{3} [\sin(\theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R^3}{3}$$

$$\text{Par conséquent, } x_G = \frac{1}{M} \left(\frac{-16R^3}{3} + \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{2}{5\pi R^2} \times \frac{-14R^3}{3} =$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.



- On considère le changement de variable $\Phi: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}_2$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x = u \\ y = v - R \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ donc, } \iint_{\mathcal{D}_2 = \Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv$$

$$\iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r \cos(\theta) \, r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3} \cos(\theta) \, d\theta = \frac{R^3}{3} [\sin(\theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R^3}{3}$$

$$\text{Par conséquent, } x_G = \frac{1}{M} \left(\frac{-16R^3}{3} + \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{2}{5\pi R^2} \times \frac{-14R^3}{3} = -\frac{28R}{15\pi}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

$$\text{Calculons } y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy.$$

Par symétrie, par rapport à l'axe des abscisses, il est clair que $\iint_{\mathcal{D}_1} y \, dx \, dy = 0$, et donc

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy.$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

$$\text{Calculons } y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy.$$

Par symétrie, par rapport à l'axe des abscisses, il est clair que $\iint_{\mathcal{D}_1} y \, dx \, dy = 0$, et donc

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy. \text{ En reprenant le changement de variable précédent, on obtient :}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

$$\text{Calculons } y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy.$$

Par symétrie, par rapport à l'axe des abscisses, il est clair que $\iint_{\mathcal{D}_1} y \, dx \, dy = 0$, et donc

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy. \text{ En reprenant le changement de variable précédent, on obtient :}$$

$$\iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy =$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

$$\text{Calculons } y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy.$$

Par symétrie, par rapport à l'axe des abscisses, il est clair que $\iint_{\mathcal{D}_1} y \, dx \, dy = 0$, et donc

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy. \text{ En reprenant le changement de variable précédent, on obtient :}$$

$$\iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (v - R) r \, dr \, d\theta =$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

$$\text{Calculons } y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy.$$

Par symétrie, par rapport à l'axe des abscisses, il est clair que $\iint_{\mathcal{D}_1} y \, dx \, dy = 0$, et donc

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy. \text{ En reprenant le changement de variable précédent, on obtient :}$$

$$\iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (v - R) r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r^2 \sin(\theta) - Rr) \, dr \, d\theta$$

=

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

$$\text{Calculons } y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy.$$

Par symétrie, par rapport à l'axe des abscisses, il est clair que $\iint_{\mathcal{D}_1} y \, dx \, dy = 0$, et donc

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy. \text{ En reprenant le changement de variable précédent, on obtient :}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (v - R) r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r^2 \sin(\theta) - Rr) \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \sin(\theta) - R \frac{r^2}{2} \right]_0^R \, d\theta = \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

$$\text{Calculons } y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy.$$

Par symétrie, par rapport à l'axe des abscisses, il est clair que $\iint_{\mathcal{D}_1} y \, dx \, dy = 0$, et donc

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy. \text{ En reprenant le changement de variable précédent, on obtient :}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (v - R) r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r^2 \sin(\theta) - Rr) \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \sin(\theta) - R \frac{r^2}{2} \right]_0^R \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R^3}{3} \sin(\theta) - \frac{R^3}{2} \right) \, d\theta \\ &= \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

$$\text{Calculons } y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy.$$

Par symétrie, par rapport à l'axe des abscisses, il est clair que $\iint_{\mathcal{D}_1} y \, dx \, dy = 0$, et donc

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy. \text{ En reprenant le changement de variable précédent, on obtient :}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (v - R) r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r^2 \sin(\theta) - Rr) \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \sin(\theta) - R \frac{r^2}{2} \right]_0^R \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R^3}{3} \sin(\theta) - \frac{R^3}{2} \right) \, d\theta \\ &= R^3 \left[-\frac{1}{3} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \end{aligned}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

$$\text{Calculons } y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy.$$

Par symétrie, par rapport à l'axe des abscisses, il est clair que $\iint_{\mathcal{D}_1} y \, dx \, dy = 0$, et donc

$y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy$. En reprenant le changement de variable précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (v - R) r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r^2 \sin(\theta) - Rr) \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \sin(\theta) - R \frac{r^2}{2} \right]_0^R \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R^3}{3} \sin(\theta) - \frac{R^3}{2} \right) \, d\theta \\ &= R^3 \left[-\frac{1}{3} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi R^3}{2} \end{aligned}$$

Et donc, $y_G =$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

$$\text{Calculons } y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy.$$

Par symétrie, par rapport à l'axe des abscisses, il est clair que $\iint_{\mathcal{D}_1} y \, dx \, dy = 0$, et donc

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy. \text{ En reprenant le changement de variable précédent, on obtient :}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (v - R) r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r^2 \sin(\theta) - Rr) \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \sin(\theta) - R \frac{r^2}{2} \right]_0^R \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R^3}{3} \sin(\theta) - \frac{R^3}{2} \right) \, d\theta \\ &= R^3 \left[-\frac{1}{3} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi R^3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Et donc, } y_G = -\frac{2}{5\pi R^2} \times \frac{\pi R^3}{2} =$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

$$\text{Calculons } y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy.$$

Par symétrie, par rapport à l'axe des abscisses, il est clair que $\iint_{\mathcal{D}_1} y \, dx \, dy = 0$, et donc

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy. \text{ En reprenant le changement de variable précédent, on obtient :}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (v - R) r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r^2 \sin(\theta) - Rr) \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \sin(\theta) - R \frac{r^2}{2} \right]_0^R d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R^3}{3} \sin(\theta) - \frac{R^3}{2} \right) d\theta \\ &= R^3 \left[-\frac{1}{3} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi R^3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Et donc, } y_G = -\frac{2}{5\pi R^2} \times \frac{\pi R^3}{2} = -\frac{R}{5}$$

Conclusion : $G \left(\quad , \quad \right)$.

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

$$\text{Calculons } y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy.$$

Par symétrie, par rapport à l'axe des abscisses, il est clair que $\iint_{\mathcal{D}_1} y \, dx \, dy = 0$, et donc

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy. \text{ En reprenant le changement de variable précédent, on obtient :}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (v - R) r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r^2 \sin(\theta) - Rr) \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \sin(\theta) - R \frac{r^2}{2} \right]_0^R d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R^3}{3} \sin(\theta) - \frac{R^3}{2} \right) d\theta \\ &= R^3 \left[-\frac{1}{3} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi R^3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Et donc, } y_G = -\frac{2}{5\pi R^2} \times \frac{\pi R^3}{2} = -\frac{R}{5}$$

$$\text{Conclusion : } G \left(-\frac{28R}{15\pi}, \quad \right).$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

$$\text{Calculons } y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy.$$

Par symétrie, par rapport à l'axe des abscisses, il est clair que $\iint_{\mathcal{D}_1} y \, dx \, dy = 0$, et donc

$y_G = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy$. En reprenant le changement de variable précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}_2} y \, dx \, dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (v - R) r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r^2 \sin(\theta) - Rr) \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \sin(\theta) - R \frac{r^2}{2} \right]_0^R d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R^3}{3} \sin(\theta) - \frac{R^3}{2} \right) d\theta \\ &= R^3 \left[-\frac{1}{3} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi R^3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Et donc, } y_G = -\frac{2}{5\pi R^2} \times \frac{\pi R^3}{2} = -\frac{R}{5}$$

Conclusion : $G \left(-\frac{28R}{15\pi}, -\frac{R}{5} \right)$.

2. Moment d'inertie

Le moment d'inertie concerne uniquement les objets en rotation. Il est l'équivalent de la masse pour un objet en translation. C'est à dire qu'il représente (en quelque sorte) l'énergie nécessaire à la mise en rotation ou au freinage d'un objet autour d'un axe. Plus le moment d'inertie sera élevé, plus il sera difficile de freiner ou d'entraîner l'objet en rotation à une vitesse donnée.

2. Moment d'inertie

Le moment d'inertie concerne uniquement les objets en rotation. Il est l'équivalent de la masse pour un objet en translation. C'est à dire qu'il représente (en quelque sorte) l'énergie nécessaire à la mise en rotation ou au freinage d'un objet autour d'un axe. Plus le moment d'inertie sera élevé, plus il sera difficile de freiner ou d'entraîner l'objet en rotation à une vitesse donnée.

Le moment inertie d'un objet dépend de la répartition de sa matière (sa forme), de sa masse, ainsi que de la distance où se trouve la masse par rapport à l'axe de rotation.

2. Moment d'inertie

Le moment d'inertie concerne uniquement les objets en rotation. Il est l'équivalent de la masse pour un objet en translation. C'est à dire qu'il représente (en quelque sorte) l'énergie nécessaire à la mise en rotation ou au freinage d'un objet autour d'un axe. Plus le moment d'inertie sera élevé, plus il sera difficile de freiner ou d'entraîner l'objet en rotation à une vitesse donnée.

Le moment d'inertie d'un objet dépend de la répartition de sa matière (sa forme), de sa masse, ainsi que de la distance où se trouve la masse par rapport à l'axe de rotation. Il est exprimé en $\text{Kg}\cdot\text{m}^2$ dans le système SI, et est (en règle générale) représenté par la lettre I ou J .

2. Moment d'inertie

Le moment d'inertie concerne uniquement les objets en rotation. Il est l'équivalent de la masse pour un objet en translation. C'est à dire qu'il représente (en quelque sorte) l'énergie nécessaire à la mise en rotation ou au freinage d'un objet autour d'un axe. Plus le moment d'inertie sera élevé, plus il sera difficile de freiner ou d'entraîner l'objet en rotation à une vitesse donnée.

Le moment d'inertie d'un objet dépend de la répartition de sa matière (sa forme), de sa masse, ainsi que de la distance où se trouve la masse par rapport à l'axe de rotation. Il est exprimé en $\text{Kg} \cdot \text{m}^2$ dans le système SI, et est (en règle générale) représenté par la lettre I ou J .

Pour une distribution discrète de n points matériels A_1, A_2, \dots, A_n de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n , on appelle **moment d'inertie** de cette distribution par rapport à :

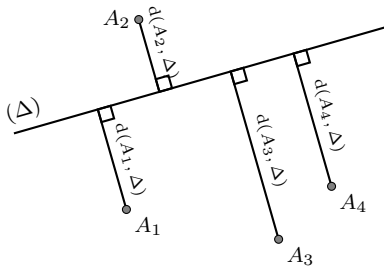
2. Moment d'inertie

Le moment d'inertie concerne uniquement les objets en rotation. Il est l'équivalent de la masse pour un objet en translation. C'est à dire qu'il représente (en quelque sorte) l'énergie nécessaire à la mise en rotation ou au freinage d'un objet autour d'un axe. Plus le moment d'inertie sera élevé, plus il sera difficile de freiner ou d'entraîner l'objet en rotation à une vitesse donnée.

Le moment d'inertie d'un objet dépend de la répartition de sa matière (sa forme), de sa masse, ainsi que de la distance où se trouve la masse par rapport à l'axe de rotation. Il est exprimé en Kg.m^2 dans le système SI, et est (en règle générale) représenté par la lettre I ou J .

Pour une distribution discrète de n points matériels A_1, A_2, \dots, A_n de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n , on appelle **moment d'inertie** de cette distribution par rapport à :

$$\text{un axe } \Delta : I_{\Delta} = \sum_{i=1}^n m_i d(A_i, \Delta)^2$$



2. Moment d'inertie

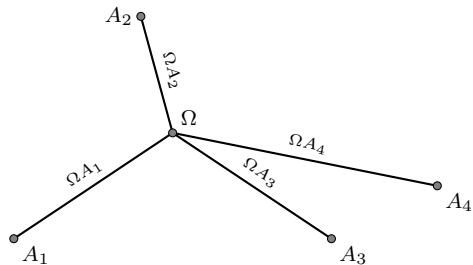
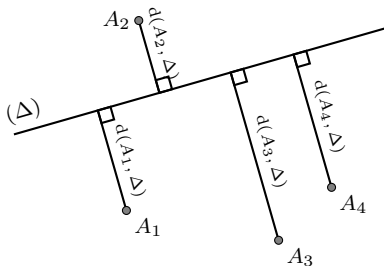
Le moment d'inertie concerne uniquement les objets en rotation. Il est l'équivalent de la masse pour un objet en translation. C'est à dire qu'il représente (en quelque sorte) l'énergie nécessaire à la mise en rotation ou au freinage d'un objet autour d'un axe. Plus le moment d'inertie sera élevé, plus il sera difficile de freiner ou d'entraîner l'objet en rotation à une vitesse donnée.

Le moment d'inertie d'un objet dépend de la répartition de sa matière (sa forme), de sa masse, ainsi que de la distance où se trouve la masse par rapport à l'axe de rotation. Il est exprimé en Kg.m^2 dans le système SI, et est (en règle générale) représenté par la lettre I ou J .

Pour une distribution discrète de n points matériels A_1, A_2, \dots, A_n de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n , on appelle **moment d'inertie** de cette distribution par rapport à :

un axe Δ :
$$I_{\Delta} = \sum_{i=1}^n m_i d(A_i, \Delta)^2$$

un point Ω :
$$I_{\Omega} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{\Omega A_i}^2$$



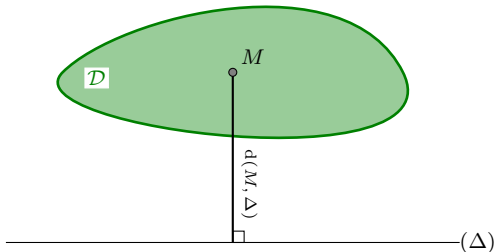
III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Si on a une distribution continue de masse répartie dans un domaine \mathcal{D} du plan avec une **densité** de masse $\rho(M) = \rho(x, y)$ pour tout point $M \in \mathcal{D}$, on définit son **moment d'inertie** par rapport à :

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Si on a une distribution continue de masse répartie dans un domaine \mathcal{D} du plan avec une **densité** de masse $\rho(M) = \rho(x, y)$ pour tout point $M \in \mathcal{D}$, on définit son **moment d'inertie** par rapport à :

un axe Δ :
$$I_{\Delta} = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta) dx dy$$

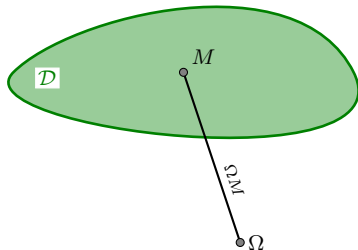
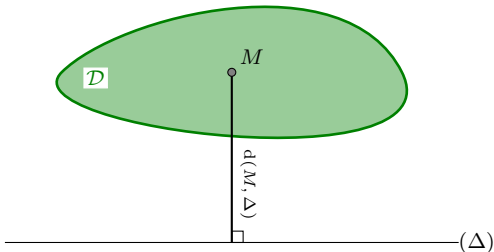


III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Si on a une distribution continue de masse répartie dans un domaine \mathcal{D} du plan avec une **densité** de masse $\rho(M) = \rho(x, y)$ pour tout point $M \in \mathcal{D}$, on définit son **moment d'inertie** par rapport à :

un axe Δ : $I_{\Delta} = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta) dx dy$

un point Ω : $I_{\Omega} = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) \overline{\Omega M}^2 dx dy$



Remarque :

- Si Δ est l'axe des abscisses alors $d^2(M, \Delta) = y^2$ et on a : $I_{\Delta} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) y^2 \, dx \, dy$
- Si Δ est l'axe des ordonnées alors $d^2(M, \Delta) = x^2$ et on a : $I_{\Delta} = I_y = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) x^2 \, dx \, dy$
- $I_x + I_y = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) (x^2 + y^2) \, dx \, dy = I_O$ où O est l'origine du repère.

Remarque :

- Si Δ est l'axe des abscisses alors $d^2(M, \Delta) = y^2$ et on a : $I_{\Delta} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) y^2 \, dx \, dy$
- Si Δ est l'axe des ordonnées alors $d^2(M, \Delta) = x^2$ et on a : $I_{\Delta} = I_y = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) x^2 \, dx \, dy$
- $I_x + I_y = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) (x^2 + y^2) \, dx \, dy = I_O$ où O est l'origine du repère.



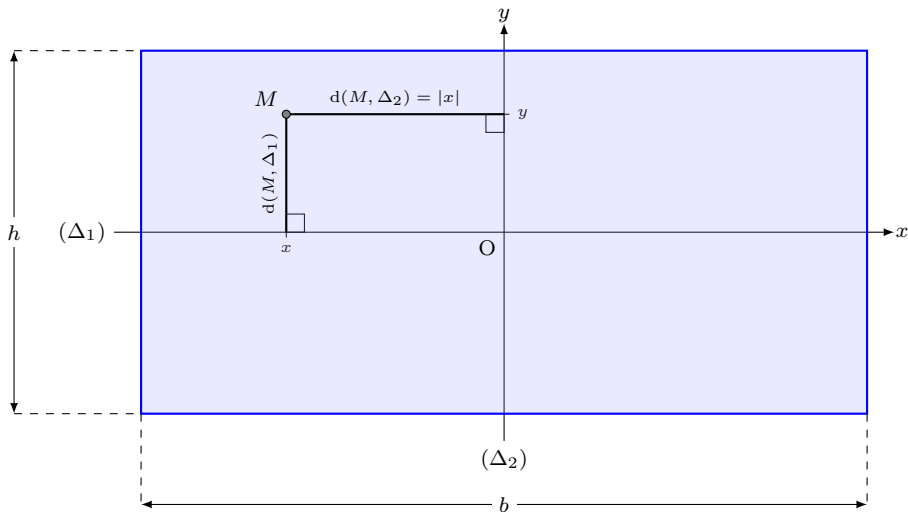
Théorème

Si Δ_1 et Δ_2 sont deux axes qui se coupent perpendiculairement en un point Ω , alors

$$I_{\Omega} = I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2}$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 12 : Calcule du moment d'inertie d'une plaque rectangulaire mince et homogène (ρ constant) par rapport à ses axes de symétrie, puis son centre de symétrie.



Corrigé :

$$I_{\Delta_1} = I_x =$$

Corrigé :

$$I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy =$$

Corrigé :

$$I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy =$$

Corrigé :

$$I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dx dy$$

Corrigé :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} = I_x &= \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dx dy \\ &= \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 1 dx \right) dy = \end{aligned}$$

Corrigé :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} = I_x &= \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dx dy \\ &= \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 1 dx \right) dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 [x]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = \end{aligned}$$

Corrigé :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} = I_x &= \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dx dy \\ &= \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 1 dx \right) dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 [x]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = \rho b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \end{aligned}$$

Corrigé :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} = I_x &= \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dx dy \\ &= \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 1 dx \right) dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 [x]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = \rho b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \\ &= \end{aligned}$$

Corrigé :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} = I_x &= \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dx dy \\ &= \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 1 dx \right) dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 [x]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = \rho b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \\ &= \rho b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \end{aligned}$$

Corrigé :

$$\begin{aligned}
 I_{\Delta_1} = I_x &= \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dx dy \\
 &= \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 1 dx \right) dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 [x]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = \rho b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \\
 &= \rho b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{12} \rho b h^3
 \end{aligned}$$

Comme la masse du rectangle est $bh\rho$, on a $I_{\Delta_1} =$

Corrigé :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} = I_x &= \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dx dy \\ &= \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 1 dx \right) dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 [x]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = \rho b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \\ &= \rho b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{12} \rho b h^3 \end{aligned}$$

Comme la masse du rectangle est $bh\rho$, on a $I_{\Delta_1} = \frac{1}{12} Mh^2$

Corrigé :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} = I_x &= \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dx dy \\ &= \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 1 dx \right) dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 [x]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = \rho b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \\ &= \rho b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{12} \rho b h^3 \end{aligned}$$

Comme la masse du rectangle est $bh\rho$, on a $I_{\Delta_1} = \frac{1}{12} Mh^2$

De même, $I_{\Delta_2} =$

Corrigé :

$$\begin{aligned}
 I_{\Delta_1} = I_x &= \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dx dy \\
 &= \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 1 dx \right) dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 [x]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = \rho b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \\
 &= \rho b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{12} \rho b h^3
 \end{aligned}$$

Comme la masse du rectangle est $bh\rho$, on a $I_{\Delta_1} = \frac{1}{12} Mh^2$

$$\text{De même, } I_{\Delta_2} = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_2) dx dy =$$

Corrigé :

$$\begin{aligned}
 I_{\Delta_1} = I_x &= \iint_D \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy = \iint_D \rho y^2 dx dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dx dy \\
 &= \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 1 dx \right) dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 [x]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = \rho b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \\
 &= \rho b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{12} \rho b h^3
 \end{aligned}$$

Comme la masse du rectangle est $bh\rho$, on a $I_{\Delta_1} = \frac{1}{12} Mh^2$

$$\text{De même, } I_{\Delta_2} = \iint_D \rho(M) d^2(M, \Delta_2) dx dy = \rho \iint_D x^2 dx dy = \frac{1}{12} Mb^2$$

$$\text{Enfin, } I_O = I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2} = \frac{M(b^2 + h^2)}{12} \text{ car}$$

Corrigé :

$$\begin{aligned}
 I_{\Delta_1} = I_x &= \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dx dy \\
 &= \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 1 dx \right) dy = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 [x]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = \rho b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \\
 &= \rho b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{12} \rho b h^3
 \end{aligned}$$

Comme la masse du rectangle est $bh\rho$, on a $I_{\Delta_1} = \frac{1}{12} Mh^2$

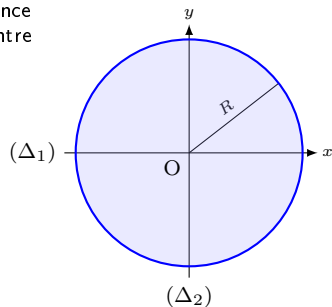
$$\text{De même, } I_{\Delta_2} = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_2) dx dy = \rho \iint_{\mathcal{D}} x^2 dx dy = \frac{1}{12} Mb^2$$

$$\text{Enfin, } I_O = I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2} = \frac{M(b^2 + h^2)}{12} \text{ car } I_{\Delta_1} \perp I_{\Delta_2}.$$

III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

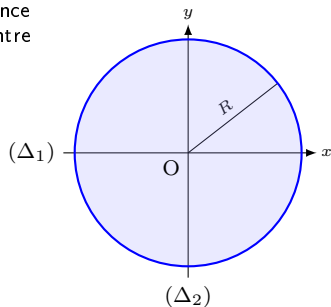


III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$



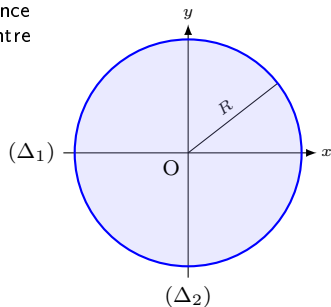
III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$

On passe en coordonnées polaires :



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

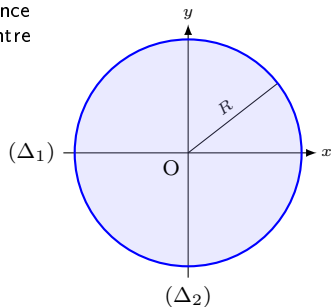
Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$

On passe en coordonnées polaires :

$$I_{\Delta_1} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\theta dr =$$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

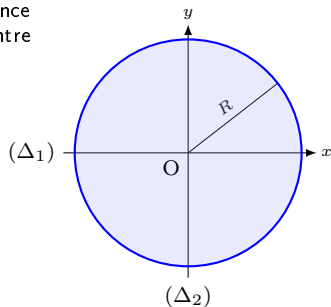
Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$

On passe en coordonnées polaires :

$$I_{\Delta_1} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\theta dr = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2(\theta) d\theta dr$$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

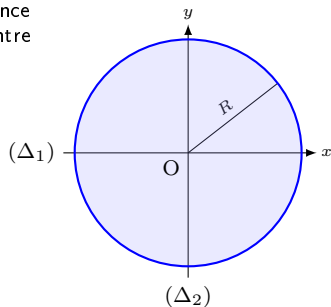
Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$

On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\theta dr = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2(\theta) d\theta dr \\ &= \rho \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) dr \end{aligned}$$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

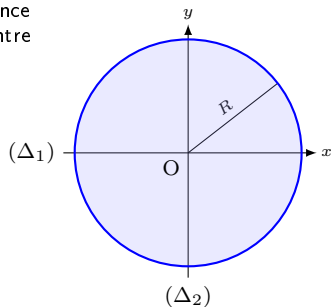
Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$

On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\theta dr = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2(\theta) d\theta dr \\ &= \rho \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) dr \end{aligned}$$

Comme $\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta =$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

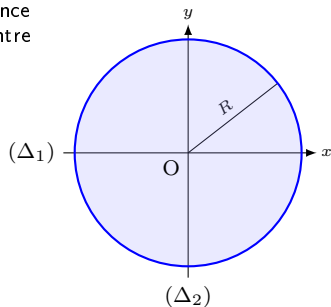
Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$

On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\theta dr = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2(\theta) d\theta dr \\ &= \rho \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) dr \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta =$$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

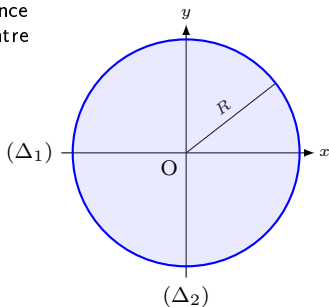
Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$

On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\theta dr = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2(\theta) d\theta dr \\ &= \rho \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) dr \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} =$$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

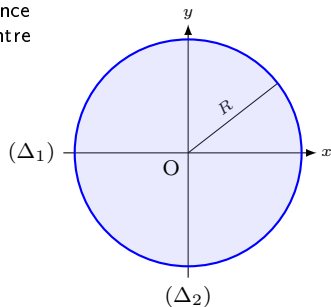
Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$

On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\theta dr = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2(\theta) d\theta dr \\ &= \rho \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) dr \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} = \pi$$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

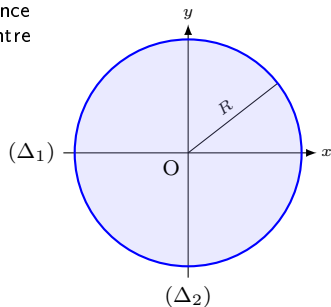
$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$

On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\theta dr = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2(\theta) d\theta dr \\ &= \rho \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) dr \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$I_{\Delta_1} = \rho \int_0^R r^3 \pi dr =$$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

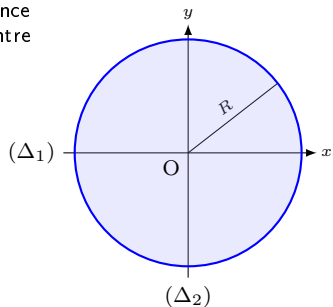
$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$

On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\theta dr = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2(\theta) d\theta dr \\ &= \rho \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) dr \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$I_{\Delta_1} = \rho \int_0^R r^3 \pi dr = \rho \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R =$$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_D \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

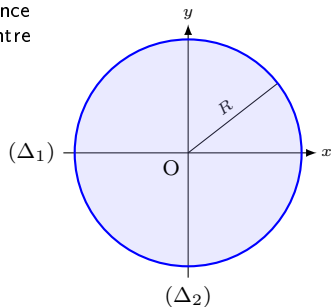
$$I_{\Delta_1} = \iint_D \rho y^2 dx dy.$$

On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\theta dr = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2(\theta) d\theta dr \\ &= \rho \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) dr \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$I_{\Delta_1} = \rho \int_0^R r^3 \pi dr = \rho \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\rho \pi R^4}{4}.$$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

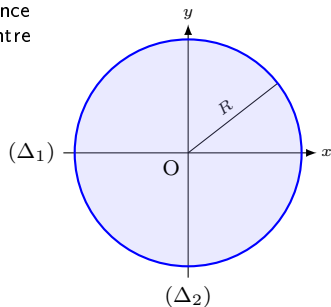
$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$

On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\theta dr = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2(\theta) d\theta dr \\ &= \rho \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) dr \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$I_{\Delta_1} = \rho \int_0^R r^3 \pi dr = \rho \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\rho \pi R^4}{4}. \text{ Comme } M =$$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

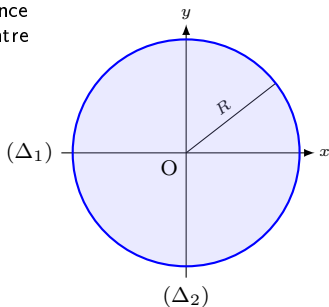
$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$

On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\theta dr = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2(\theta) d\theta dr \\ &= \rho \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) dr \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$I_{\Delta_1} = \rho \int_0^R r^3 \pi dr = \rho \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\rho \pi R^4}{4}. \text{ Comme } M = \rho \pi R^2, \text{ on a : } I_{\Delta_1} =$$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$

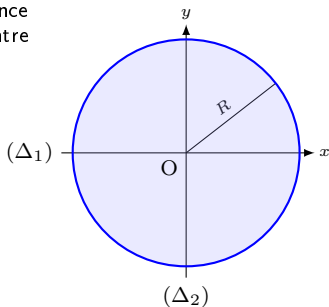
On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\theta dr = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2(\theta) d\theta dr \\ &= \rho \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) dr \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$I_{\Delta_1} = \rho \int_0^R r^3 \pi dr = \rho \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\rho \pi R^4}{4}. \text{ Comme } M = \rho \pi R^2, \text{ on a : } I_{\Delta_1} = \frac{MR^2}{4}$$

De même, $I_{\Delta_2} =$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$

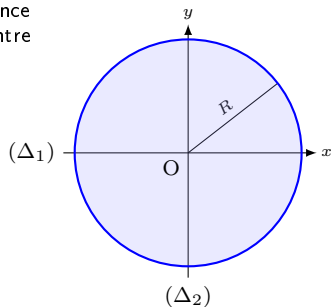
On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\theta dr = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2(\theta) d\theta dr \\ &= \rho \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) dr \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$I_{\Delta_1} = \rho \int_0^R r^3 \pi dr = \rho \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\rho \pi R^4}{4}. \text{ Comme } M = \rho \pi R^2, \text{ on a : } I_{\Delta_1} = \frac{MR^2}{4}$$

$$\text{De même, } I_{\Delta_2} = \frac{MR^2}{4}, \text{ et comme } I_{\Delta_1} \perp I_{\Delta_2}, I_O =$$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$

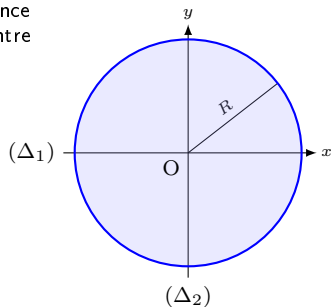
On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\theta dr = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2(\theta) d\theta dr \\ &= \rho \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) dr \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$I_{\Delta_1} = \rho \int_0^R r^3 \pi dr = \rho \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\rho \pi R^4}{4}. \text{ Comme } M = \rho \pi R^2, \text{ on a : } I_{\Delta_1} = \frac{MR^2}{4}$$

$$\text{De même, } I_{\Delta_2} = \frac{MR^2}{4}, \text{ et comme } I_{\Delta_1} \perp I_{\Delta_2}, I_O = I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2} =$$



III. Utilisation des intégrales doubles en physique.

Exercice n° 13 : Calcul du moment d'inertie de ce disque mince et homogène (ρ constant) par rapport à Δ_1 , Δ_2 , et son centre de symétrie.

Corrigé : $I_{\Delta_1} = I_x = \iint_{\mathcal{D}} \rho(M) d^2(M, \Delta_1) dx dy$

$$I_{\Delta_1} = \iint_{\mathcal{D}} \rho y^2 dx dy.$$

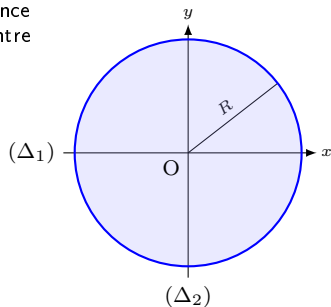
On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\theta dr = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2(\theta) d\theta dr \\ &= \rho \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) dr \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$I_{\Delta_1} = \rho \int_0^R r^3 \pi dr = \rho \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\rho \pi R^4}{4}. \text{ Comme } M = \rho \pi R^2, \text{ on a : } I_{\Delta_1} = \frac{MR^2}{4}$$

$$\text{De même, } I_{\Delta_2} = \frac{MR^2}{4}, \text{ et comme } I_{\Delta_1} \perp I_{\Delta_2}, I_O = I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2} = \frac{MR^2}{2}.$$





Théorème : de Huyghens-Steiner

Soit G le centre d'inertie d'un système matériel, et Δ_G un axe passant par G .



Théorème : de Huyghens-Steiner

Soit G le centre d'inertie d'un système matériel, et Δ_G un axe passant par G .

- Le moment d'inertie I_Δ par rapport à un axe Δ parallèle à Δ_G est :

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + Md^2 \text{ où } d \text{ est la distance entre les deux axes.}$$



Théorème : de Huyghens-Steiner

Soit G le centre d'inertie d'un système matériel, et Δ_G un axe passant par G .

- Le moment d'inertie I_Δ par rapport à un axe Δ parallèle à Δ_G est :
$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + Md^2$$
 où d est la distance entre les deux axes.
- Si Ω est un point, le moment d'inertie I_Ω par rapport à Ω est égale à
$$I_\Omega = I_G + Md^2$$
 où $d = \Omega G$.

IV. Moment d'inertie dans l'espace : intégrales triples.