

Décomposition en éléments simples
des fractions rationnelles.

1. Fractions rationnelles

1. Fractions rationnelles



Définition:

- Une **fraction rationnelle** est une expression formelle de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont deux **polynômes**.

1. Fractions rationnelles



Définition:

- Une **fraction rationnelle** est une expression formelle de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont deux **polynômes**.
- On appelle **degré** d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$, la quantité **$\deg(P) - \deg(Q)$** .

1. Fractions rationnelles



Définition:

- Une **fraction rationnelle** est une expression formelle de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont deux **polynômes**.
- On appelle **degré** d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$, la quantité **$\deg(P) - \deg(Q)$** .
- On appelle **forme irréductible** d'une fraction rationnelle R toute écriture de la forme $\frac{P}{Q}$ où les polynômes P et Q n'admettent aucun facteur en commun.

1. Fractions rationnelles



Définition:

- Une **fraction rationnelle** est une expression formelle de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont deux **polynômes**.
- On appelle **degré** d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$, la quantité **$\deg(P) - \deg(Q)$** .
- On appelle **forme irréductible** d'une fraction rationnelle R toute écriture de la forme $\frac{P}{Q}$ où les polynômes P et Q n'admettent aucun facteur en commun.

Exemple n° 1 :

Fraction rationnelle	degré
$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 5}$	
$\frac{(x^2 - 4x + 3)^3}{(x - 5)^3}$	

1. Fractions rationnelles



Définition:

- Une **fraction rationnelle** est une expression formelle de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont deux **polynômes**.
- On appelle **degré** d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$, la quantité **$\deg(P) - \deg(Q)$** .
- On appelle **forme irréductible** d'une fraction rationnelle R toute écriture de la forme $\frac{P}{Q}$ où les polynômes P et Q n'admettent aucun facteur en commun.

Exemple n° 1 :

Fraction rationnelle	degré
$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 5}$	$2 - 1 = 1$
$\frac{(x^2 - 4x + 3)^3}{(x - 5)^3}$	

1. Fractions rationnelles



Définition:

- Une **fraction rationnelle** est une expression formelle de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont deux **polynômes**.
- On appelle **degré** d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$, la quantité **$\deg(P) - \deg(Q)$** .
- On appelle **forme irréductible** d'une fraction rationnelle R toute écriture de la forme $\frac{P}{Q}$ où les polynômes P et Q n'admettent aucun facteur en commun.

Exemple n° 1 :

Fraction rationnelle	degré
$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 5}$	$2 - 1 = 1$
$\frac{(x^2 - 4x + 3)^3}{(x - 5)^3}$	$2 \times 3 - 1 \times 3 = 6 - 3 = 3$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 1 :

Fraction rationnelle	degré
$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 5}$	$2 - 1 = 1$
$\frac{(x^2 - 4x + 3)^3}{(x - 5)^3}$	$2 \times 3 - 1 \times 3 = 6 - 3 = 3$
$\frac{(x^2 - 4x + 3)^3}{(x - 5)^3 + x^2}$	
$\frac{(x^2 - 4)(4 - x^3)}{(x - 5)(x^2 - x + 2)}$	
$\frac{x - x^2 + 1}{(4x - 5)^4}$	

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 1 :

Fraction rationnelle	degré
$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 5}$	$2 - 1 = 1$
$\frac{(x^2 - 4x + 3)^3}{(x - 5)^3}$	$2 \times 3 - 1 \times 3 = 6 - 3 = 3$
$\frac{(x^2 - 4x + 3)^3}{(x - 5)^3 + x^2}$	$6 - 3 = 3$
$\frac{(x^2 - 4)(4 - x^3)}{(x - 5)(x^2 - x + 2)}$	
$\frac{x - x^2 + 1}{(4x - 5)^4}$	

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 1 :

Fraction rationnelle	degré
$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 5}$	$2 - 1 = 1$
$\frac{(x^2 - 4x + 3)^3}{(x - 5)^3}$	$2 \times 3 - 1 \times 3 = 6 - 3 = 3$
$\frac{(x^2 - 4x + 3)^3}{(x - 5)^3 + x^2}$	$6 - 3 = 3$
$\frac{(x^2 - 4)(4 - x^3)}{(x - 5)(x^2 - x + 2)}$	$(2 + 3) - (1 + 2) = 2$
$\frac{x - x^2 + 1}{(4x - 5)^4}$	

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 1 :

Fraction rationnelle	degré
$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 5}$	$2 - 1 = 1$
$\frac{(x^2 - 4x + 3)^3}{(x - 5)^3}$	$2 \times 3 - 1 \times 3 = 6 - 3 = 3$
$\frac{(x^2 - 4x + 3)^3}{(x - 5)^3 + x^2}$	$6 - 3 = 3$
$\frac{(x^2 - 4)(4 - x^3)}{(x - 5)(x^2 - x + 2)}$	$(2 + 3) - (1 + 2) = 2$
$\frac{x - x^2 + 1}{(4x - 5)^4}$	$2 - 4 = -2$

Exemple n° 2 :

La fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 4x)(x - 3)}{x(x - 3)^2}$ est de degré

Exemple n° 2 :

La fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 4x)(x - 3)}{x(x - 3)^2}$ est de degré $3 - 3 = 0$.

Exemple n° 2 :

La fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 4x)(x - 3)}{x(x - 3)^2}$ est de degré $3 - 3 = 0$.

Elle n'est pas irréductible, car elle a deux facteurs communs :

Exemple n° 2 :

La fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 4x)(x - 3)}{x(x - 3)^2}$ est de degré $3 - 3 = 0$.

Elle n'est pas irréductible, car elle a deux facteurs communs : $(x - 3)$ et

Exemple n° 2 :

La fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 4x)(x - 3)}{x(x - 3)^2}$ est de degré $3 - 3 = 0$.

Elle n'est pas irréductible, car elle a deux facteurs communs : $(x - 3)$ et x :

Exemple n° 2 :

La fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 4x)(x - 3)}{x(x - 3)^2}$ est de degré $3 - 3 = 0$.

Elle n'est pas irréductible, car elle a deux facteurs communs : $(x - 3)$ et x :

$$\frac{(x^2 - 4x)(x - 3)}{x(x - 3)^2} =$$

Exemple n° 2 :

La fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 4x)(x - 3)}{x(x - 3)^2}$ est de degré $3 - 3 = 0$.

Elle n'est pas irréductible, car elle a deux facteurs communs : $(x - 3)$ et x :

$$\frac{(x^2 - 4x)(x - 3)}{x(x - 3)^2} = \frac{x(x - 4)(x - 3)}{x(x - 3)(x - 3)}$$

Sa forme irréductible est

Exemple n° 2 :

La fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 4x)(x - 3)}{x(x - 3)^2}$ est de degré $3 - 3 = 0$.

Elle n'est pas irréductible, car elle a deux facteurs communs : $(x - 3)$ et x :

$$\frac{(x^2 - 4x)(x - 3)}{x(x - 3)^2} = \frac{x(x - 4)(x - 3)}{x(x - 3)(x - 3)}$$

Sa forme irréductible est $\frac{x - 4}{x - 3}$.



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.

Exemple n° 3 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{x(x^2 + 5)(x - 3)^2}{(x - 7)(x^2 + 1)(x + 2)^4}$ admet

- pour zéros :



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.

Exemple n° 3 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{x(x^2 + 5)(x - 3)^2}{(x - 7)(x^2 + 1)(x + 2)^4}$ admet

- pour zéros : **0** et



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.

Exemple n° 3 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{x(x^2 + 5)(x - 3)^2}{(x - 7)(x^2 + 1)(x + 2)^4}$ admet

- pour zéros : **0** et **3**
- pour pôles :



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.

Exemple n° 3 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{x(x^2 + 5)(x - 3)^2}{(x - 7)(x^2 + 1)(x + 2)^4}$ admet

- pour zéros : **0** et **3**
- pour pôles : **-2** de multiplicité



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.

Exemple n° 3 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{x(x^2 + 5)(x - 3)^2}{(x - 7)(x^2 + 1)(x + 2)^4}$ admet

- pour zéros : **0** et **3**
- pour pôles : **-2** de multiplicité **4**, et



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.

Exemple n° 3 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{x(x^2 + 5)(x - 3)^2}{(x - 7)(x^2 + 1)(x + 2)^4}$ admet

- pour zéros : **0** et **3**
- pour pôles : **-2** de multiplicité **4**, et **7** de multiplicité



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.

Exemple n° 3 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{x(x^2 + 5)(x - 3)^2}{(x - 7)(x^2 + 1)(x + 2)^4}$ admet

- pour zéros : **0** et **3**
- pour pôles : **-2** de multiplicité **4**, et **7** de multiplicité **1**.

Exemple n° 4 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 5)(x - 3)^4}{(x + 7)(x^2 - 1)x^6}$ admet

- pour zéros :



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.

Exemple n° 3 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{x(x^2 + 5)(x - 3)^2}{(x - 7)(x^2 + 1)(x + 2)^4}$ admet

- pour zéros : **0** et **3**
- pour pôles : **-2** de multiplicité **4**, et **7** de multiplicité **1**.

Exemple n° 4 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 5)(x - 3)^4}{(x + 7)(x^2 - 1)x^6}$ admet

- pour zéros : **3**,



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.

Exemple n° 3 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{x(x^2 + 5)(x - 3)^2}{(x - 7)(x^2 + 1)(x + 2)^4}$ admet

- pour zéros : **0** et **3**
- pour pôles : **-2** de multiplicité **4**, et **7** de multiplicité **1**.

Exemple n° 4 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 5)(x - 3)^4}{(x + 7)(x^2 - 1)x^6}$ admet

- pour zéros : **3**, **$-\sqrt{5}$** , et



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.

Exemple n° 3 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{x(x^2 + 5)(x - 3)^2}{(x - 7)(x^2 + 1)(x + 2)^4}$ admet

- pour zéros : **0** et **3**
- pour pôles : **-2** de multiplicité **4**, et **7** de multiplicité **1**.

Exemple n° 4 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 5)(x - 3)^4}{(x + 7)(x^2 - 1)x^6}$ admet

- pour zéros : **3**, **$-\sqrt{5}$** , et **$\sqrt{5}$**



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.

Exemple n° 3 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{x(x^2 + 5)(x - 3)^2}{(x - 7)(x^2 + 1)(x + 2)^4}$ admet

- pour zéros : **0** et **3**
- pour pôles : **-2** de multiplicité **4**, et **7** de multiplicité **1**.

Exemple n° 4 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 5)(x - 3)^4}{(x + 7)(x^2 - 1)x^6}$ admet

- pour zéros : **3**, **$-\sqrt{5}$** , et **$\sqrt{5}$**
- trois pôles simples :



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.

Exemple n° 3 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{x(x^2 + 5)(x - 3)^2}{(x - 7)(x^2 + 1)(x + 2)^4}$ admet

- pour zéros : **0** et **3**
- pour pôles : **-2** de multiplicité **4**, et **7** de multiplicité **1**.

Exemple n° 4 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 5)(x - 3)^4}{(x + 7)(x^2 - 1)x^6}$ admet

- pour zéros : **3**, **$-\sqrt{5}$** , et **$\sqrt{5}$**
- trois pôles simples : **-7**,



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.

Exemple n° 3 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{x(x^2 + 5)(x - 3)^2}{(x - 7)(x^2 + 1)(x + 2)^4}$ admet

- pour zéros : **0** et **3**
- pour pôles : **-2** de multiplicité **4**, et **7** de multiplicité **1**.

Exemple n° 4 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 5)(x - 3)^4}{(x + 7)(x^2 - 1)x^6}$ admet

- pour zéros : **3**, **$-\sqrt{5}$** , et **$\sqrt{5}$**
- trois pôles simples : **-7**, **-1**, et



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.

Exemple n° 3 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{x(x^2 + 5)(x - 3)^2}{(x - 7)(x^2 + 1)(x + 2)^4}$ admet

- pour zéros : **0** et **3**
- pour pôles : **-2** de multiplicité **4**, et **7** de multiplicité **1**.

Exemple n° 4 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 5)(x - 3)^4}{(x + 7)(x^2 - 1)x^6}$ admet

- pour zéros : **3**, **$-\sqrt{5}$** , et **$\sqrt{5}$**
- trois pôles simples : **-7**, **-1**, et **1**, et le pôle



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.

Exemple n° 3 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{x(x^2 + 5)(x - 3)^2}{(x - 7)(x^2 + 1)(x + 2)^4}$ admet

- pour zéros : **0** et **3**
- pour pôles : **-2** de multiplicité **4**, et **7** de multiplicité **1**.

Exemple n° 4 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 5)(x - 3)^4}{(x + 7)(x^2 - 1)x^6}$ admet

- pour zéros : **3**, **$-\sqrt{5}$** , et **$\sqrt{5}$**
- trois pôles simples : **-7**, **-1**, et **1**, et le pôle **0** de multiplicité



Définition:

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un **zéro** ou une **racine** de F si α est une racine de P .
- On dit que α est un **pôle** de F si α est une racine de Q .
- On dit que l'**ordre** d'un pôle de F est de **multiplicité** p , s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q . Un pôle d'ordre 1 est dit **simple**.

Exemple n° 3 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{x(x^2 + 5)(x - 3)^2}{(x - 7)(x^2 + 1)(x + 2)^4}$ admet

- pour zéros : **0** et **3**
- pour pôles : **-2** de multiplicité **4**, et **7** de multiplicité **1**.

Exemple n° 4 : Dans \mathbb{R} , la fraction rationnelle $\frac{(x^2 - 5)(x - 3)^4}{(x + 7)(x^2 - 1)x^6}$ admet

- pour zéros : **3**, **$-\sqrt{5}$** , et **$\sqrt{5}$**
- trois pôles simples : **-7**, **-1**, et **1**, et le pôle **0** de multiplicité **6**.

2. Partie entière



Théorème

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. Il existe un unique polynôme E et une unique fraction rationnelle G tels que :

$$F = E + G \text{ et } \deg(G) < 0$$

Le polynôme E est appelé la **partie entière** de F . Elle est égale à la division euclidienne de P par Q .

2. Partie entière



Théorème

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. Il existe un unique polynôme E et une unique fraction rationnelle G tels que :

$$F = E + G \text{ et } \deg(G) < 0$$

Le polynôme E est appelé la **partie entière** de F . Elle est égale à la division euclidienne de P par Q .

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est

2. Partie entière



Théorème

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. Il existe un unique polynôme E et une unique fraction rationnelle G tels que :

$$F = E + G \text{ et } \deg(G) < 0$$

Le polynôme E est appelé la **partie entière** de F . Elle est égale à la division euclidienne de P par Q .

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**,

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} x^4 \quad +x^3 \quad +6x^2 \quad +5x \quad +18 \\ \hline x^2 - x + 3 \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} x^4 \quad +x^3 \quad +6x^2 \quad +5x \quad +18 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - x + 3 \\ \hline \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} x^4 \quad +x^3 \quad +6x^2 \quad +5x \quad +18 \\ - \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - x + 3 \\ \hline x^2 \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18 \\ - x^4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - x + 3 \\ \hline x^2 \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18 \\ - (x^4 - x^3 + 3x^2) \\ \hline 2x^3 + 3x^2 + 5x + 18 \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18 \\ - (x^4 - x^3 + 3x^2) \\ \hline 2x^3 + 3x^2 + 5x + 18 \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 \\ \hline & & 2x^3 & & & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & & & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & +18 & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18 \\ - (x^4 - x^3 + 3x^2) \\ \hline 2x^3 + 3x^2 + 5x + 18 \\ - (2x^3 - 2x^2 + 6x) \\ \hline 5x^2 - x + 18 \\ - (5x^2 - 5x + 15) \\ \hline 6x + 3 \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18 \\ - (x^4 - x^3 + 3x^2) \\ \hline 2x^3 + 3x^2 + 5x + 18 \\ - (2x^3 - 2x^2 + 6x) \\ \hline 5x^2 - x + 18 \\ - (5x^2 - 5x + 15) \\ \hline 6x + 3 \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 + 2x \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & +18 & \\ - & & & & & \\ & 2x^3 & & & & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 + 2x \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & +18 & \\ - & & & & & \\ & 2x^3 & -2x^2 & & & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 + 2x \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & +18 & \\ - & & & & & \\ \hline & 2x^3 & -2x^2 & +6x & & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 + 2x \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & +18 & \\ - & & & & & \\ \hline & 2x^3 & -2x^2 & +6x & & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 + 2x \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & +18 & \\ - & & & & & \\ \hline & 2x^3 & -2x^2 & +6x & & \\ \hline & & 5x^2 & & & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 + 2x \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & +18 & \\ - & & & & & \\ \hline & 2x^3 & -2x^2 & +6x & & \\ \hline & & 5x^2 & -x & & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 + 2x \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & +18 & \\ - & & & & & \\ \hline & 2x^3 & -2x^2 & +6x & & \\ \hline & & 5x^2 & -x & +18 & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 + 2x + 5 \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & +18 & \\ - & & & & & \\ \hline & 2x^3 & -2x^2 & +6x & & \\ \hline & & 5x^2 & -x & +18 & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 + 2x + 5 \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & +18 & \\ - & & & & & \\ & 2x^3 & -2x^2 & +6x & & \\ \hline & & 5x^2 & -x & +18 & \\ - & & & & & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 + 2x + 5 \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & +18 & \\ - & & & & & \\ \hline & 2x^3 & -2x^2 & +6x & & \\ \hline & & 5x^2 & -x & +18 & \\ - & & & & & \\ \hline & & 5x^2 & & & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 + 2x + 5 \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & +18 & \\ - & & & & & \\ & 2x^3 & -2x^2 & +6x & & \\ \hline & & 5x^2 & -x & +18 & \\ - & & & & & \\ & & 5x^2 & -5x & & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 + 2x + 5 \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & +18 & \\ - & & & & & \\ \hline & 2x^3 & -2x^2 & +6x & & \\ \hline & & 5x^2 & -x & +18 & \\ - & & & & & \\ \hline & & 5x^2 & -5x & +15 & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 + 2x + 5 \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & +18 & \\ - & & & & & \\ \hline & 2x^3 & -2x^2 & +6x & & \\ \hline & & 5x^2 & -x & +18 & \\ - & & & & & \\ \hline & & 5x^2 & -5x & +15 & \\ \hline \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 + 2x + 5 \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & +18 & \\ - & & & & & \\ \hline & 2x^3 & -2x^2 & +6x & & \\ \hline & & 5x^2 & -x & +18 & \\ - & & & & & \\ \hline & & 5x^2 & -5x & +15 & \\ \hline & & & 4x & & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & +x^3 & +6x^2 & +5x & +18 & x^2 - x + 3 \\ - & & & & & \\ \hline x^4 & -x^3 & +3x^2 & & & x^2 + 2x + 5 \\ \hline & 2x^3 & +3x^2 & +5x & +18 & \\ - & & & & & \\ \hline & 2x^3 & -2x^2 & +6x & & \\ \hline & & 5x^2 & -x & +18 & \\ - & & & & & \\ \hline & & 5x^2 & -5x & +15 & \\ \hline & & & 4x & +3 & \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18 \\ - x^4 - x^3 + 3x^2 \\ \hline 2x^3 + 3x^2 + 5x + 18 \\ - 2x^3 - 2x^2 + 6x \\ \hline 5x^2 - x + 18 \\ - 5x^2 - 5x + 15 \\ \hline 4x + 3 \end{array} & \begin{array}{l} x^2 - x + 3 \\ \hline x^2 + 2x + 5 \\ \\ f(x) = \frac{(x^2 - x + 3)(x^2 + 2x + 5) + 4x + 3}{x^2 - x + 3} \end{array} \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18 \\ - x^4 - x^3 + 3x^2 \\ \hline 2x^3 + 3x^2 + 5x + 18 \\ - 2x^3 - 2x^2 + 6x \\ \hline 5x^2 - x + 18 \\ - 5x^2 - 5x + 15 \\ \hline 4x + 3 \end{array}$$

$$x^2 - x + 3$$

$$x^2 + 2x + 5$$

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 3)(x^2 + 2x + 5) + 4x + 3}{x^2 - x + 3}$$

$$= x^2 + 2x + 5 + \frac{4x + 3}{x^2 - x + 3}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18}{x^2 - x + 3}$ est **2**, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 18 \\ - x^4 - x^3 + 3x^2 \\ \hline 2x^3 + 3x^2 + 5x + 18 \\ - 2x^3 - 2x^2 + 6x \\ \hline 5x^2 - x + 18 \\ - 5x^2 - 5x + 15 \\ \hline 4x + 3 \end{array}$$

$$x^2 - x + 3$$

$$x^2 + 2x + 5$$

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 3)(x^2 + 2x + 5) + 4x + 3}{x^2 - x + 3}$$

$$= x^2 + 2x + 5 + \frac{4x + 3}{x^2 - x + 3}$$

La partie entière de f est $x^2 + 2x + 5$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

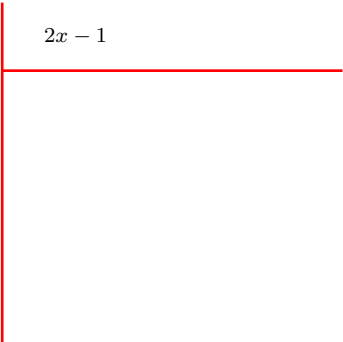
Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$2x^5 \quad -x^4 \quad -14x^2 \quad +7x \quad +4 \quad \Big| \quad 2x - 1$$


I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$2x^5 \quad -x^4 \quad -14x^2 \quad +7x \quad +4 \quad \bigg| \quad 2x - 1$$

$$x^4$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} 2x^5 \quad -x^4 \quad -14x^2 \quad +7x \quad +4 \\ \hline 2x - 1 \\ \hline x^4 \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} 2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4 \\ - 2x^5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x - 1 \\ x^4 \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} 2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4 \\ - (2x^5 - x^4) \\ \hline -14x^2 + 7x + 4 \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} 2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4 \\ - (2x^5 - x^4) \\ \hline -14x^2 + 7x + 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x - 1 \\ \hline x^4 \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} 2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4 \\ - (2x^5 - x^4) \\ \hline -14x^2 + 7x + 4 \\ - (-14x^2) \\ \hline 7x + 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x - 1 \\ \hline x^4 \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} 2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4 \\ - (2x^5 - x^4) \\ \hline -14x^2 + 7x + 4 \\ - (-14x^2 + 7x) \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x - 1 \\ x^4 \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} 2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4 \\ - (2x^5 - x^4) \\ \hline -14x^2 + 7x + 4 \\ - (-14x^2 + 7x) \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x - 1 \\ x^4 \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} 2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4 \\ - (2x^5 - x^4) \\ \hline -14x^2 + 7x + 4 \\ - (-14x^2 + 7x) \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x - 1 \\ x^4 - 7x \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} 2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4 \\ - (2x^5 - x^4) \\ \hline -14x^2 + 7x + 4 \\ - (-14x^2) \\ \hline 7x + 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x - 1 \\ \hline x^4 - 7x \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} 2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4 \\ - (2x^5 - x^4) \\ \hline -14x^2 + 7x + 4 \\ - (-14x^2 + 7x) \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x - 1 \\ \hline x^4 - 7x \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 & -x^4 & -14x^2 & +7x & +4 & 2x - 1 \\ - & & & & & \\ \hline 2x^5 & -x^4 & & & & x^4 - 7x \\ \hline & & -14x^2 & +7x & +4 & \\ & & - & & & \\ & & -14x^2 & +7x & & \\ \hline \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 & -x^4 & -14x^2 & +7x & +4 & 2x - 1 \\ - & & & & & \\ \hline 2x^5 & -x^4 & & & & x^4 - 7x \\ \hline & & -14x^2 & +7x & +4 & g(x) = \\ & - & & & & \\ & & -14x^2 & +7x & & \\ \hline & & & & & 4 \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 & -x^4 & -14x^2 & +7x & +4 & 2x - 1 \\ - & & & & & \\ \hline 2x^5 & -x^4 & & & & x^4 - 7x \\ \hline & & -14x^2 & +7x & +4 & \\ & & - & & & \\ & & -14x^2 & +7x & & \\ \hline & & & & & 4 \end{array}$$
$$g(x) = \frac{(2x - 1)(x^4 - 7x) + 4}{2x - 1}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 & -x^4 & -14x^2 & +7x & +4 & 2x - 1 \\ - & & & & & \\ \hline 2x^5 & -x^4 & & & & x^4 - 7x \\ \hline & & -14x^2 & +7x & +4 & \\ & & - & & & \\ & & -14x^2 & +7x & & \\ \hline & & & & & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} g(x) = \frac{(2x - 1)(x^4 - 7x) + 4}{2x - 1} \\ = \end{array}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 & -x^4 & -14x^2 & +7x & +4 & 2x - 1 \\ - & & & & & \\ \hline 2x^5 & -x^4 & & & & x^4 - 7x \\ \hline & & -14x^2 & +7x & +4 & \\ & & - & & & \\ & & -14x^2 & +7x & & \\ \hline & & & & & 4 \end{array}$$
$$g(x) = \frac{(2x - 1)(x^4 - 7x) + 4}{2x - 1}$$
$$= x^4 - 7x + \frac{4}{2x - 1}$$

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 & -x^4 & -14x^2 & +7x & +4 & 2x - 1 \\ - & & & & & \\ \hline 2x^5 & -x^4 & & & & x^4 - 7x \\ \hline & & -14x^2 & +7x & +4 & \\ - & & & & & \\ \hline & & -14x^2 & +7x & & \\ \hline & & & & & 4 \end{array}$$
$$g(x) = \frac{(2x - 1)(x^4 - 7x) + 4}{2x - 1}$$
$$= x^4 - 7x + \frac{4}{2x - 1}$$

La partie entière de g est

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est $5 - 1 = 4$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 & -x^4 & -14x^2 & +7x & +4 & 2x - 1 \\ - & & & & & \\ \hline 2x^5 & -x^4 & & & & x^4 - 7x \\ \hline & & -14x^2 & +7x & +4 & \\ & & - & & & \\ & & -14x^2 & +7x & & \\ \hline & & & & & 4 \end{array}$$
$$g(x) = \frac{(2x - 1)(x^4 - 7x) + 4}{2x - 1}$$
$$= x^4 - 7x + \frac{4}{2x - 1}$$

La partie entière de g est $x^4 - 7x$



Théorème

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle irréductible de partie entière E . On considère la décomposition de Q en le produit de polynômes irréductibles dans \mathbb{R} :

$$Q(x) = \lambda \prod_{k=1}^r (x - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^s (a_\ell x^2 + b_\ell x + c_\ell)^{n_\ell} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Alors, il existe des familles uniques de réels $(A_{k,i})_{\substack{1 \leq k \leq r \\ 1 \leq i \leq m_k}}$, $(B_{\ell,j})_{\substack{1 \leq \ell \leq s \\ 1 \leq j \leq n_\ell}}$, et $(C_{\ell,j})_{\substack{1 \leq \ell \leq s \\ 1 \leq j \leq n_\ell}}$ telles que :

$$F = \underbrace{E}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_{k,i}}{(x - \alpha_k)^i}}_{\substack{\text{partie polaire} \\ \text{associée au pôle } \alpha}} + \sum_{\ell=1}^s \sum_{j=1}^{n_\ell} \frac{B_{\ell,j}x + C_{\ell,j}}{(a_\ell x^2 + b_\ell x + c_\ell)^j}$$

On appelle cette écriture la **D**écomposition en **É**léments **S**imples (**DES**) de F sur \mathbb{R} . Elle est unique.



Théorème

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle irréductible de partie entière E . On considère la décomposition de Q en le produit de polynômes irréductibles dans \mathbb{R} :

$$Q(x) = \lambda \prod_{k=1}^r (x - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^s (a_\ell x^2 + b_\ell x + c_\ell)^{n_\ell} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Alors, il existe des familles uniques de réels $(A_{k,i})_{\substack{1 \leq k \leq r \\ 1 \leq i \leq m_k}}$, $(B_{\ell,j})_{\substack{1 \leq \ell \leq s \\ 1 \leq j \leq n_\ell}}$, et $(C_{\ell,j})_{\substack{1 \leq \ell \leq s \\ 1 \leq j \leq n_\ell}}$ telles que :

$$F = \underbrace{E}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_{k,i}}{(x - \alpha_k)^i}}_{\substack{\text{partie polaire} \\ \text{associée au pôle } \alpha}} + \sum_{\ell=1}^s \sum_{j=1}^{n_\ell} \frac{B_{\ell,j}x + C_{\ell,j}}{(a_\ell x^2 + b_\ell x + c_\ell)^j}$$

On appelle cette écriture la **Décomposition en Éléments Simples (DES)** de F sur \mathbb{R} . Elle est unique.

Remarque : Dire que le polynôme $a_\ell x^2 + b_\ell x + c_\ell$ est irréductible dans \mathbb{R} revient à dire que son discriminant est strictement négatif : $\Delta_\ell = b_\ell^2 - 4a_\ell c_\ell < 0$.

Exemple n° 7 :

• $f(x) = \frac{x}{(x-4)(x+1)}$ a une partie entière

Exemple n° 7 :

• $f(x) = \frac{x}{(x-4)(x+1)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$f(x) =$$

Exemple n° 7 :

• $f(x) = \frac{x}{(x-4)(x+1)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$f(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$

Exemple n° 7 :

- i) $f(x) = \frac{x}{(x-4)(x+1)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$f(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$

- ii) $g(x) = \frac{x-1}{x^2-4} =$

Exemple n° 7 :

i) $f(x) = \frac{x}{(x-4)(x+1)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$f(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$

ii) $g(x) = \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x}{(x+2)(x-2)}$

Exemple n° 7 :

- i) $f(x) = \frac{x}{(x-4)(x+1)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$f(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$

- ii) $g(x) = \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x}{(x+2)(x-2)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$g(x) =$$

Exemple n° 7 :

i) $f(x) = \frac{x}{(x-4)(x+1)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$f(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$

ii) $g(x) = \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x}{(x+2)(x-2)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$g(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Exemple n° 7 :

i) $f(x) = \frac{x}{(x-4)(x+1)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$f(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$

ii) $g(x) = \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x}{(x+2)(x-2)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$g(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

iii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle**

Exemple n° 7 :

- i) $f(x) = \frac{x}{(x-4)(x+1)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$f(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$

- ii) $g(x) = \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x}{(x+2)(x-2)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$g(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

- iii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) =$$

Exemple n° 7 :

i) $f(x) = \frac{x}{(x-4)(x+1)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$f(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$

ii) $g(x) = \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x}{(x+2)(x-2)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$g(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

iii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} +$$

Exemple n° 7 :

i) $f(x) = \frac{x}{(x-4)(x+1)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$f(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$

ii) $g(x) = \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x}{(x+2)(x-2)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$g(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

iii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} +$$

Exemple n° 7 :

- i) $f(x) = \frac{x}{(x-4)(x+1)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$f(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$

- ii) $g(x) = \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x}{(x+2)(x-2)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$g(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

- iii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3}$$

Exemple n° 7 :

- i) $f(x) = \frac{x}{(x-4)(x+1)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$f(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$

- ii) $g(x) = \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x}{(x+2)(x-2)}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$g(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

- iii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3}$$

Exemple n° 7 :

ii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3}$$

v) $j(x) = \frac{x^2}{(x-4)^2}$ n'a pas une partie entière nulle car $\deg(j) =$

Exemple n° 7 :

ii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3}$$

v) $j(x) = \frac{x^2}{(x-4)^2}$ n'a pas une partie entière nulle car $\deg(j) = 0$. Elle est égale à ...

Exemple n° 7 :

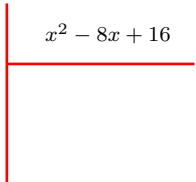
ii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3}$$

v) $j(x) = \frac{x^2}{(x-4)^2}$ n'a pas une partie entière nulle car $\deg(j) = 0$. Elle est égale à ...

x^2

$x^2 - 8x + 16$



II. Décomposition Formelle.

Exemple n° 7 :

ii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3}$$

v) $j(x) = \frac{x^2}{(x-4)^2}$ n'a pas une partie entière nulle car $\deg(j) = 0$. Elle est égale à ...

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2 - 8x + 16 \\ & \hline & 1 \end{array}$$

II. Décomposition Formelle.

Exemple n° 7 :

ii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3}$$

v) $j(x) = \frac{x^2}{(x-4)^2}$ n'a pas une partie entière nulle car $\deg(j) = 0$. Elle est égale à ...

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2 - 8x + 16 \\ - & \\ x^2 & 1 \\ \hline & \end{array}$$

II. Décomposition Formelle.

Exemple n° 7 :

ii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3}$$

v) $j(x) = \frac{x^2}{(x-4)^2}$ n'a pas une partie entière nulle car $\deg(j) = 0$. Elle est égale à ...

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2 - 8x + 16 \\ - & \hline x^2 & -8x & 16 \\ \hline & & 1 \end{array}$$

Exemple n° 7 :

ii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3}$$

v) $j(x) = \frac{x^2}{(x-4)^2}$ n'a pas une partie entière nulle car $\deg(j) = 0$. Elle est égale à ...

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 & x^2 - 8x + 16 \\
 - & \hline
 x^2 & -8x + 16 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

II. Décomposition Formelle.

Exemple n° 7 :

ii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3}$$

v) $j(x) = \frac{x^2}{(x-4)^2}$ n'a pas une partie entière nulle car $\deg(j) = 0$. Elle est égale à ...

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2 - 8x + 16 \\ - & \hline x^2 & -8x + 16 \\ \hline & 8x \end{array}$$

Exemple n° 7 :

ii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3}$$

v) $j(x) = \frac{x^2}{(x-4)^2}$ n'a pas une partie entière nulle car $\deg(j) = 0$. Elle est égale à ...

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 & x^2 - 8x + 16 \\
 - & \hline
 x^2 & -8x + 16 \\
 \hline
 & 8x - 16 \\
 & \hline
 & 1
 \end{array}$$

Exemple n° 7 :

ii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3}$$

v) $j(x) = \frac{x^2}{(x-4)^2}$ n'a pas une partie entière nulle car $\deg(j) = 0$. Elle est égale à ...

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 & x^2 - 8x + 16 \\
 - & \hline
 x^2 & -8x + 16 \\
 \hline
 & 8x - 16
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x^2 - 8x + 16 \\
 \hline
 1 \\
 j(x) = \frac{(x^2 - 8x + 16) \times 1 + 8x - 16}{x^2 - 8x + 16} =
 \end{array}$$

Exemple n° 7 :

ii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3}$$

v) $j(x) = \frac{x^2}{(x-4)^2}$ n'a pas une partie entière nulle car $\deg(j) = 0$. Elle est égale à **1**.

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 & x^2 - 8x + 16 \\
 - & \\
 x^2 & -8x + 16 \\
 \hline
 & 8x - 16
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x^2 - 8x + 16 \\
 \hline
 1 \\
 j(x) = \frac{(x^2 - 8x + 16) \times 1 + 8x - 16}{x^2 - 8x + 16} = 1 + \frac{8x - 16}{(x-4)^2}
 \end{array}$$

Exemple n° 7 :

ii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3}$$

v) $j(x) = \frac{x^2}{(x-4)^2}$ n'a pas une partie entière nulle car $\deg(j) = 0$. Elle est égale à **1**.

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 & x^2 - 8x + 16 \\
 - & \\
 x^2 & -8x + 16 \\
 \hline
 & 8x - 16
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x^2 - 8x + 16 \\
 \hline
 1 \\
 j(x) = \frac{(x^2 - 8x + 16) \times 1 + 8x - 16}{x^2 - 8x + 16} = 1 + \frac{8x - 16}{(x-4)^2}
 \end{array}$$

Donc, $j(x) = 1 +$

Exemple n° 7 :

ii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3}$$

v) $j(x) = \frac{x^2}{(x-4)^2}$ n'a pas une partie entière nulle car $\deg(j) = 0$. Elle est égale à **1**.

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 & x^2 - 8x + 16 \\
 - & \hline
 x^2 & -8x + 16 \\
 \hline
 & 8x - 16 \\
 & \hline
 & 1
 \end{array}$$

$$j(x) = \frac{(x^2 - 8x + 16) \times 1 + 8x - 16}{x^2 - 8x + 16} = 1 + \frac{8x - 16}{(x-4)^2}$$

Donc, $j(x) = 1 + \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2}$

Exemple n° 7 :

ii) $h(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière **nulle** et une DES de la forme :

$$h(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3}$$

v) $j(x) = \frac{x^2}{(x-4)^2}$ n'a pas une partie entière nulle car $\deg(j) = 0$. Elle est égale à **1**.

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 & x^2 - 8x + 16 \\
 - & \hline
 x^2 & -8x + 16 \\
 \hline
 & 8x - 16 \\
 & \hline
 & 1
 \end{array}$$

$$j(x) = \frac{(x^2 - 8x + 16) \times 1 + 8x - 16}{x^2 - 8x + 16} = 1 + \frac{8x - 16}{(x-4)^2}$$

Donc, $j(x) = 1 + \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2}$

v) $k(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)^3(2x+3)^2}$ a une partie entière

Exemple n° 7 :

• $k(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x + 1)^3(2x + 3)^2}$ a une partie entière nulle et une DES de la forme :

$$k(x) = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 1)^3} + \frac{D}{2x + 3} + \frac{E}{(2x + 3)^2}$$

• $l(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{(x^2 - 1)(x^2 + 5)^3}$ a une partie entière

Exemple n° 7 :

• $k(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x + 1)^3(2x + 3)^2}$ a une partie entière nulle et une DES de la forme :

$$k(x) = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 1)^3} + \frac{D}{2x + 3} + \frac{E}{(2x + 3)^2}$$

• $l(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{(x^2 - 1)(x^2 + 5)^3}$ a une partie entière nulle et une DES de la forme :

$$l(x) =$$

Exemple n° 7 :

• $k(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x + 1)^3(2x + 3)^2}$ a une partie entière nulle et une DES de la forme :

$$k(x) = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 1)^3} + \frac{D}{2x + 3} + \frac{E}{(2x + 3)^2}$$

• $l(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{(x^2 - 1)(x^2 + 5)^3}$ a une partie entière nulle et une DES de la forme :

$$l(x) = \frac{A}{x + 1} +$$

Exemple n° 7 :

• $k(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x + 1)^3(2x + 3)^2}$ a une partie entière nulle et une DES de la forme :

$$k(x) = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 1)^3} + \frac{D}{2x + 3} + \frac{E}{(2x + 3)^2}$$

• $l(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{(x^2 - 1)(x^2 + 5)^3}$ a une partie entière nulle et une DES de la forme :

$$l(x) = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} +$$

Exemple n° 7 :

• $k(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x + 1)^3(2x + 3)^2}$ a une partie entière nulle et une DES de la forme :

$$k(x) = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 1)^3} + \frac{D}{2x + 3} + \frac{E}{(2x + 3)^2}$$

• $l(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{(x^2 - 1)(x^2 + 5)^3}$ a une partie entière nulle et une DES de la forme :

$$l(x) = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 5} +$$

Exemple n° 7 :

• $k(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x + 1)^3(2x + 3)^2}$ a une partie entière nulle et une DES de la forme :

$$k(x) = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 1)^3} + \frac{D}{2x + 3} + \frac{E}{(2x + 3)^2}$$

• $l(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{(x^2 - 1)(x^2 + 5)^3}$ a une partie entière nulle et une DES de la forme :

$$l(x) = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 5} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 5)^2} +$$

Exemple n° 7 :

• $k(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x + 1)^3(2x + 3)^2}$ a une partie entière nulle et une DES de la forme :

$$k(x) = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 1)^3} + \frac{D}{2x + 3} + \frac{E}{(2x + 3)^2}$$

• $l(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{(x^2 - 1)(x^2 + 5)^3}$ a une partie entière nulle et une DES de la forme :

$$l(x) = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 5} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 5)^2} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 5)^3}$$

1. La méthode du camouflage.

1. La méthode du camouflage.



Méthode

Soit α un pôle d'ordre m d'une fraction rationnelle F . Pour déterminer le coefficient A de $\frac{A}{(x - \alpha)^m}$ dans la DES de F , on multiplie F d'une part, et sa DES d'autre part, par $(x - \alpha)^m$, et on évalue l'égalité obtenue en remplaçant x par α .

1. La méthode du camouflage.



Méthode

Soit α un pôle d'ordre m d'une fraction rationnelle F . Pour déterminer le coefficient A de $\frac{A}{(x-\alpha)^m}$ dans la DES de F , on multiplie F d'une part, et sa DES d'autre part, par $(x-\alpha)^m$, et on évalue l'égalité obtenue en remplaçant x par α .

Exercice n° 1 : Détermine la **D**écomposition en **É**léments **S**imples de

i. $f(x) = \frac{x-3}{(x+2)(x-5)}$

ii. $g(x) = \frac{x}{x^2-4}$



Méthode

En se plaçant dans \mathbb{C} , on peut factoriser les polynômes du second degré qui deviennent des pôles complexes.



Méthode

En se plaçant dans \mathbb{C} , on peut factoriser les polynômes du second degré qui deviennent des pôles complexes.

Exercice n° 2 : Détermine la **D**écomposition en **É**léments **S**imples de $h(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)(x - 1)}$.



Méthode

En se plaçant dans \mathbb{C} , on peut factoriser les polynômes du second degré qui deviennent des pôles complexes.

Exercice n°2 : Détermine la **D**écomposition en **É**léments **S**imples de $h(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)(x - 1)}$.



Remarque

! Cette méthode est redoutable pour trouver le coefficient de la plus haute puissance.

2. La méthode des dérivées successives.

Considérons une fonction h dérivable en a . Dérivons $f(x) = (x - a)^n \times h(x)$ où $n \geq 2$:

☞ $f'(x) =$

2. La méthode des dérivées successives.

Considérons une fonction h dérivable en a . Dérivons $f(x) = (x - a)^n \times h(x)$ où $n \geq 2$:

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{n(x-a)'(x-a)^{n-1}}_{[(x-a)^n]'} \times h(x) + (x-a)^n \times h'(x)$$

=

2. La méthode des dérivées successives.

Considérons une fonction h dérivable en a . Dérivons $f(x) = (x - a)^n \times h(x)$ où $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \underbrace{n(x-a)'(x-a)^{n-1}}_{[(x-a)^n]'} \times h(x) + (x-a)^n \times h'(x) \\ &= (x-a)^{n-1} [nh(x) + (x-a)h'(x)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(a) =$$

2. La méthode des dérivées successives.

Considérons une fonction h dérivable en a . Dérivons $f(x) = (x - a)^n \times h(x)$ où $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \underbrace{n(x-a)'(x-a)^{n-1}}_{[(x-a)^n]'} \times h(x) + (x-a)^n \times h'(x) \\ &= (x-a)^{n-1} [nh(x) + (x-a)h'(x)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(a) = \mathbf{0}$$

Il s'en suit la propriété suivante :

2. La méthode des dérivées successives.

Considérons une fonction h dérivable en a . Dérivons $f(x) = (x - a)^n \times h(x)$ où $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \underbrace{n(x-a)'(x-a)^{n-1}}_{[(x-a)^n]'} \times h(x) + (x-a)^n \times h'(x) \\ &= (x-a)^{n-1} [nh(x) + (x-a)h'(x)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(a) = 0$$

Il s'en suit la propriété suivante :



Propriété:

Si h est une fonction dérivable en a , et $n \geq 2$ alors $f(x) = (x - a)^n h(x)$ est dérivable en a et

$$f'(x) = (x - a)^{n-1} \tilde{h}(x) \text{ où } \tilde{h} \text{ est une fonction définie en } a \text{ et } f'(a) = 0$$



Dérivation

Considérons une fonction f dont le pôle α est : $\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - \alpha)^n}$

Exercice n°3 : Détermine la **D**écomposition en **É**léments **S**imples de

$$1. f(x) = \frac{x + 1}{(x - 2)^3}$$

$$3. h(x) = \frac{x}{(x + 1)^4}$$

$$2. g(x) = \frac{4x^2 + 1}{(2x - 3)^2}$$

$$4. j(x) = \frac{6x^5 - 13x^4 + 6x^3 + 18x^2 - 26x}{(x - 1)^2(2x + 1)}$$



Dérivation

Considérons une fonction f dont le pôle α est : $\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - \alpha)^n}$

- En multipliant la fonction f par $(x - \alpha)^n$ et en évaluant en α , on détermine A_n ;

Exercice n° 3 : Détermine la **D**écomposition en **É**léments **S**imples de

$$1. f(x) = \frac{x + 1}{(x - 2)^3}$$

$$3. h(x) = \frac{x}{(x + 1)^4}$$

$$2. g(x) = \frac{4x^2 + 1}{(2x - 3)^2}$$

$$4. j(x) = \frac{6x^5 - 13x^4 + 6x^3 + 18x^2 - 26x}{(x - 1)^2(2x + 1)}$$



Dérivation

Considérons une fonction f dont le pôle α est : $\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - \alpha)^n}$

- En multipliant la fonction f par $(x - \alpha)^n$ et en évaluant en α , on détermine A_n ;
- En dérivant une première fois la fonction f , et en évaluant à nouveau en α , on détermine A_{n-1} ;

Exercice n°3 : Détermine la **D**écomposition en **É**léments **S**imples de

$$1. f(x) = \frac{x + 1}{(x - 2)^3}$$

$$3. h(x) = \frac{x}{(x + 1)^4}$$

$$2. g(x) = \frac{4x^2 + 1}{(2x - 3)^2}$$

$$4. j(x) = \frac{6x^5 - 13x^4 + 6x^3 + 18x^2 - 26x}{(x - 1)^2(2x + 1)}$$



Dérivation

Considérons une fonction f dont le pôle α est : $\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - \alpha)^n}$

- En multipliant la fonction f par $(x - \alpha)^n$ et en évaluant en α , on détermine A_n ;
- En dérivant une première fois la fonction f , et en évaluant à nouveau en α , on détermine A_{n-1} ;
- En dérivant une deuxième fois la fonction f , et en évaluant à nouveau en α , on détermine A_{n-2} ;

Exercice n°3 : Détermine la **D**écomposition en **É**léments **S**imples de

$$1. f(x) = \frac{x + 1}{(x - 2)^3}$$

$$3. h(x) = \frac{x}{(x + 1)^4}$$

$$2. g(x) = \frac{4x^2 + 1}{(2x - 3)^2}$$

$$4. j(x) = \frac{6x^5 - 13x^4 + 6x^3 + 18x^2 - 26x}{(x - 1)^2(2x + 1)}$$



Dérivation

Considérons une fonction f dont le pôle α est : $\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - \alpha)^n}$

- En multipliant la fonction f par $(x - \alpha)^n$ et en évaluant en α , on détermine A_n ;
- En dérivant une première fois la fonction f , et en évaluant à nouveau en α , on détermine A_{n-1} ;
- En dérivant une deuxième fois la fonction f , et en évaluant à nouveau en α , on détermine A_{n-2} ;
- ...

Exercice n°3 : Détermine la **D**écomposition en **É**léments **S**imples de

$$1. f(x) = \frac{x + 1}{(x - 2)^3}$$

$$3. h(x) = \frac{x}{(x + 1)^4}$$

$$2. g(x) = \frac{4x^2 + 1}{(2x - 3)^2}$$

$$4. j(x) = \frac{6x^5 - 13x^4 + 6x^3 + 18x^2 - 26x}{(x - 1)^2(2x + 1)}$$



Dérivation

Considérons une fonction f dont le pôle α est : $\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - \alpha)^n}$

- En multipliant la fonction f par $(x - \alpha)^n$ et en évaluant en α , on détermine A_n ;
- En dérivant une première fois la fonction f , et en évaluant à nouveau en α , on détermine A_{n-1} ;
- En dérivant une deuxième fois la fonction f , et en évaluant à nouveau en α , on détermine A_{n-2} ;
- ...
- En dérivant $(n - 1)$ fois la fonction f , et en évaluant à nouveau en α , on détermine A_1 .

Exercice n°3 : Détermine la **D**écomposition en **É**léments **S**imples de

$$1. f(x) = \frac{x + 1}{(x - 2)^3}$$

$$3. h(x) = \frac{x}{(x + 1)^4}$$

$$2. g(x) = \frac{4x^2 + 1}{(2x - 3)^2}$$

$$4. j(x) = \frac{6x^5 - 13x^4 + 6x^3 + 18x^2 - 26x}{(x - 1)^2(2x + 1)}$$