

Structure topologique de $\mathbb{R}^n$

🌀 Fiche n° 6 🌀



Définition:

Soit $A = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$ l'espace affine de dimension $n \geq 1$.



Définition:

Soit $A = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$ l'espace affine de dimension $n \geq 1$.

- La **boule ouverte** de centre A et de rayon $r > 0$, notée $B_r(A)$, est l'ensemble suivant :



Définition:

Soit $A = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$ l'espace affine de dimension $n \geq 1$.

- La **boule ouverte** de centre A et de rayon $r > 0$, notée $B_r(A)$, est l'ensemble suivant :

$$B_r(A) = \{M \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|M - A\| < r\}.$$



Définition:

Soit $A = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$ l'espace affine de dimension $n \geq 1$.

- La **boule ouverte** de centre A et de rayon $r > 0$, notée $B_r(A)$, est l'ensemble suivant :

$$B_r(A) = \{M \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|M - A\| < r\}.$$

- La **boule fermée** de centre A et de rayon $r > 0$, notée $\overline{B}_r(A)$, est l'ensemble suivant :



Définition:

Soit $A = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$ l'espace affine de dimension $n \geq 1$.

- La **boule ouverte** de centre A et de rayon $r > 0$, notée $B_r(A)$, est l'ensemble suivant :

$$B_r(A) = \{M \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|M - A\| < r\}.$$

- La **boule fermée** de centre A et de rayon $r > 0$, notée $\overline{B}_r(A)$, est l'ensemble suivant :

$$\overline{B}_r(A) = \{M \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|M - A\| \leq r\}.$$



Définition:

Soit $A = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$ l'espace affine de dimension $n \geq 1$.

- La **boule ouverte** de centre A et de rayon $r > 0$, notée $B_r(A)$, est l'ensemble suivant :

$$B_r(A) = \{M \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|M - A\| < r\}.$$

- La **boule fermée** de centre A et de rayon $r > 0$, notée $\overline{B}_r(A)$, est l'ensemble suivant :

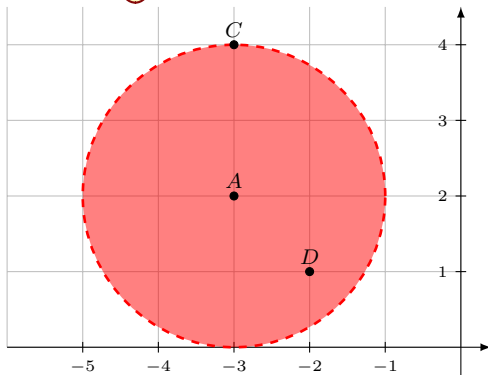
$$\overline{B}_r(A) = \{M \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|M - A\| \leq r\}.$$

- La **sphère** de centre A et de rayon $r > 0$, notée $S_r(A)$, est l'ensemble suivant :

$$\overline{B}_r(A) = \{M \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|M - A\| = r\}.$$

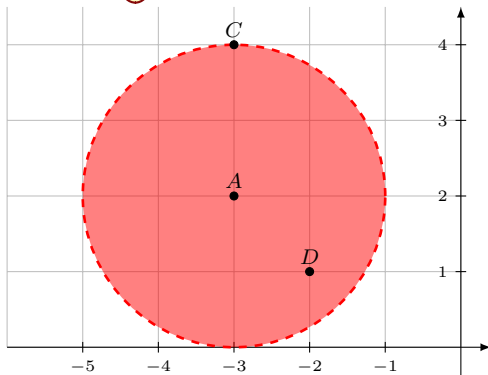
Exemple : a En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3, 2)$.



Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

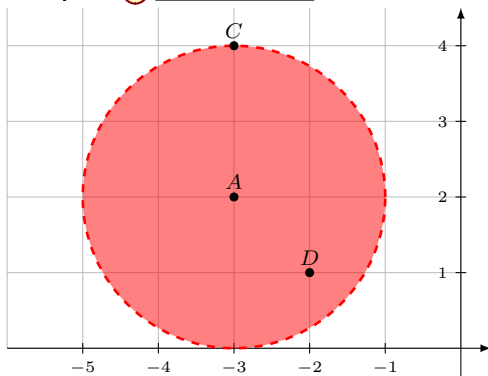
Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.

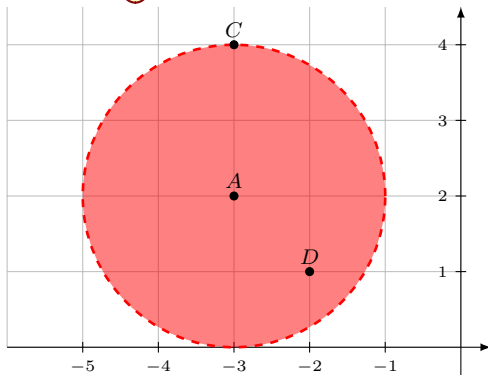


Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.

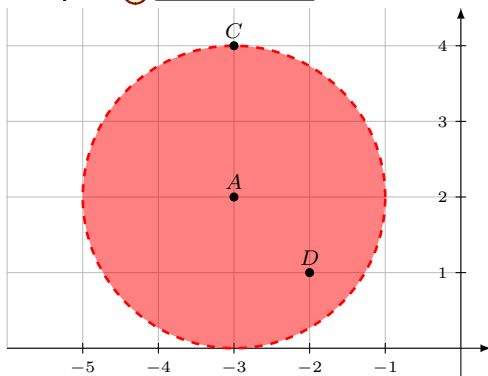


Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



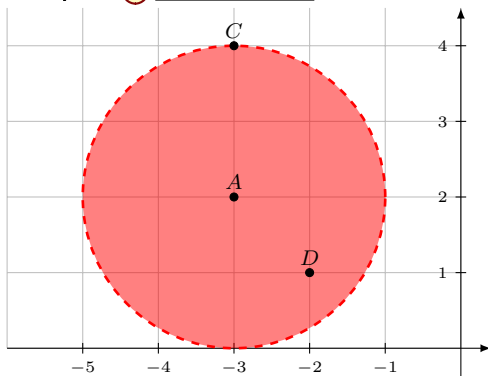
Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

	$C \ ? \ S_2(A)$		$D \ ? \ S_2(A)$
	$C \ ? \ B_2(A)$		$D \ ? \ B_2(A)$
	$C \ ? \ \overline{B_2(A)}$		$D \ ? \ \overline{B_2(A)}$

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



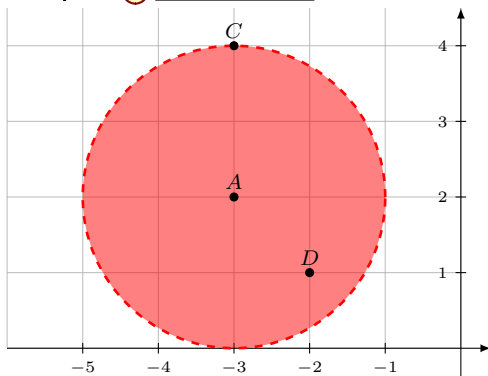
👉 Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

👉 La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

👉 $C \in S_2(A)$	👉 $D \notin S_2(A)$
$C \notin B_2(A)$	$D \in B_2(A)$
$C \notin \overline{B_2(A)}$	$D \in \overline{B_2(A)}$

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



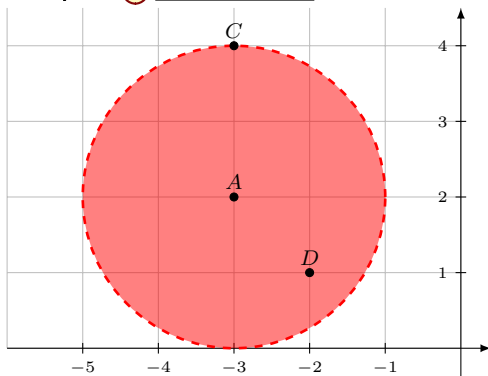
👉 Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

👉 La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

👉	$C \in S_2(A)$	👉	$D ? S_2(A)$
	$C \notin B_2(A)$		$D ? B_2(A)$
	$C ? \overline{B_2(A)}$		$D ? \overline{B_2(A)}$

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



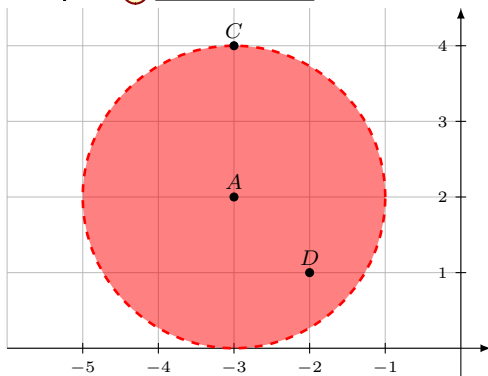
👉 Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

👉 La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

👉	$C \in S_2(A)$	👉	$D \notin S_2(A)$
	$C \notin B_2(A)$		$D \in B_2(A)$
	$C \in \overline{B_2(A)}$		$D \in \overline{B_2(A)}$

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



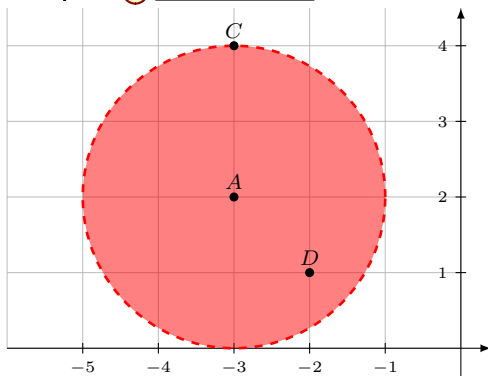
Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

$C \in S_2(A)$	$D \notin S_2(A)$
$C \notin B_2(A)$	$D \notin B_2(A)$
$C \in \overline{B_2(A)}$	$D \in \overline{B_2(A)}$

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



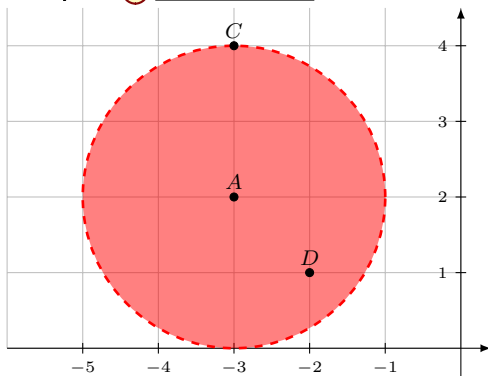
Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

$C \in S_2(A)$ $C \notin B_2(A)$ $C \in \overline{B_2(A)}$	$D \notin S_2(A)$ $D \in B_2(A)$ $D \in \overline{B_2(A)}$
--	--

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



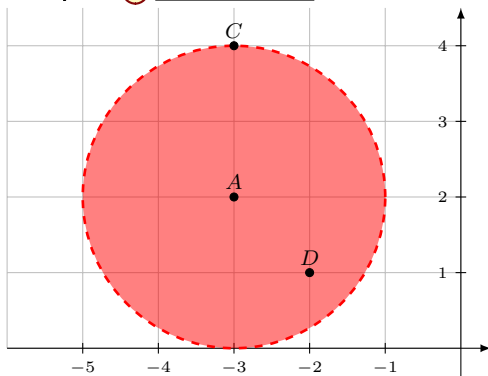
Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

$C \in S_2(A)$ $C \notin B_2(A)$ $C \in \overline{B_2(A)}$	$D \notin S_2(A)$ $D \in B_2(A)$ $D \in \overline{B_2(A)}$
--	--

Exemple : a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

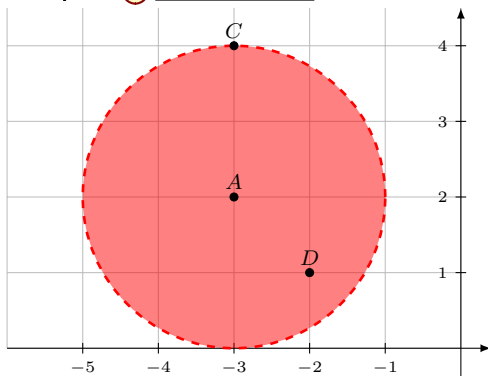
La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

$C \in S_2(A)$ $C \notin B_2(A)$ $C \in \overline{B_2(A)}$	$D \notin S_2(A)$ $D \in B_2(A)$ $D \in \overline{B_2(A)}$
--	--

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B_2(A) \iff$$

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

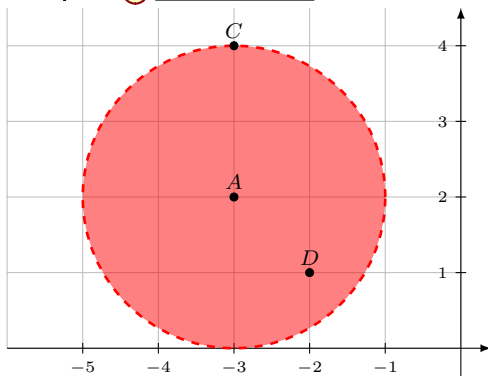
La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

$C \in S_2(A)$ $C \notin B_2(A)$ $C \in \overline{B_2(A)}$	$D \notin S_2(A)$ $D \in B_2(A)$ $D \in \overline{B_2(A)}$
--	--

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B_2(A) \iff \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| =$$

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

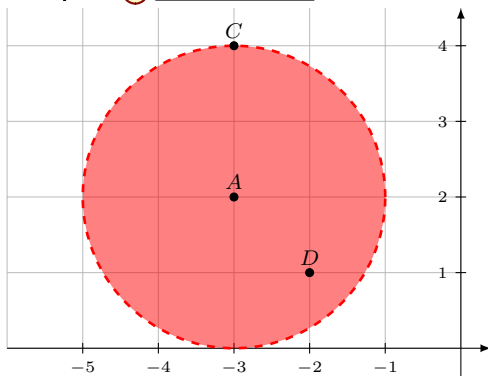
La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

$C \in S_2(A)$ $C \notin B_2(A)$ $C \in \overline{B_2(A)}$	$D \notin S_2(A)$ $D \in B_2(A)$ $D \in \overline{B_2(A)}$
--	--

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B_2(A) \iff \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix} \right\| < 2$$

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

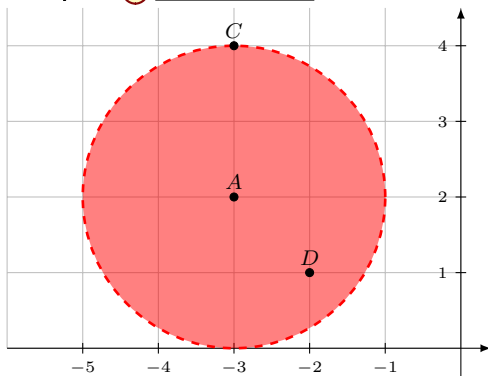
Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

☞ $C \in S_2(A)$	☞ $D \notin S_2(A)$
$C \notin B_2(A)$	$D \in B_2(A)$
$C \in \overline{B_2(A)}$	$D \in \overline{B_2(A)}$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B_2(A) \iff \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix} \right\| < 2$$

$$\iff$$

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

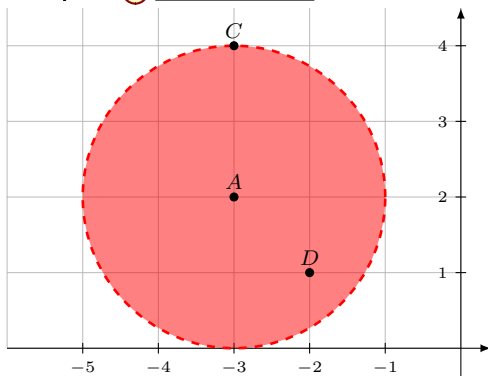
Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

$C \in S_2(A)$ $C \notin B_2(A)$ $C \in \overline{B_2(A)}$	$D \notin S_2(A)$ $D \in B_2(A)$ $D \in \overline{B_2(A)}$
--	--

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B_2(A) \iff \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix} \right\| < 2$$

$$\iff \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} < 2$$

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



👉 Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

👉 La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

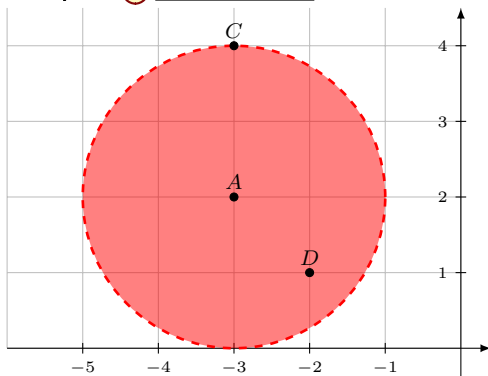
👉 $C \in S_2(A)$	👉 $D \notin S_2(A)$
$C \notin B_2(A)$	$D \in B_2(A)$
$C \in \overline{B_2(A)}$	$D \in \overline{B_2(A)}$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B_2(A) \iff \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix} \right\| < 2$$

$$\iff \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} < 2$$

$$\iff$$

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



👉 Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

👉 La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

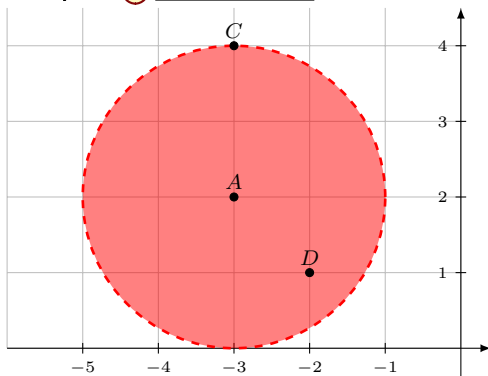
👉 $C \in S_2(A)$	👉 $D \notin S_2(A)$
$C \notin B_2(A)$	$D \in B_2(A)$
$C \in \overline{B_2(A)}$	$D \in \overline{B_2(A)}$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B_2(A) \iff \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix} \right\| < 2$$

$$\iff \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} < 2$$

$$\iff (x+3)^2 + (y-2)^2 < 4$$

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

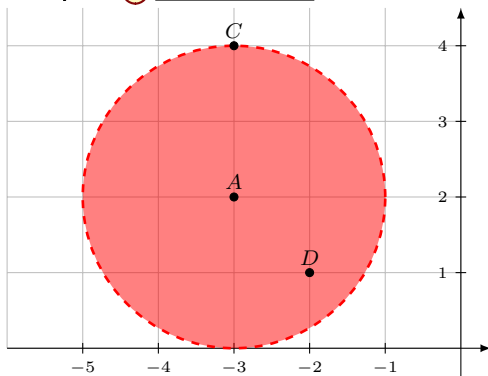
La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

$C \in S_2(A)$	$D \notin S_2(A)$
$C \notin B_2(A)$	$D \in B_2(A)$
$C \in \overline{B_2(A)}$	$D \in \overline{B_2(A)}$

$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 < 4$ est l'inéquation cartésienne de la boule ouverte $B_2(A)$.

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

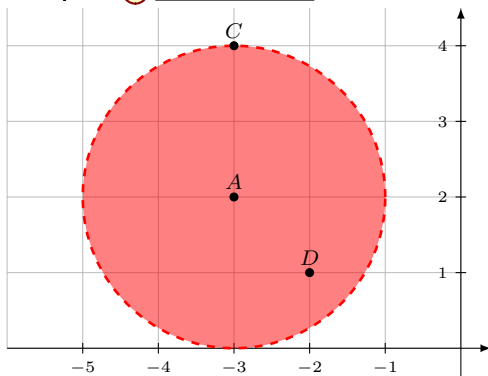
Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

$C \in S_2(A)$ $C \notin B_2(A)$ $C \in \overline{B_2(A)}$	$D \notin S_2(A)$ $D \in B_2(A)$ $D \in \overline{B_2(A)}$
--	--

$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 < 4$ est l'inéquation cartésienne de la boule ouverte $B_2(A)$.

$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ est l'équation cartésienne de la **sphère** $S_2(A)$.

Exemple : (a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3,2)$.



Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plein.

$C \in S_2(A)$ $C \notin B_2(A)$ $C \in \overline{B_2(A)}$	$D \notin S_2(A)$ $D \in B_2(A)$ $D \in \overline{B_2(A)}$
--	--

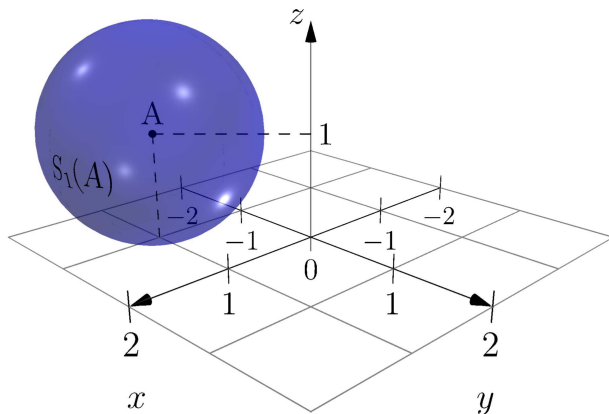
$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 < 4$ est l'inéquation cartésienne de la boule ouverte $B_2(A)$.

$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ est l'équation cartésienne de la **sphère** $S_2(A)$.

$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$ est l'inéquation cartésienne de la **boule fermée** $\overline{B_2(A)}$.

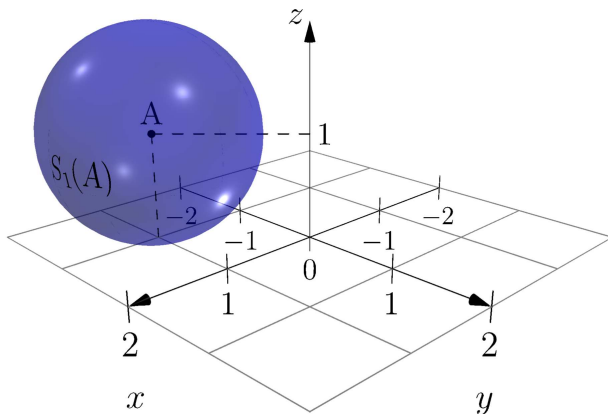
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b) En dimension 3 : Considérons la sphère suivante :



IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

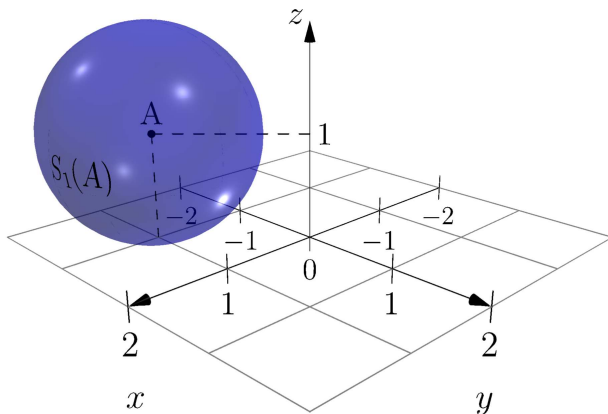
b) En dimension 3 : Considérons la sphère suivante :



Le centre de cette sphère de dimension

IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

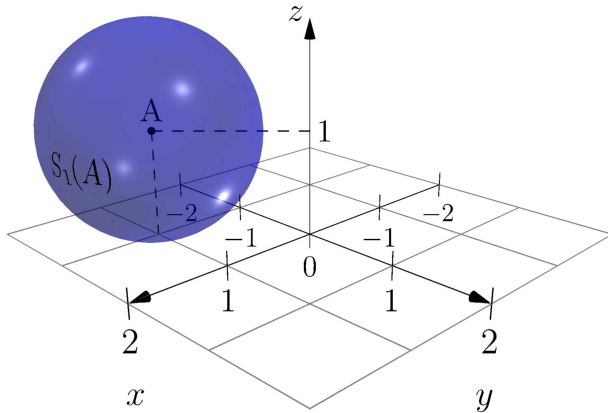
b) En dimension 3 : Considérons la sphère suivante :



Le centre de cette sphère de dimension **2** est le point

IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

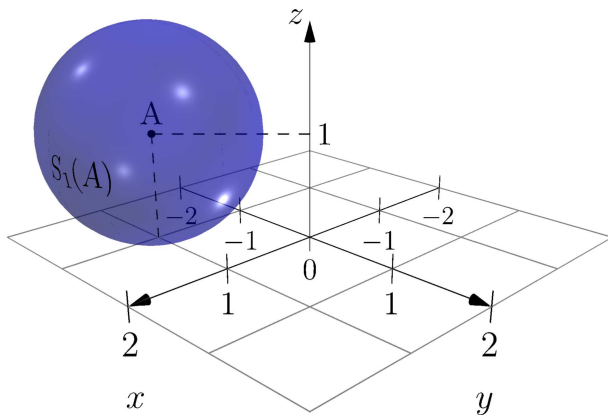
b) En dimension 3 : Considérons la sphère suivante :



Le centre de cette sphère de dimension **2** est le point $A \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$. Son rayon est

IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b) En dimension 3 : Considérons la sphère suivante :



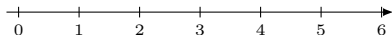
Le centre de cette sphère de dimension **2** est le point $A \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$. Son rayon est **1**

© En dimension 1 : L'espace est réduit à une droite !

IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

© En dimension 1 : L'espace est réduit à une droite !

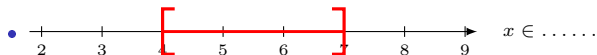
- $x \in \overline{B}_2(3) \iff \dots\dots\dots$



- $x \in B_3(1) \iff \dots\dots\dots$



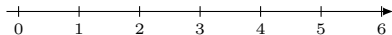
- $x \in B_2(-1) \iff \dots\dots\dots$



IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

© En dimension 1 : L'espace est réduit à une droite !

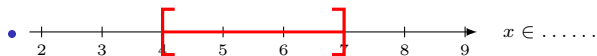
- $x \in \overline{B}_2(3) \iff \|x - 3\| \leq 2 \iff \sqrt{(x - 3)^2} \leq 2 \iff |x - 3| \leq 2$



- $x \in B_3(1) \iff \dots\dots\dots$



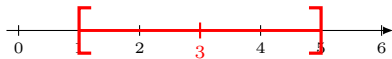
- $x \in B_2(-1) \iff \dots\dots\dots$



IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

Ⓒ En dimension 1 : L'espace est réduit à une droite !

- $x \in \overline{B}_2(3) \iff \|x - 3\| \leq 2 \iff \sqrt{(x - 3)^2} \leq 2 \iff |x - 3| \leq 2$



- $x \in B_3(1) \iff \dots\dots\dots$



- $x \in B_2(-1) \iff \dots\dots\dots$



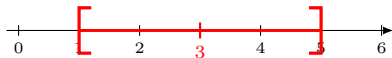
- A horizontal number line with tick marks at 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, and 9. A red interval is highlighted between 4 and 7, with red brackets at the endpoints.

$x \in \dots\dots\dots$

IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

Ⓒ En dimension 1 : L'espace est réduit à une droite !

- $x \in \overline{B}_2(3) \iff \|x - 3\| \leq 2 \iff \sqrt{(x - 3)^2} \leq 2 \iff |x - 3| \leq 2$

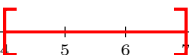


- $x \in B_3(1) \iff |x - 1| < 3$



- $x \in B_2(-1) \iff \dots\dots\dots$

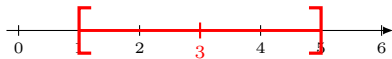


-  $x \in \dots\dots\dots$

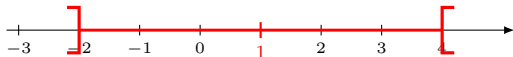
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

Ⓒ En dimension 1 : L'espace est réduit à une droite !

- $x \in \overline{B}_2(3) \iff \|x - 3\| \leq 2 \iff \sqrt{(x - 3)^2} \leq 2 \iff |x - 3| \leq 2$



- $x \in B_3(1) \iff |x - 1| < 3$



- $x \in B_2(-1) \iff \dots\dots\dots$



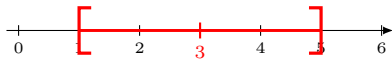
- A horizontal number line with tick marks at 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, and 9. A red line segment is drawn from 4 to 7, with red square brackets at both ends.

 $x \in \dots\dots\dots$

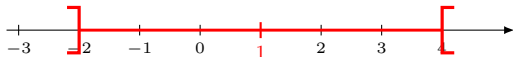
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

Ⓒ En dimension 1 : L'espace est réduit à une droite !

- $x \in \overline{B}_2(3) \iff \|x - 3\| \leq 2 \iff \sqrt{(x - 3)^2} \leq 2 \iff |x - 3| \leq 2$



- $x \in B_3(1) \iff |x - 1| < 3$



- $x \in B_2(-1) \iff |x + 1| < 2$



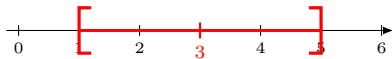
- A horizontal number line with tick marks at 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, and 9. A red line segment is drawn between 4 and 7, with red brackets at both ends, representing the interval $[4, 7]$.

 $x \in \dots\dots\dots$

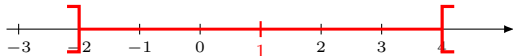
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

Ⓒ En dimension 1 : L'espace est réduit à une droite !

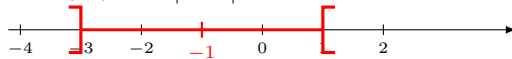
- $x \in \overline{B}_2(3) \iff \|x - 3\| \leq 2 \iff \sqrt{(x - 3)^2} \leq 2 \iff |x - 3| \leq 2$



- $x \in B_3(1) \iff |x - 1| < 3$



- $x \in B_2(-1) \iff |x + 1| < 2$



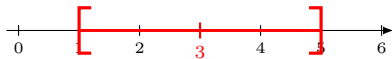
- A horizontal number line with tick marks at 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, and 9. A red line segment is drawn from 3 to 7, with red brackets at both ends. The number 5 is marked with a red tick and labeled in red below the axis.

$x \in \dots\dots$

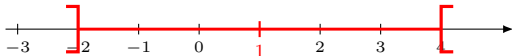
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

© En dimension 1 : L'espace est réduit à une droite !

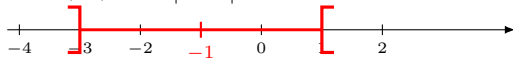
- $x \in \overline{B}_2(3) \iff \|x - 3\| \leq 2 \iff \sqrt{(x - 3)^2} \leq 2 \iff |x - 3| \leq 2$



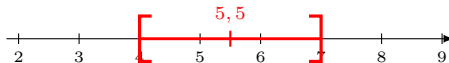
- $x \in B_3(1) \iff |x - 1| < 3$



- $x \in B_2(-1) \iff |x + 1| < 2$



- $x \in \overline{B}_{1,5}(5, 5)$



1. Structure topologique.

1. Structure topologique.



Définition:

Etant donnée une partie A de $\mathbb{R}^n$, le **complémentaire** de A , noté A^c , est l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas dans A .

1. Structure topologique.



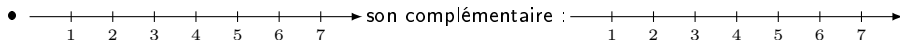
Définition:

Etant donnée une partie A de $\mathbb{R}^n$, le **complémentaire** de A , noté A^c , est l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas dans A .

Exemple :

a) En dimension 1 :

- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$ est
- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$ est



- Le complémentaire de l'intervalle $[2, 6]$ est la réunion d'intervalles
- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 8\}$ est

1. Structure topologique.



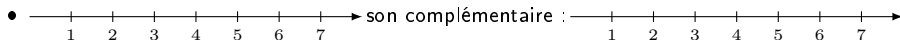
Définition:

Etant donnée une partie A de $\mathbb{R}^n$, le **complémentaire** de A , noté A^c , est l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas dans A .

Exemple :

a) En dimension 1 :

- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$ est



- Le complémentaire de l'intervalle $[2, 6]$ est la réunion d'intervalles
- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 8\}$ est

1. Structure topologique.



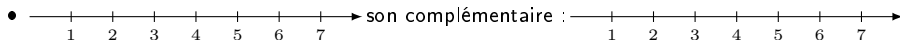
Définition:

Etant donnée une partie A de $\mathbb{R}^n$, le **complémentaire** de A , noté A^c , est l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas dans A .

Exemple :

a) En dimension 1 :

- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$



- Le complémentaire de l'intervalle $[2, 6]$ est la réunion d'intervalles
- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 8\}$ est

1. Structure topologique.



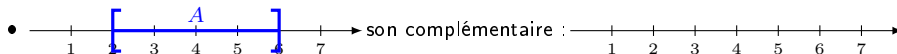
Définition:

Etant donnée une partie A de $\mathbb{R}^n$, le **complémentaire** de A , noté A^c , est l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas dans A .

Exemple :

a) En dimension 1 :

- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$



- Le complémentaire de l'intervalle $[2, 6]$ est la réunion d'intervalles
- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 8\}$ est

1. Structure topologique.



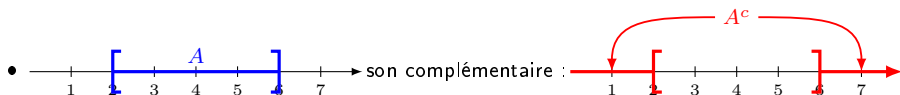
Définition:

Etant donnée une partie A de $\mathbb{R}^n$, le **complémentaire** de A , noté A^c , est l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas dans A .

Exemple :

a) En dimension 1 :

- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$



- Le complémentaire de l'intervalle $[2, 6]$ est la réunion d'intervalles
- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 8\}$ est

1. Structure topologique.



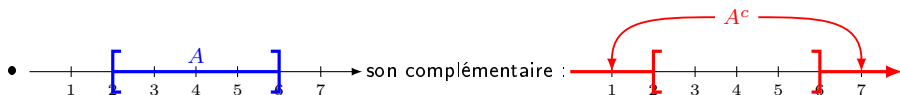
Définition:

Etant donnée une partie A de $\mathbb{R}^n$, le **complémentaire** de A , noté A^c , est l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas dans A .

Exemple :

a) En dimension 1 :

- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$



- Le complémentaire de l'intervalle $[2, 6]$ est la réunion d'intervalles $] -\infty, 2[\cup]6, +\infty[$
- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 8\}$ est

1. Structure topologique.



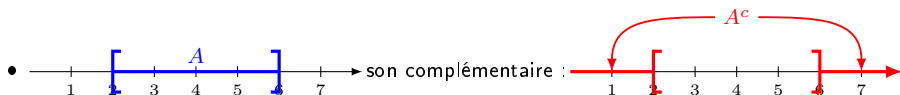
Définition:

Etant donnée une partie A de $\mathbb{R}^n$, le **complémentaire** de A , noté A^c , est l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas dans A .

Exemple :

a) En dimension 1 :

- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$



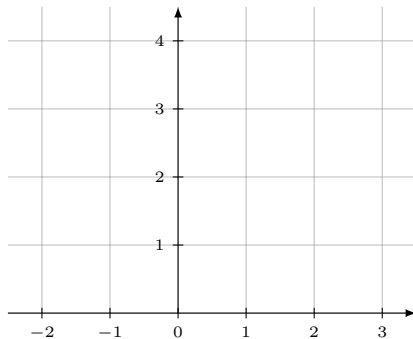
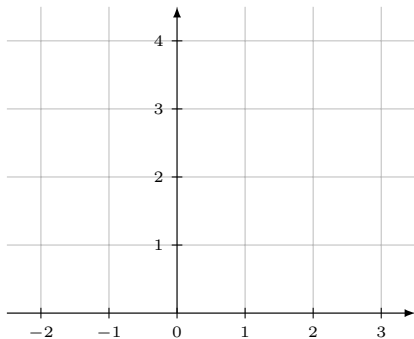
- Le complémentaire de l'intervalle $[2, 6]$ est la réunion d'intervalles $] -\infty, 2[\cup]6, +\infty[$
- Le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 8\}$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \text{ ou } x > 8\}$

IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b) En dimension 2 : On va construire l'ensemble $[-1, 2[\times]1, 3]$ et son complémentaire :

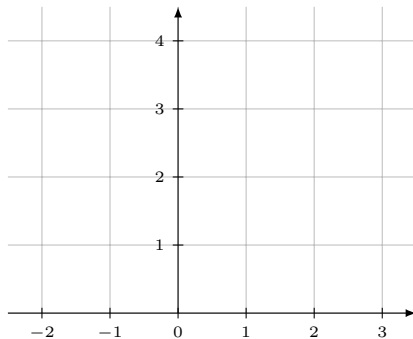
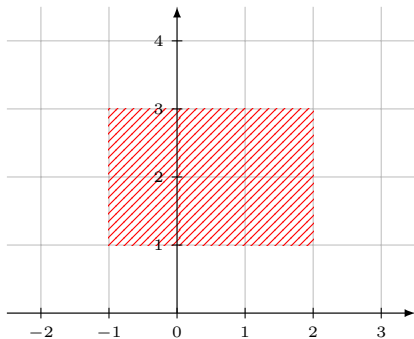
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b En dimension 2 : On va construire l'ensemble $[-1, 2[\times]1, 3]$ et son complémentaire :



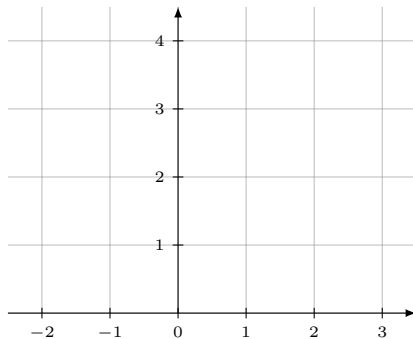
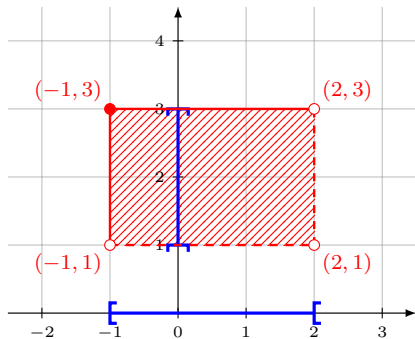
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b) En dimension 2 : On va construire l'ensemble $[-1, 2[\times]1, 3]$ et son complémentaire :



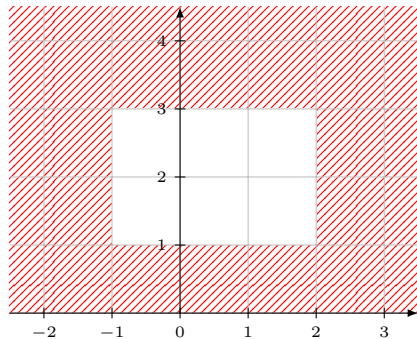
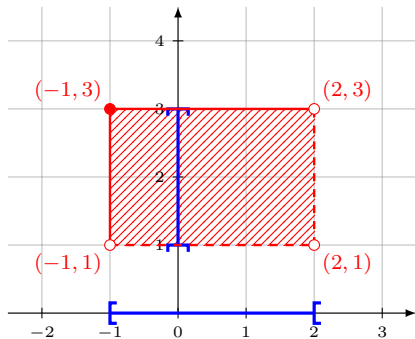
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b) En dimension 2 : On va construire l'ensemble $[-1, 2[\times]1, 3]$ et son complémentaire :



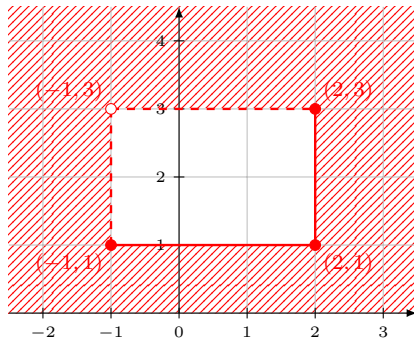
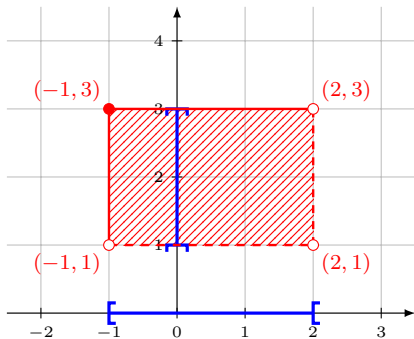
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b) En dimension 2 : On va construire l'ensemble $[-1, 2[\times]1, 3]$ et son complémentaire :



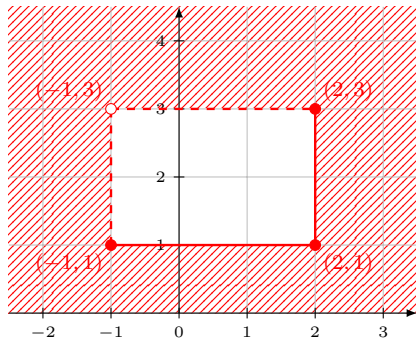
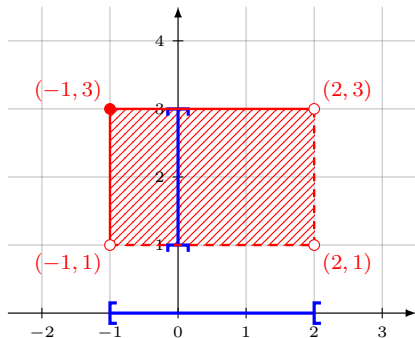
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b) En dimension 2 : On va construire l'ensemble $[-1, 2[\times]1, 3]$ et son complémentaire :



IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b En dimension 2 : On va construire l'ensemble $[-1, 2[\times]1, 3]$ et son complémentaire :

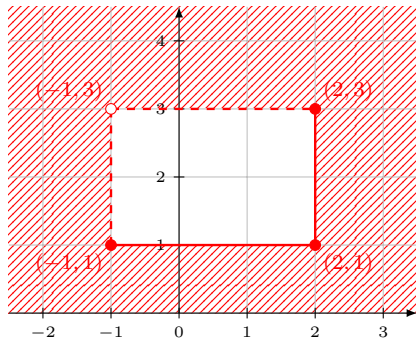
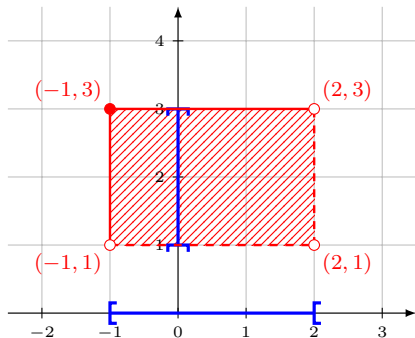


Définition:

- Soient U une partie de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. On dit que U est un **voisinage** de a si U contient une boule ouverte centrée en a .

IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b En dimension 2 : On va construire l'ensemble $[-1, 2[\times]1, 3]$ et son complémentaire :

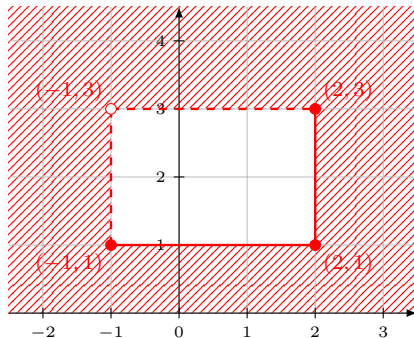
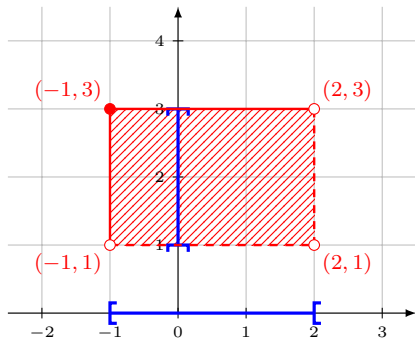


Définition:

- Soient U une partie de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. On dit que U est un **voisinage** de a si U contient une boule ouverte centrée en a .
- On dit que U est un **ouvert** de $\mathbb{R}^n$ si, pour tout point $a \in U$, U contient une boule ouverte centrée en a .

IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b) En dimension 2 : On va construire l'ensemble $[-1, 2[\times]1, 3]$ et son complémentaire :



Définition:

- Soient U une partie de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. On dit que U est un **voisinage** de a si U contient une boule ouverte centrée en a .
- On dit que U est un **ouvert** de $\mathbb{R}^n$ si, pour tout point $a \in U$, U contient une boule ouverte centrée en a .
- On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}^n$ est un **fermé** si son complémentaire est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exemples :

a En dimension 1 : L'intervalle :

$]a, b[$ est un

Exemples :

a En dimension 1 : L'intervalle :

$]a, b[$ est un **ouvert** ; $[a, b]$ est un

Exemples :

a En dimension 1 : L'intervalle :

$]a, b[$ est un **ouvert** ; $[a, b]$ est un **fermé** ; et $[a, b[$

Exemples :

a En dimension 1 : L'intervalle :

$]a, b[$ est un **ouvert** ; $[a, b]$ est un **fermé** ; et $[a, b[$ **n'est pas un ouvert, ni fermé.**

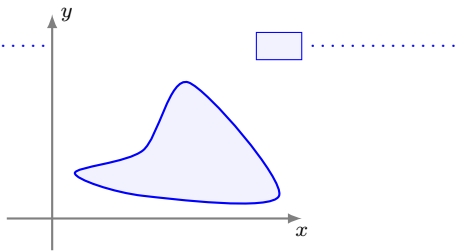
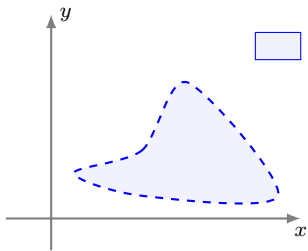
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

Exemples :

(a) En dimension 1 : L'intervalle :

$]a, b[$ est un **ouvert** ; $[a, b]$ est un **fermé** ; et $[a, b[$ **n'est pas un ouvert, ni fermé.**

(b) En dimension 2 :



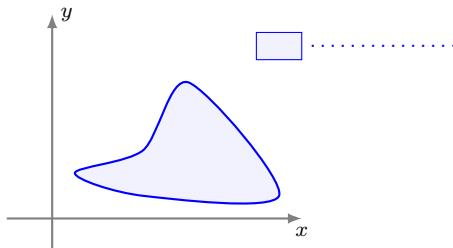
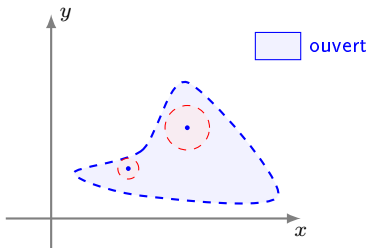
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

Exemples :

a) En dimension 1 : L'intervalle :

$]a, b[$ est un **ouvert** ; $[a, b]$ est un **fermé** ; et $[a, b[$ **n'est pas un ouvert, ni fermé.**

b) En dimension 2 :



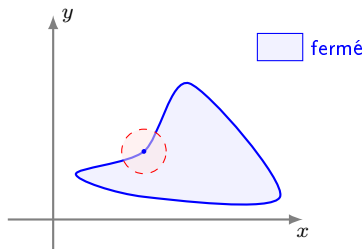
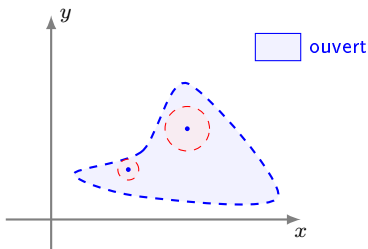
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

Exemples :

(a) En dimension 1 : L'intervalle :

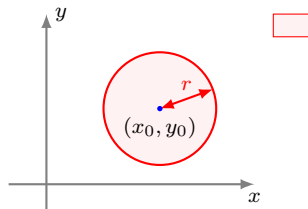
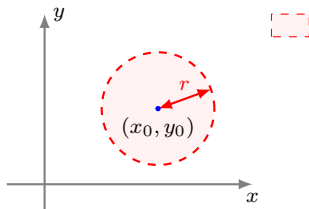
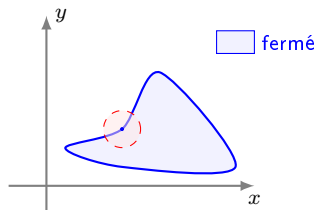
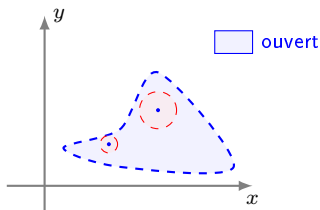
$]a, b[$ est un **ouvert** ; $[a, b]$ est un **fermé** ; et $[a, b[$ **n'est pas un ouvert, ni fermé.**

(b) En dimension 2 :



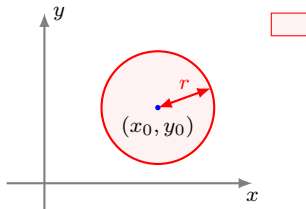
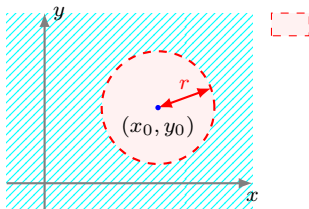
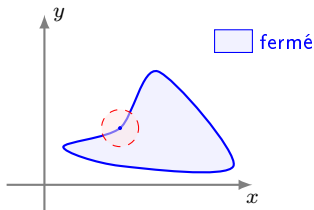
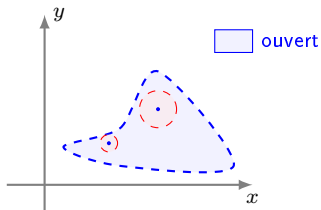
Exemples :

b En dimension 2 :



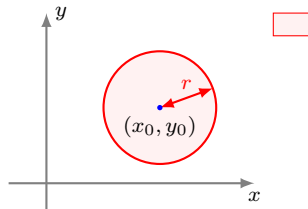
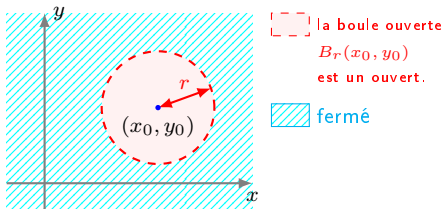
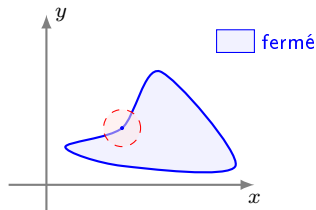
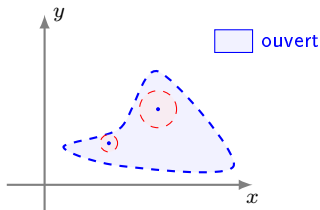
Exemples :

b En dimension 2 :



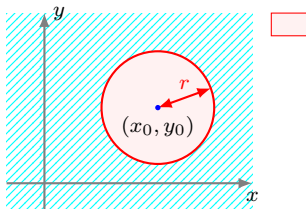
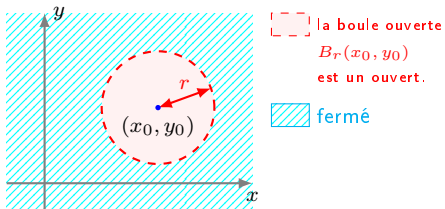
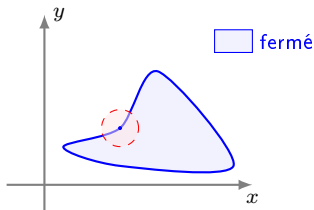
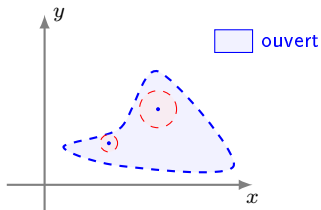
Exemples :

b) En dimension 2 :



Exemples :

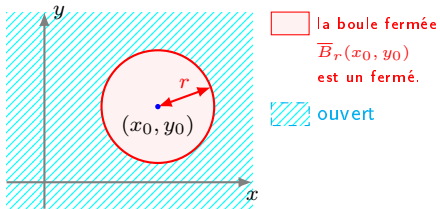
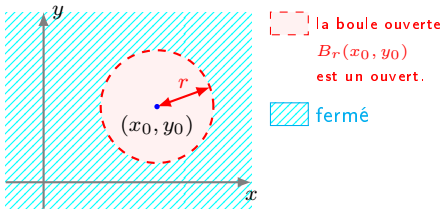
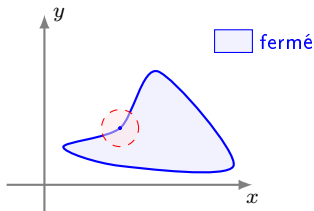
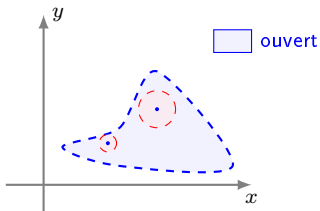
b) En dimension 2 :



IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

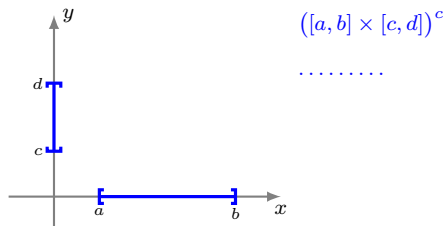
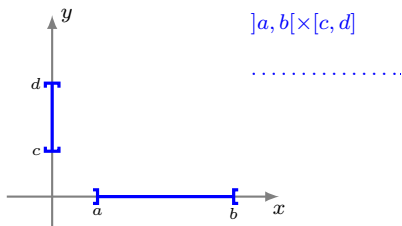
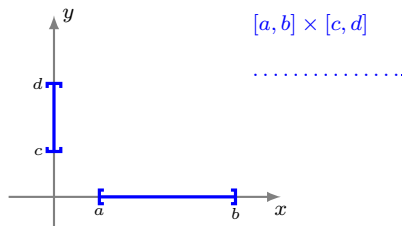
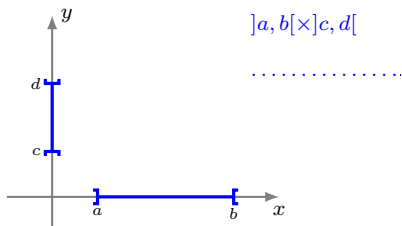
Examples :

b) En dimension 2 :



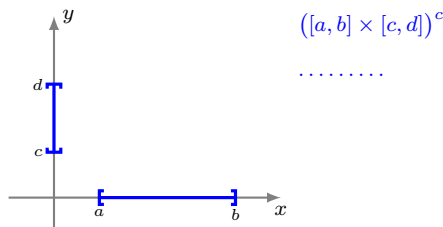
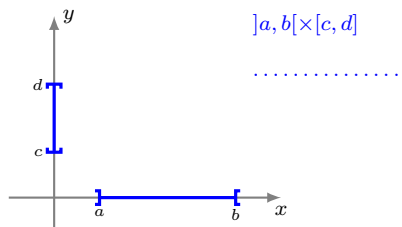
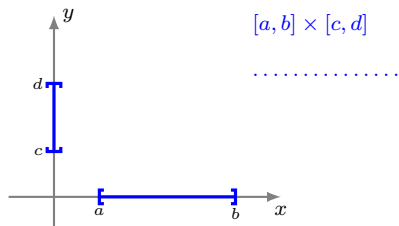
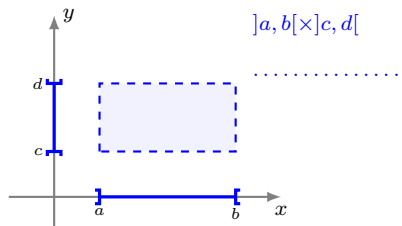
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b En dimension 2 :



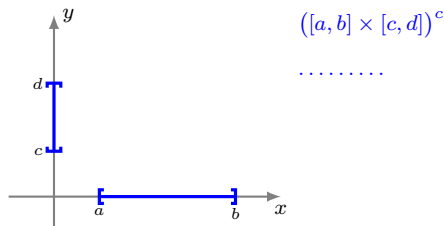
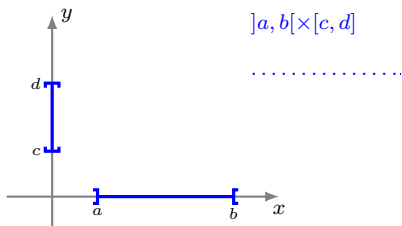
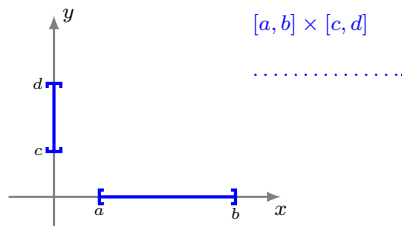
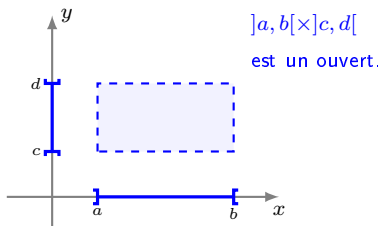
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b) En dimension 2 :



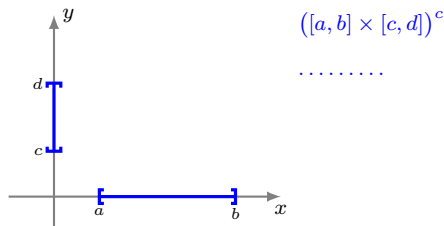
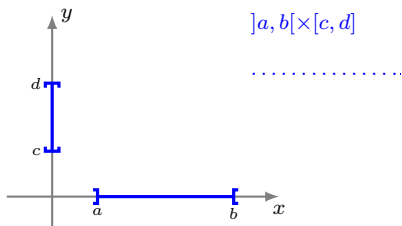
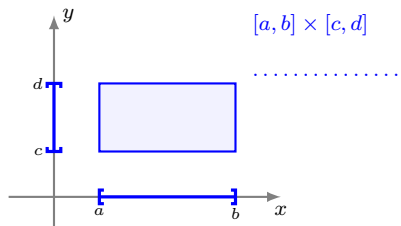
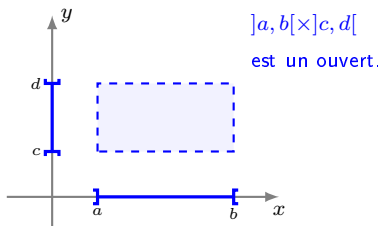
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b En dimension 2 :



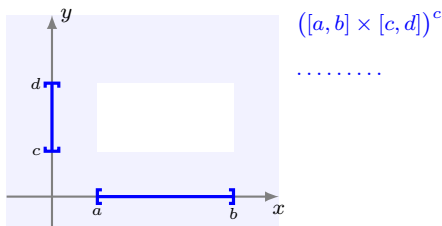
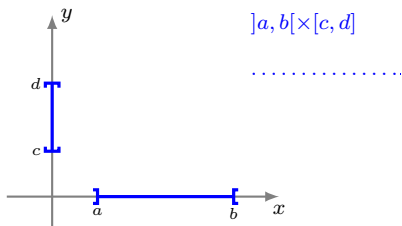
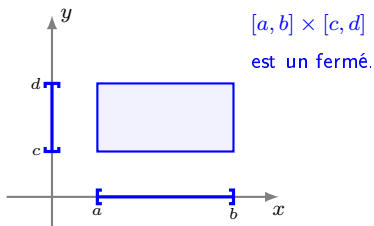
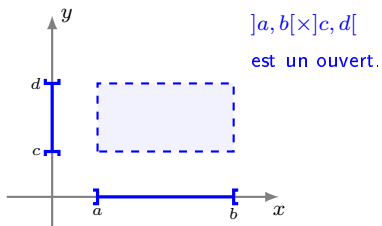
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b En dimension 2 :



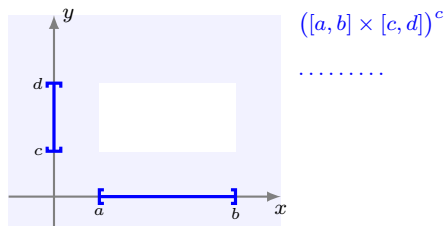
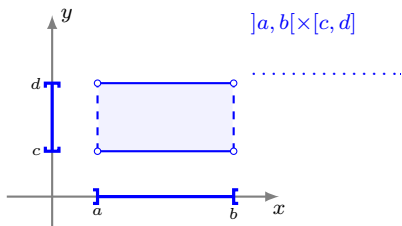
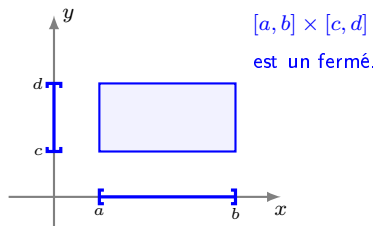
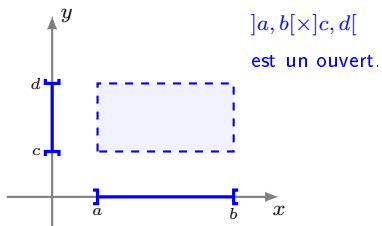
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b) En dimension 2 :



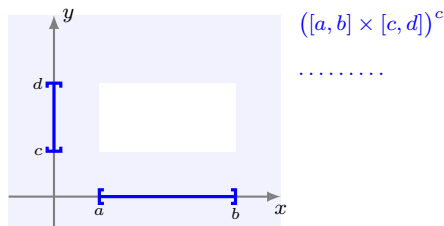
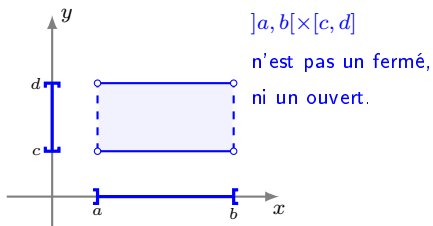
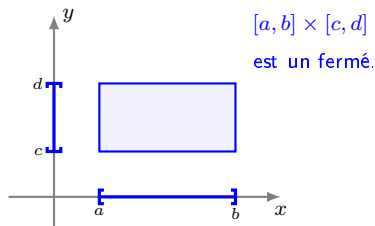
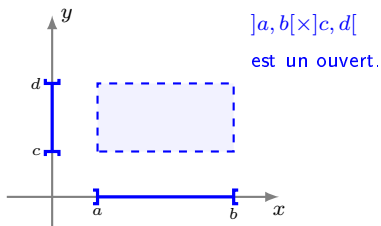
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b) En dimension 2 :



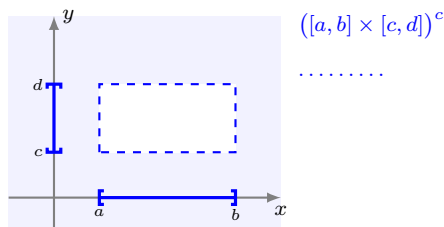
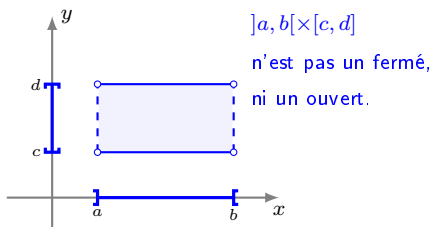
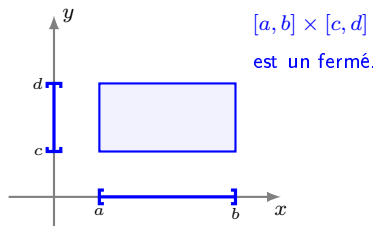
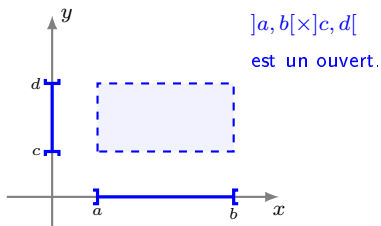
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b) En dimension 2 :



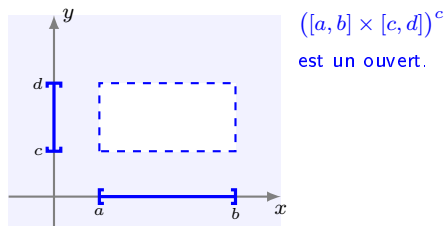
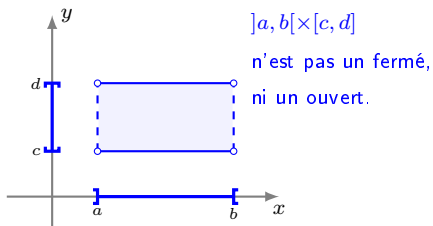
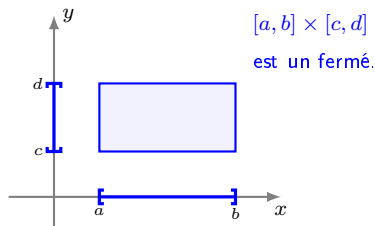
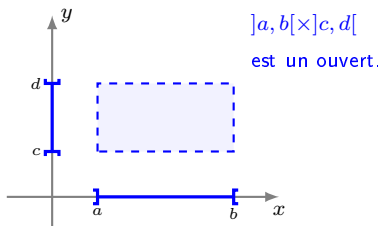
IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

(b) En dimension 2 :



IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$.

b) En dimension 2 :





Propriété:

Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.



Propriété:

Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

a) En dimension 1 :

- $] - 5, 4[\cup] 7, +\infty[$



Propriété:

Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

a) En dimension 1 :

- $] - 5, 4[\cup] 7, +\infty[$ **est un ouvert**
- $] - \infty, 4[\cup] 7, +\infty[$



Propriété:

Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

a) En dimension 1 :

- $] - 5, 4[\cup] 7, +\infty[$ **est un ouvert**
- $] - \infty, 4[\cup] 7, +\infty[$ **est un ouvert**
- $] 5, 8[\cup] 10, 20[$



Propriété:

Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

a) En dimension 1 :

- $] - 5, 4[\cup] 7, +\infty[$ **est un ouvert**
- $] - \infty, 4[\cup] 7, +\infty[$ **est un ouvert**
- $] 5, 8[\cup] 10, 20[$ **est un ouvert**
- $] 5, 8[\cup] 10, 20]$



Propriété:

Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

a) En dimension 1 :

- $] - 5, 4[\cup] 7, +\infty[$ **est un ouvert**
- $] - \infty, 4[\cup] 7, +\infty[$ **est un ouvert**
- $] 5, 8[\cup] 10, 20[$ **est un ouvert**
- $] 5, 8[\cup] 10, 20]$ **n'est pas un ouvert, ni un fermé.**



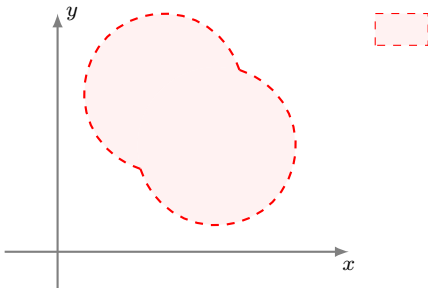
Propriété:

Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

a) En dimension 1 :

- $] - 5, 4[\cup] 7, +\infty[$ **est un ouvert**
- $] - \infty, 4[\cup] 7, +\infty[$ **est un ouvert**
- $] 5, 8[\cup] 10, 20[$ **est un ouvert**
- $] 5, 8[\cup] 10, 20[$ **n'est pas un ouvert, ni un fermé.**

b) En dimension 2 :





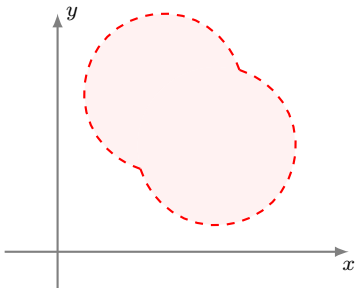
Propriété:

Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

a) En dimension 1 :

- $] - 5, 4[\cup] 7, +\infty[$ **est un ouvert**
- $] - \infty, 4[\cup] 7, +\infty[$ **est un ouvert**
- $] 5, 8[\cup] 10, 20[$ **est un ouvert**
- $] 5, 8[\cup] 10, 20[$ **n'est pas un ouvert, ni un fermé.**

b) En dimension 2 :



 ouvert

La réunion de deux boules
ouvertes est un ouvert.



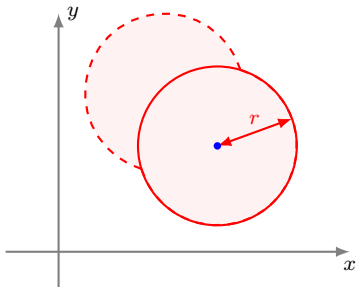
Propriété:

Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

a) En dimension 1 :

- $] - 5, 4[\cup] 7, +\infty[$ **est un ouvert**
- $] - \infty, 4[\cup] 7, +\infty[$ **est un ouvert**
- $] 5, 8[\cup] 10, 20[$ **est un ouvert**
- $] 5, 8[\cup] 10, 20]$ **n'est pas un ouvert, ni un fermé.**

b) En dimension 2 :



 ouvert

La réunion de deux boules
ouvertes est un ouvert.



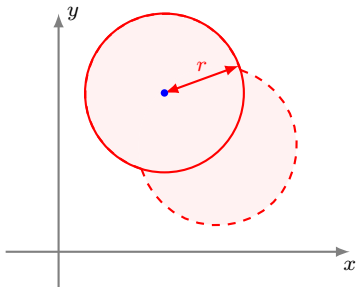
Propriété:

Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

a) En dimension 1 :

- $] - 5, 4[\cup] 7, +\infty[$ **est un ouvert**
- $] - \infty, 4[\cup] 7, +\infty[$ **est un ouvert**
- $] 5, 8[\cup] 10, 20[$ **est un ouvert**
- $] 5, 8[\cup] 10, 20]$ **n'est pas un ouvert, ni un fermé.**

b) En dimension 2 :



 ouvert

La réunion de deux boules
ouvertes est un ouvert.