Le gradient

Pour donner une interprétation géométrique du gradient nous nous placerons systématiquement dans un repère orthonormé de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Il s'en suivra que pour deux vecteurs

$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} =$$

Pour donner une interprétation géométrique du gradient nous nous placerons systématiquement dans un repère orthonormé de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Il s'en suivra que pour deux vecteurs

$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} =$$

Pour donner une interprétation géométrique du gradient nous nous placerons systématiquement dans un repère orthonormé de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Il s'en suivra que pour deux vecteurs

$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} =$$

Pour donner une interprétation géométrique du gradient nous nous placerons systématiquement dans un repère orthonormé de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Il s'en suivra que pour deux vecteurs

$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$$

Pour donner une interprétation géométrique du gradient nous nous placerons systématiquement dans un repère orthonormé de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Il s'en suivra que pour deux vecteurs

$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$$

Lorsqu'on effectue des calculs avec des vecteurs, leurs coordonnées seront représentées par des matrices **colonnes.**

Pour donner une interprétation géométrique du gradient nous nous placerons systématiquement dans un repère orthonormé de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Il s'en suivra que pour deux vecteurs

$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$$

Lorsqu'on effectue des calculs avec des vecteurs, leurs coordonnées seront représentées par des matrices **colonnes.**

Il se peut que dans le texte, pour des raisons de gestion de l'espace, on les écrive sous la forme de matrice ligne.

Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 5x^2y - z^3 \end{array}$ son jacobien est

$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) =$$

Pour donner une interprétation géométrique du gradient nous nous placerons systématiquement dans un repère orthonormé de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Il s'en suivra que pour deux vecteurs

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = {}^t\vec{u}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$$

Lorsqu'on effectue des calculs avec des vecteurs, leurs coordonnées seront représentées par des matrices **colonnes.**
Il se peut que dans le texte, pour des raisons de gestion de l'espace, on les écrive sous la forme de matrice ligne.

Considérons la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 5x^2y - z^3 \end{array}$ son jacobien est

$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (\quad , \quad , \quad)$$

Pour donner une interprétation géométrique du gradient nous nous placerons systématiquement dans un repère orthonormé de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Il s'en suivra que pour deux vecteurs

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = {}^t\vec{u}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$$

Lorsqu'on effectue des calculs avec des vecteurs, leurs coordonnées seront représentées par des matrices **colonnes.**

Il se peut que dans le texte, pour des raisons de gestion de l'espace, on les écrive sous la forme de matrice ligne.

Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 5x^2y - z^3 \end{array}$ son jacobien est

$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (10xy, \quad , \quad)$$

Pour donner une interprétation géométrique du gradient nous nous placerons systématiquement dans un repère orthonormé de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Il s'en suivra que pour deux vecteurs

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = {}^t\vec{u}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

Lorsqu'on effectue des calculs avec des vecteurs, leurs coordonnées seront représentées par des matrices **colonnes.**

Il se peut que dans le texte, pour des raisons de gestion de l'espace, on les écrive sous la forme de matrice ligne.

Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & 5x^2 y - z^3 \end{array}$ son jacobien est

$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (\mathbf{10xy, 5x^2,} \qquad)$$

Pour donner une interprétation géométrique du gradient nous nous placerons systématiquement dans un repère orthonormé de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Il s'en suivra que pour deux vecteurs

$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$$

Lorsqu'on effectue des calculs avec des vecteurs, leurs coordonnées seront représentées par des matrices **colonnes.**
Il se peut que dans le texte, pour des raisons de gestion de l'espace, on les écrive sous la forme de matrice ligne.

Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 5x^2y - z^3 \end{array}$ son jacobien est

$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (10xy, 5x^2, -3z^2)$$

Pour donner une interprétation géométrique du gradient nous nous placerons systématiquement dans un repère orthonormé de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Il s'en suivra que pour deux vecteurs

$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$$

Lorsqu'on effectue des calculs avec des vecteurs, leurs coordonnées seront représentées par des matrices **colonnes.**
Il se peut que dans le texte, pour des raisons de gestion de l'espace, on les écrive sous la forme de matrice ligne.

Considérons la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 5x^2y - z^3 \end{array}$ son jacobien est

$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \mathbf{(10xy, 5x^2, -3z^2)}$$

et sa différentielle est $\mathrm{d}f =$

Pour donner une interprétation géométrique du gradient nous nous placerons systématiquement dans un repère orthonormé de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Il s'en suivra que pour deux vecteurs

$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

Lorsqu'on effectue des calculs avec des vecteurs, leurs coordonnées seront représentées par des matrices **colonnes.**
Il se peut que dans le texte, pour des raisons de gestion de l'espace, on les écrive sous la forme de matrice ligne.

Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 5x^2y - z^3 \end{array}$ son jacobien est

$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (10xy, 5x^2, -3z^2)$$

et sa différentielle est $\mathrm{d}f = \begin{pmatrix} 10xy & 5x^2 & -3z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} =$

Pour donner une interprétation géométrique du gradient nous nous placerons systématiquement dans un repère orthonormé de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Il s'en suivra que pour deux vecteurs

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = {}^t\vec{u}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$$

Lorsqu'on effectue des calculs avec des vecteurs, leurs coordonnées seront représentées par des matrices **colonnes.**
Il se peut que dans le texte, pour des raisons de gestion de l'espace, on les écrive sous la forme de matrice ligne.

Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 5x^2y - z^3 \end{array}$ son jacobien est

$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (10xy, 5x^2, -3z^2)$$

et sa différentielle est $\mathrm{d}f = \begin{pmatrix} 10xy & 5x^2 & -3z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = 10xy\ \mathrm{d}x +$

Pour donner une interprétation géométrique du gradient nous nous placerons systématiquement dans un repère orthonormé de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Il s'en suivra que pour deux vecteurs

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = {}^t\vec{u}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$$

Lorsqu'on effectue des calculs avec des vecteurs, leurs coordonnées seront représentées par des matrices **colonnes.**
Il se peut que dans le texte, pour des raisons de gestion de l'espace, on les écrive sous la forme de matrice ligne.

Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 5x^2y - z^3 \end{array}$ son jacobien est

$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (10xy, 5x^2, -3z^2)$$

et sa différentielle est $\mathrm{d}f = \begin{pmatrix} 10xy & 5x^2 & -3z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = 10xy\ \mathrm{d}x + 5x^2\ \mathrm{d}y -$

Pour donner une interprétation géométrique du gradient nous nous placerons systématiquement dans un repère orthonormé de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Il s'en suivra que pour deux vecteurs

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \boldsymbol{{}^t\vec{u}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n}$$

Lorsqu'on effectue des calculs avec des vecteurs, leurs coordonnées seront représentées par des matrices **colonnes.**
Il se peut que dans le texte, pour des raisons de gestion de l'espace, on les écrive sous la forme de matrice ligne.

Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & 5x^2y - z^3 \end{array}$ son jacobien est

$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \boldsymbol{(10xy, 5x^2, -3z^2)}$$

et sa différentielle est $\mathrm{d}f = \boldsymbol{\begin{pmatrix} 10xy & 5x^2 & -3z^2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \boldsymbol{10xy\ \mathrm{d}x + 5x^2\ \mathrm{d}y - 3z^2\ \mathrm{d}z}.$

En notant $\overrightarrow{g} = {}^t(J_f) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$, En notant $\overrightarrow{g} = {}^t(J_f) = \begin{pmatrix} 10xy \\ \\ \end{pmatrix}$, En notant $\overrightarrow{g} = {}^t(J_f) = \begin{pmatrix} 10xy \\ 5x^2 \\ \\ \end{pmatrix}$,

En notant $\overrightarrow{g} = {}^t(J_f) = \begin{pmatrix} 10xy \\ 5x^2 \\ -3z^2 \end{pmatrix}$, on peut voir la différentielle comme un "produit scalaire" :

$$\overrightarrow{g} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10xy \\ 5x^2 \\ -3z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} =$$

En notant $\overrightarrow{g} = {}^t(J_f) = \begin{pmatrix} 10xy \\ 5x^2 \\ -3z^2 \end{pmatrix}$, on peut voir la différentielle comme un "produit scalaire" :

$$\overrightarrow{g} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10xy \\ 5x^2 \\ -3z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \mathbf{10}\boldsymbol{xy}\ \mathbf{d}\boldsymbol{x} +$$

En notant $\overrightarrow{g} = {}^t(J_f) = \begin{pmatrix} 10xy \\ 5x^2 \\ -3z^2 \end{pmatrix}$, on peut voir la différentielle comme un "produit scalaire" :

$$\overrightarrow{g} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10xy \\ 5x^2 \\ -3z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \mathbf{10xy\ dx + 5x^2\ dy - 3z^2\ dz}$$

Ce vecteur $\overrightarrow{g}$ est appelé le **gradient** de f :

En notant $\overrightarrow{g} = {}^t(J_f) = \begin{pmatrix} 10xy \\ 5x^2 \\ -3z^2 \end{pmatrix}$, on peut voir la différentielle comme un "produit scalaire" :

$$\overrightarrow{g} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10xy \\ 5x^2 \\ -3z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \mathbf{10xy\ dx + 5x^2\ dy - 3z^2\ dz}$$

Ce vecteur $\overrightarrow{g}$ est appelé le **gradient** de f :

Définition:

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles. Le **gradient** de f en $x = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, noté $\mathrm{grad} f(x)$, est le vecteur :

$$\mathrm{grad} f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Définition:

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles. Le **gradient** de f en $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, noté $\operatorname{grad} f(x)$, est le vecteur :

$$\operatorname{grad} f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Les physiciens et les anglo-saxons notent souvent $\boldsymbol{\nabla f(x)}$ pour $\operatorname{grad} f(x)$. Le symbole $\boldsymbol{\nabla}$ se lit « nabla ».

Définition:

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles. Le **gradient** de f en $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, noté $\operatorname{grad} f(x)$, est le vecteur :

$$\operatorname{grad} f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Les physiciens et les anglo-saxons notent souvent $\boldsymbol{\nabla f(x)}$ pour $\operatorname{grad} f(x)$. Le symbole $\boldsymbol{\nabla}$ se lit « nabla ».Si les dérivées partielles sont en plus continues, alors la fonction f est différentiable et on sait que :

$$\mathrm{d}f(x) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n = \begin{pmatrix} & \ldots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Définition:

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles. Le **gradient** de f en $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, noté $\operatorname{grad} f(x)$, est le vecteur :

$$\operatorname{grad} f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Les physiciens et les anglo-saxons notent souvent $\boldsymbol{\nabla f(x)}$ pour $\operatorname{grad} f(x)$. Le symbole $\boldsymbol{\nabla}$ se lit « nabla ».Si les dérivées partielles sont en plus continues, alors la fonction f est différentiable et on sait que :

$$\mathrm{d}f(x) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}} & & \ldots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Définition:

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles. Le **gradient** de f en $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, noté $\operatorname{grad} f(x)$, est le vecteur :

$$\operatorname{grad} f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Les physiciens et les anglo-saxons notent souvent $\boldsymbol{\nabla f(x)}$ pour $\operatorname{grad} f(x)$. Le symbole $\boldsymbol{\nabla}$ se lit « nabla ».Si les dérivées partielles sont en plus continues, alors la fonction f est différentiable et on sait que :

$$\mathrm{d}f(x) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x_1}} & \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x_2}} & \ldots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Définition:

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles. Le **gradient** de f en $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, noté $\operatorname{grad} f(x)$, est le vecteur :

$$\operatorname{grad} f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Les physiciens et les anglo-saxons notent souvent $\boldsymbol{\nabla f(x)}$ pour $\operatorname{grad} f(x)$. Le symbole $\boldsymbol{\nabla}$ se lit « nabla ».Si les dérivées partielles sont en plus continues, alors la fonction f est différentiable et on sait que :

$$\mathrm{d}f(x) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}} & \boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}} & \ldots & \boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Définition:

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles. Le **gradient** de f en $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, noté $\mathrm{grad} f(x)$, est le vecteur :

$$\mathrm{grad} f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Les physiciens et les anglo-saxons notent souvent $\boldsymbol{\nabla f(x)}$ pour $\mathrm{grad} f(x)$. Le symbole $\boldsymbol{\nabla}$ se lit « nabla ».Si les dérivées partielles sont en plus continues, alors la fonction f est différentiable et on sait que :

$$\mathrm{d}f(x) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}} & \boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}} & \cdots & \boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{{}^t\mathrm{grad}(f)(x)} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Propriété:

$^{t}\mathbf{grad}(f)(x)$ est la matrice **jacobienne** de la forme linéaire $\mathrm{d}f(x)$.

Propriété:

${}^t\mathbf{grad}(\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$ est la matrice **jacobienne** de la forme linéaire $\mathrm{d}f(x)$.

Propriété:

Etant donnée un fonction différentiable en x et $\overrightarrow{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, la dérivée **directionnelle** de f suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$ est $\mathrm{d}f(x) \cdot \overrightarrow{h} = \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{h}}$ (produit scalaire).

Propriété:

Etant donnée un fonction différentiable en x et $\overrightarrow{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, la dérivée **directionnelle** de f suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$ est $\mathrm{d}f(x)\cdot\overrightarrow{h} = \overrightarrow{\nabla}f(x)\cdot\overrightarrow{h}$ (produit scalaire).

Exemple n° 1 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes : $f(x,y)=x^3y^2$, $g(x,y)=\mathrm{e}^{2x-3y}$, $h(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-y}$, $k(x,y,z)=x^2\cos(yz)$, et $\ell(x,y,z)=x^2\sin(y^3z^2)$

- $\overrightarrow{\nabla}f(x,y)=\begin{pmatrix}\dots\dots\\ \dots\dots\end{pmatrix}$ • $\overrightarrow{\nabla}g(x,y)=\begin{pmatrix}\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla}h(x,y)=\begin{pmatrix}\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\end{pmatrix}$ • $\overrightarrow{\nabla}k(x,y,z)=\begin{pmatrix}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla}\ell(x,y,z)=\begin{pmatrix}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{pmatrix}$

Propriété:

Etant donnée un fonction différentiable en x et $\overrightarrow{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, la dérivée **directionnelle** de f suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$ est $\mathrm{d}f(x) \cdot \overrightarrow{h} = \overrightarrow{\nabla} f(x) \cdot \overrightarrow{h}$ (produit scalaire).

Exemple n° 1 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes : $f(x,y) = x^3y^2$, $g(x,y) = \mathrm{e}^{2x-3y}$, $h(x,y) = x^2\mathrm{e}^{-y}$, $k(x,y,z) = x^2\cos(yz)$, et $\ell(x,y,z) = x^2\sin(y^3z^2)$

- $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} h(x,y) = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} k(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} \ell(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$

Propriété:

Etant donnée un fonction différentiable en x et $\overrightarrow{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, la dérivée **directionnelle** de f suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$ est $\mathrm{d}f(x) \cdot \overrightarrow{h} = \boldsymbol{\overrightarrow{\nabla} f(x) \cdot \overrightarrow{h}}$ (produit scalaire).

Exemple n° 1 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes : $f(x,y) = x^3y^2$, $g(x,y) = \mathrm{e}^{2x-3y}$, $h(x,y) = x^2\mathrm{e}^{-y}$, $k(x,y,z) = x^2\cos(yz)$, et $\ell(x,y,z) = x^2\sin(y^3z^2)$

- $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3x^2y^2} \\ \boldsymbol{2x^3y} \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2\mathrm{e}^{2x-3y}} \\ \boldsymbol{-3\mathrm{e}^{2x-3y}} \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} h(x,y) = \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} k(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} \ell(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$

Propriété:

Etant donnée un fonction différentiable en x et $\overrightarrow{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, la dérivée **directionnelle** de f suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$ est $\mathrm{d}f(x)\cdot\overrightarrow{h} = \boldsymbol{\overrightarrow{\nabla} f(x)\cdot\overrightarrow{h}}$ (produit scalaire).

Exemple n° 1 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes : $f(x,y)=x^3y^2$, $g(x,y)=\mathrm{e}^{2x-3y}$, $h(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-y}$, $k(x,y,z)=x^2\cos(yz)$, et $\ell(x,y,z)=x^2\sin(y^3z^2)$

- $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3x^2y^2} \\ \boldsymbol{2x^3y} \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2\mathrm{e}^{2x-3y}} \\ \boldsymbol{-3\mathrm{e}^{2x-3y}} \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} h(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2x\mathrm{e}^{-y}} \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} k(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} \ell(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$

Propriété:

Etant donnée un fonction différentiable en x et $\overrightarrow{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, la dérivée **directionnelle** de f suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$ est $\mathrm{d}f(x)\cdot\overrightarrow{h} = \boldsymbol{\overrightarrow{\nabla} f(x) \cdot \overrightarrow{h}}$ (produit scalaire).

Exemple n° 1 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes : $f(x,y) = x^3y^2$, $g(x,y) = \mathrm{e}^{2x-3y}$, $h(x,y) = x^2\mathrm{e}^{-y}$, $k(x,y,z) = x^2\cos(yz)$, et $\ell(x,y,z) = x^2\sin(y^3z^2)$

- $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3x^2y^2} \\ \boldsymbol{2x^3y} \end{pmatrix}$ • $\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2\mathrm{e}^{2x-3y}} \\ \boldsymbol{-3\mathrm{e}^{2x-3y}} \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} h(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2x\mathrm{e}^{-y}} \\ \boldsymbol{-x^2\mathrm{e}^{-y}} \end{pmatrix}$ • $\overrightarrow{\nabla} k(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} \ell(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$

Propriété:

Etant donnée un fonction différentiable en x et $\overrightarrow{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, la dérivée **directionnelle** de f suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$ est $\mathrm{d}f(x) \cdot \overrightarrow{h} = \boldsymbol{\overrightarrow{\nabla} f(x) \cdot \overrightarrow{h}}$ (produit scalaire).

Exemple n° 1 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes : $f(x,y) = x^3y^2$, $g(x,y) = \mathrm{e}^{2x-3y}$, $h(x,y) = x^2\mathrm{e}^{-y}$, $k(x,y,z) = x^2\cos(yz)$, et $\ell(x,y,z) = x^2\sin(y^3z^2)$

- $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3x^2y^2} \\ \boldsymbol{2x^3y} \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2\mathrm{e}^{2x-3y}} \\ \boldsymbol{-3\mathrm{e}^{2x-3y}} \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} h(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2x\mathrm{e}^{-y}} \\ \boldsymbol{-x^2\mathrm{e}^{-y}} \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} k(x,y,z) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2x\cos(yz)} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} \ell(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$

Propriété:

Etant donnée un fonction différentiable en x et $\overrightarrow{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, la dérivée **directionnelle** de f suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$ est $\mathrm{d}f(x)\cdot\overrightarrow{h} = \boldsymbol{\overrightarrow{\nabla} f(x)\cdot\overrightarrow{h}}$ (produit scalaire).

Exemple n° 1 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes : $f(x,y)=x^3y^2$, $g(x,y)=\mathrm{e}^{2x-3y}$, $h(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-y}$, $k(x,y,z)=x^2\cos(yz)$, et $\ell(x,y,z)=x^2\sin(y^3z^2)$

- $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{3x^2y^2}\\ \boldsymbol{2x^3y}\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} g(x,y)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2\mathrm{e}^{2x-3y}}\\ \boldsymbol{-3\mathrm{e}^{2x-3y}}\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} h(x,y)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2x\mathrm{e}^{-y}}\\ \boldsymbol{-x^2\mathrm{e}^{-y}}\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} k(x,y,z)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2x\cos(yz)}\\ \boldsymbol{-x^2z\sin(yz)}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} \ell(x,y,z)=\begin{pmatrix}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{pmatrix}$

Propriété:

Etant donnée un fonction différentiable en x et $\overrightarrow{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, la dérivée **directionnelle** de f suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$ est $\mathrm{d}f(x)\cdot\overrightarrow{h} = \boldsymbol{\overrightarrow{\nabla} f(x)\cdot \overrightarrow{h}}$ (produit scalaire).

Exemple n° 1 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes : $f(x,y)=x^3y^2$, $g(x,y)=\mathrm{e}^{2x-3y}$, $h(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-y}$, $k(x,y,z)=x^2\cos(yz)$, et $\ell(x,y,z)=x^2\sin(y^3z^2)$

- $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3x^2y^2} \\ \boldsymbol{2x^3y} \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2\mathrm{e}^{2x-3y}} \\ \boldsymbol{-3\mathrm{e}^{2x-3y}} \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} h(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2x\mathrm{e}^{-y}} \\ \boldsymbol{-x^2\mathrm{e}^{-y}} \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} k(x,y,z) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2x\cos(yz)} \\ \boldsymbol{-x^2z\sin(yz)} \\ \boldsymbol{-x^2y\sin(yz)} \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} \ell(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$

Propriété:

Etant donnée un fonction différentiable en x et $\overrightarrow{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, la dérivée **directionnelle** de f suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$ est $\mathrm{d}f(x) \cdot \overrightarrow{h} = \boldsymbol{\vec{\nabla} f(x) \cdot \overrightarrow{h}}$ (produit scalaire).

Exemple n° 1 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes : $f(x,y) = x^3y^2$, $g(x,y) = \mathrm{e}^{2x-3y}$, $h(x,y) = x^2\mathrm{e}^{-y}$, $k(x,y,z) = x^2\cos(yz)$, et $\ell(x,y,z) = x^2\sin(y^3z^2)$

- $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3x^2y^2} \\ \boldsymbol{2x^3y} \end{pmatrix}$ • $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2\mathrm{e}^{2x-3y}} \\ \boldsymbol{-3\mathrm{e}^{2x-3y}} \end{pmatrix}$
- $\vec{\nabla} h(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2x\mathrm{e}^{-y}} \\ \boldsymbol{-x^2\mathrm{e}^{-y}} \end{pmatrix}$ • $\vec{\nabla} k(x,y,z) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2x\cos(yz)} \\ \boldsymbol{-x^2z\sin(yz)} \\ \boldsymbol{-x^2y\sin(yz)} \end{pmatrix}$
- $\vec{\nabla} \ell(x,y,z) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2x\sin(y^3z^2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$

Propriété:

Etant donnée un fonction différentiable en x et $\overrightarrow{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, la dérivée **directionnelle** de f suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$ est $\mathrm{d}f(x) \cdot \overrightarrow{h} = \boldsymbol{\vec{\nabla} f(x) \cdot \overrightarrow{h}}$ (produit scalaire).

Exemple n° 1 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes : $f(x, y) = x^3y^2$, $g(x, y) = \mathrm{e}^{2x-3y}$, $h(x, y) = x^2\mathrm{e}^{-y}$, $k(x, y, z) = x^2 \cos(yz)$, et $\ell(x, y, z) = x^2 \sin(y^3z^2)$

- $\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}$
- $\vec{\nabla} g(x, y) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2x-3y} \\ -3\mathrm{e}^{2x-3y} \end{pmatrix}$
- $\vec{\nabla} h(x, y) = \begin{pmatrix} 2x\mathrm{e}^{-y} \\ -x^2\mathrm{e}^{-y} \end{pmatrix}$
- $\vec{\nabla} k(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x\cos(yz) \\ -x^2z\sin(yz) \\ -x^2y\sin(yz) \end{pmatrix}$
- $\vec{\nabla} \ell(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x\sin(y^3z^2) \\ 3x^2y^2z^2\cos(y^3z^2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$

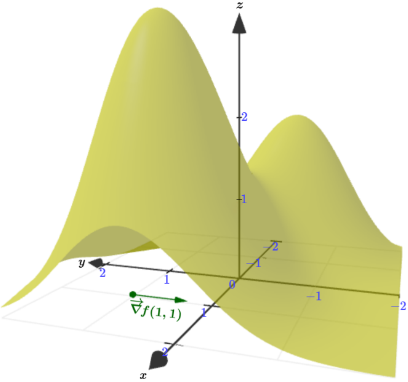
Propriété:

Etant donnée un fonction différentiable en x et $\overrightarrow{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, la dérivée **directionnelle** de f suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$ est $\mathrm{d}f(x)\cdot\overrightarrow{h} = \boldsymbol{\overrightarrow{\nabla} f(x) \cdot \overrightarrow{h}}$ (produit scalaire).

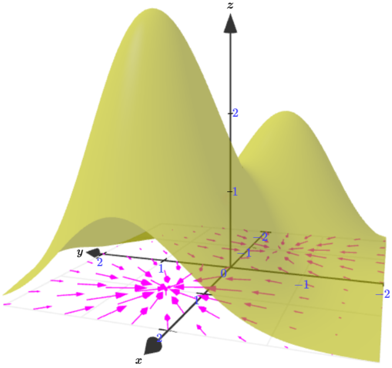
Exemple n° 1 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes : $f(x,y) = x^3y^2$, $g(x,y) = \mathrm{e}^{2x-3y}$, $h(x,y) = x^2\mathrm{e}^{-y}$, $k(x,y,z) = x^2\cos(yz)$, et $\ell(x,y,z) = x^2\sin(y^3z^2)$

- $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2x-3y} \\ -3\mathrm{e}^{2x-3y} \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} h(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\mathrm{e}^{-y} \\ -x^2\mathrm{e}^{-y} \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} k(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x\cos(yz) \\ -x^2z\sin(yz) \\ -x^2y\sin(yz) \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{\nabla} \ell(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x\sin(y^3z^2) \\ 3x^2y^2z^2\cos(y^3z^2) \\ 2x^2y^3z\cos(y^3z^2) \end{pmatrix}$

Exemple n° 2 : Gradients d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:



Le vecteur tracé en vert est le gradient de f au point $(1, 1)$.



Les vecteurs tracés en rose sont des gradients de f.

Lancer l'application.

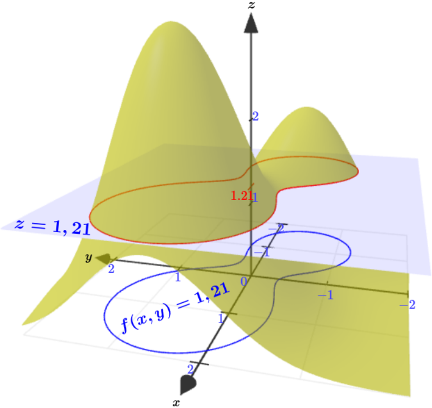
1. Lignes de niveau.

Définition:

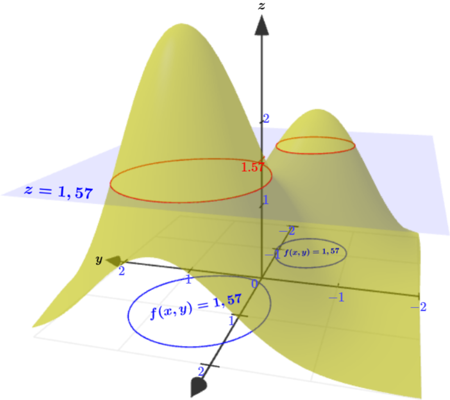
Etant donnée une constante c. Une **ligne de niveau** (ou courbe de niveau) d'une fonction de deux variables $f(x, y)$ est l'ensemble de tous les points (x, y) du plan pour lesquels la fonction prend la valeur constante c.

$$L_c = \{(x, y) \in \mathcal{D}_f \mid f(x, y) = c\}$$

Exemple n° 3 : de lignes de niveau d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:



On a tracé en bleu la courbe de niveau $L_{1,21}$.



On a tracé en bleu la courbe de niveau $L_{1,57}$ qui possède deux composantes connexes.

Lancer l'application.

Remarque

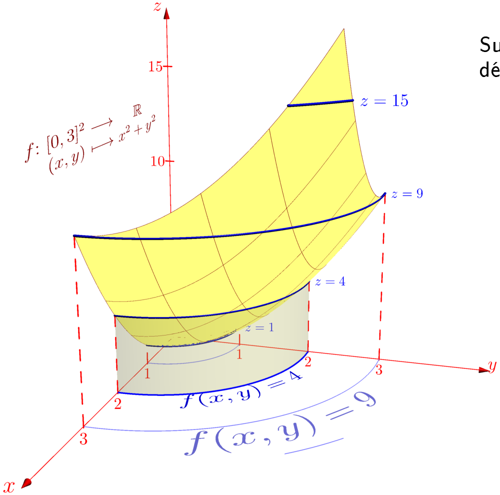
L'ensemble des points (x, y, z) de l'espace pour lesquels la valeur de la fonction $f(x, y, z)$ est égale à une constante c est appelé une **surface** de niveau.

Par exemple, si $f(x, y, z)$ représente la température à chaque point d'une pièce. Une surface de niveau serait une "bulle" ou une paroi invisible reliant tous les points où il fait exactement la même température. On appelle cela une **isotherme.**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On considère les lignes de niveau $f(x, y) = k$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On considère les lignes de niveau $f(x, y) = k$.

Exemple n° 4 :



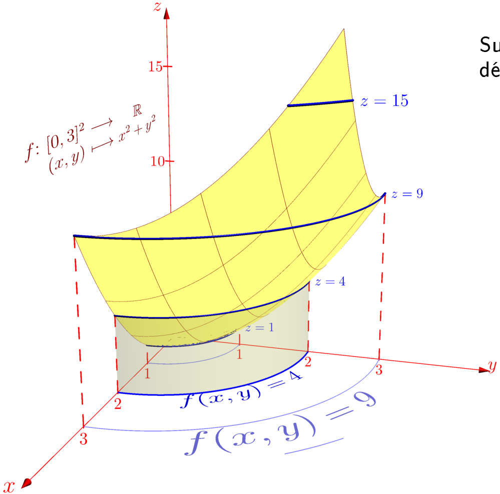
Lancer l'application.

Sur la figure ci-contre, on considère la surface définie par la fonction :

$$f\colon \ [0,3]^2 \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On considère les lignes de niveau $f(x, y) = k$.

Exemple n° 4 :



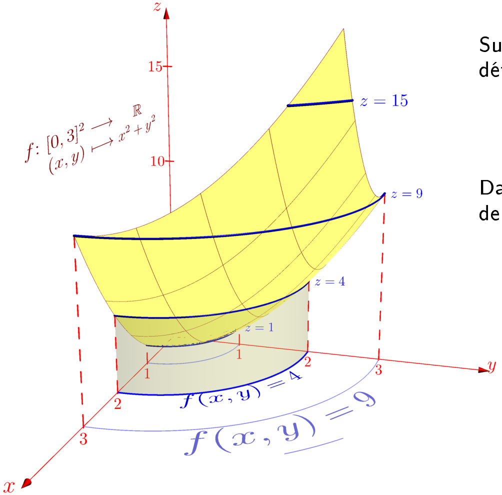
Sur la figure ci-contre, on considère la surface définie par la fonction :

$$f\colon \begin{array}{ccc} [0,3]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

Lancer l'application.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On considère les lignes de niveau $f(x, y) = k$.

Exemple n° 4 :



Lancer l'application.

Sur la figure ci-contre, on considère la surface définie par la fonction :

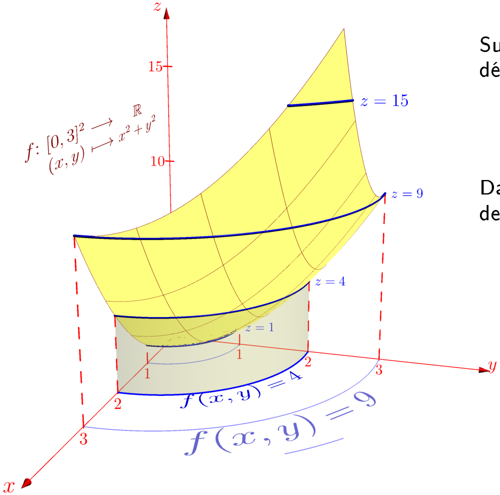
$$f\colon \begin{array}{rcl} [0,3]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

Dans le plan (Oxy) on a dessiner les lignes de niveau de

- $f(x, y) = 1$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On considère les lignes de niveau $f(x, y) = k$.

Exemple n° 4 :



Sur la figure ci-contre, on considère la surface définie par la fonction :

$$f\colon \begin{array}{ccc} [0,3]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

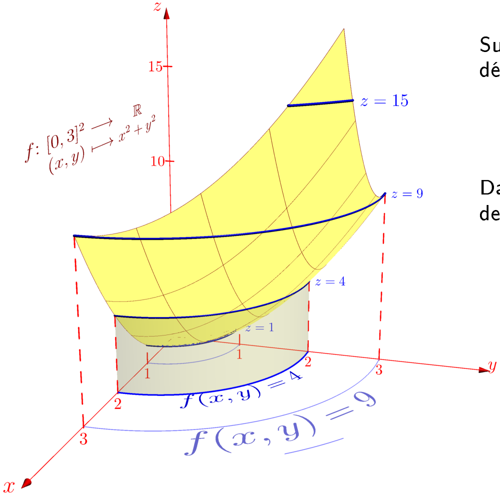
Dans le plan (Oxy) on a dessiner les lignes de niveau de

- $f(x, y) = 1$
- $f(x, y) = 4$

Lancer l'application.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On considère les lignes de niveau $f(x, y) = k$.

Exemple n° 4 :



Sur la figure ci-contre, on considère la surface définie par la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} [0,3]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + y^2 \end{array}$$

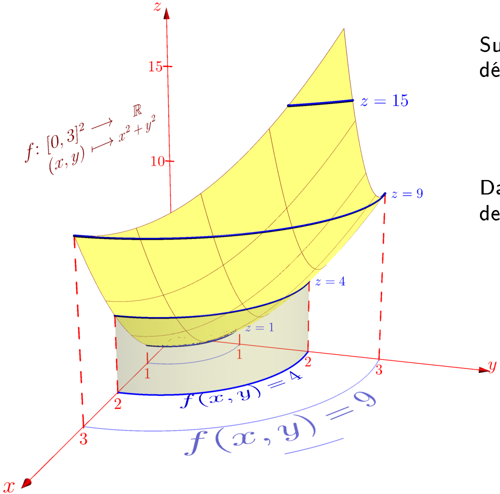
Dans le plan (Oxy) on a dessiner les lignes de niveau de

- $f(x, y) = 1$
- $f(x, y) = 4$
- $f(x, y) = 9$

Lancer l'application.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On considère les lignes de niveau $f(x, y) = k$.

Exemple n° 4 :



Sur la figure ci-contre, on considère la surface définie par la fonction :

$$f\colon \begin{array}{ccc} [0,3]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

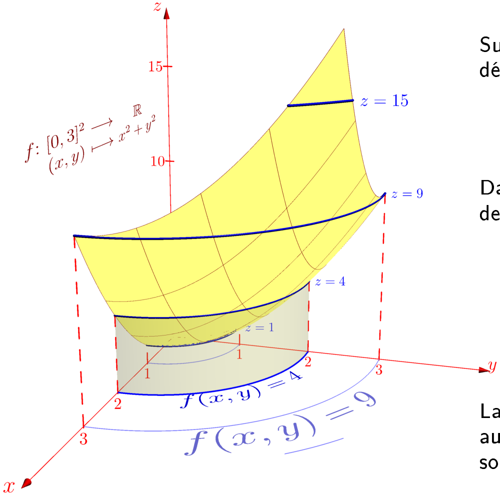
Dans le plan (Oxy) on a dessiner les lignes de niveau de

- $f(x, y) = 1$
- $f(x, y) = 4$
- $f(x, y) = 9$
- $f(x, y) = 15$

Lancer l'application.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On considère les lignes de niveau $f(x, y) = k$.

Exemple n° 4 :



Lancer l'application.

Sur la figure ci-contre, on considère la surface définie par la fonction :

$$f\colon \begin{array}{ccc} [0,3]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

Dans le plan (Oxy) on a dessiner les lignes de niveau de

- $f(x, y) = 1$
- $f(x, y) = 4$
- $f(x, y) = 9$
- $f(x, y) = 15$

La ligne de niveau de $f(x, y) = 9$ correspond aux points dont les coordonnées (x, y) sont solutions de l'équation :

$$x^2 + y^2 = 9$$

2. Tangentes aux lignes de niveau.

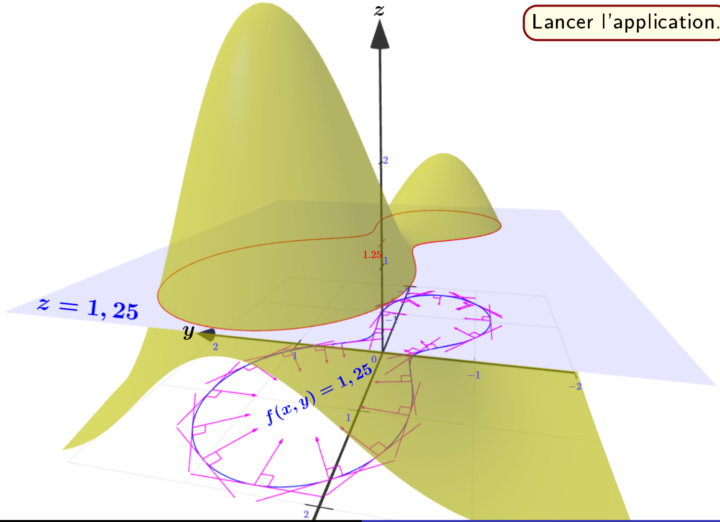
Propriété:

Dans un repère **orthonormé**, le vecteur gradient $\mathrm{grad} f(x_0, y_0)$ est orthogonal à la ligne de niveau de f passant au point (x_0, y_0).

Propriété:

Dans un repère **orthonormé**, le vecteur gradient $\mathrm{grad} f(x_0, y_0)$ est orthogonal à la ligne de niveau de f passant au point (x_0, y_0).

Lancer l'application.



Démonstration

Considérons une courbe $\overrightarrow{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ qui se déplace uniquement le long de la ligne de niveau définie par $f(x, y) = c$, où c est une constante. Le vecteur $\overrightarrow{r}'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{dt}, \frac{\mathrm{d}y(t)}{dt}\right)$ est le vecteur vitesse de cette courbe, il est tangent à la ligne de niveau à chaque instant t.

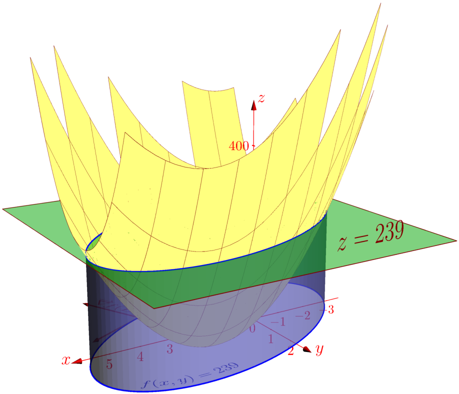
$$\begin{aligned}
f(x(t), y(t)) &= c \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(x(t), y(t))] &= 0 \\
\frac{\partial f(t)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f(t)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} &= 0 \\
\begin{pmatrix} \frac{\partial f(t)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(t)}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} &= 0 \\
\overrightarrow{\nabla f}(t) \cdot \overrightarrow{r}'(t) &= 0
\end{aligned}$$

Autrement dit, $\overrightarrow{\nabla f}(t)$ et $\overrightarrow{r}'(t)$ sont orthogonaux.

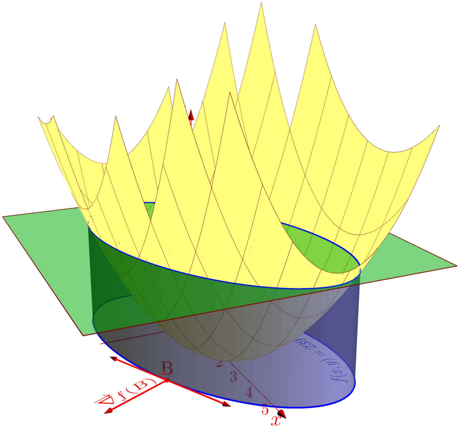
Exemple n° 5 : Sur le dessin suivant, on a représenté en jaune une partie de l'ellipsoïde définie par

$$z = f(x, y) = 15x^2 - 20xy + 37y^2 - 40x + 22y,$$

en vert le plan d'équation $\boldsymbol{z = 239}$ qui coupe la surface f (l'ellipsoïde) par une courbe bleue qui est une **ellipse**. La ligne de niveau $f(x, y) = 239$ est tracée en **bleue**. On a tracé un point B sur cette ligne de niveau, et un vecteur tangent en ce point. Le gradient de f en B $\left(\overrightarrow{\nabla} \boldsymbol{f(B)}\right)$ est orthogonale à la ligne de niveau passant par B.

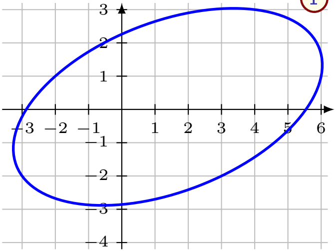


Lancer l'application.



Lancer l'application.

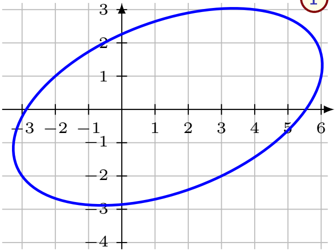
Exercice n° 1 : Tu vas étudier cette courbe de niveau $\big(f(x,y) = 239\big)$ représentée ci-dessous :



1 Détermines, les deux points A et B d'ordonnées -2.

$f(x,-2) =$

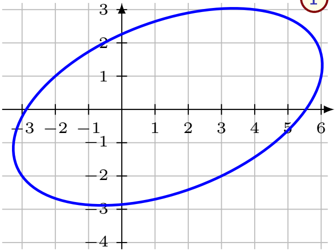
Exercice n° 1 : Tu vas étudier cette courbe de niveau $\big(f(x,y) = 239\big)$ représentée ci-dessous :



1. Détermines, les deux points A et B d'ordonnées -2.

$$f(x,-2) = \mathbf{15x^2 + 40x + 37(-2)^2 - 40x - 44}$$
$$=$$

Exercice nº 1 : Tu vas étudier cette courbe de niveau $\left(f(x,y)=239\right)$ représentée ci-dessous :

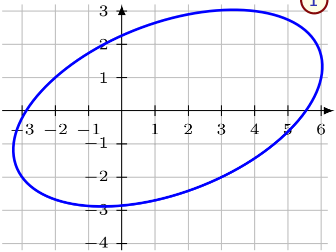


1. Détermines, les deux points A et B d'ordonnées -2.

$$f(x,-2) = \mathbf{15x^2 + 40x + 37(-2)^2 - 40x - 44}$$
$$= \mathbf{15x^2 + 104}$$

Donc, $f(x,-2)=239 \iff \mathbf{15x^2 =}$

Exercice n° 1 : Tu vas étudier cette courbe de niveau $\big(f(x,y) = 239\big)$ représentée ci-dessous :

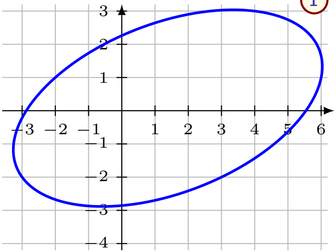


1. Détermines, les deux points A et B d'ordonnées -2.

$$f(x,-2) = \mathbf{15x^2 + 40x + 37(-2)^2 - 40x - 44}$$
$$= \mathbf{15x^2 + 104}$$

Donc, $f(x,-2) = 239 \iff \mathbf{15x^2 = 239 - 104 =}$

Exercice n° 1 : Tu vas étudier cette courbe de niveau $\left(f(x,y)=239\right)$ représentée ci-dessous :



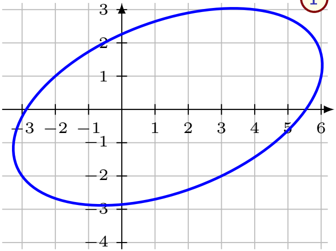
1 Détermines, les deux points A et B d'ordonnées -2.

$$f(x,-2) = \mathbf{15x^2 + 40x + 37(-2)^2 - 40x - 44}$$
$$= \mathbf{15x^2 + 104}$$

Donc, $f(x,-2)=239 \iff \mathbf{15x^2 = 239 - 104 = 135}$

$$\iff \mathbf{x^2 =}$$

Exercice n° 1 : Tu vas étudier cette courbe de niveau $\big(f(x,y)=239\big)$ représentée ci-dessous :



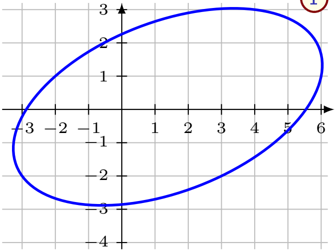
1. Détermines, les deux points A et B d'ordonnées -2.

$$f(x,-2) = \mathbf{15x^2+40x+37(-2)^2-40x-44}$$
$$= \mathbf{15x^2+104}$$

Donc, $f(x,-2)=239 \iff \mathbf{15x^2 = 239-104=135}$

$$\iff \mathbf{x^2 = \frac{135}{15} =}$$

Exercice n° 1 : Tu vas étudier cette courbe de niveau $\big(f(x,y)=239\big)$ représentée ci-dessous :



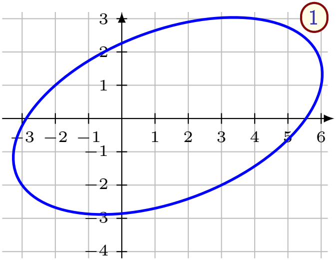
1. Détermines, les deux points A et B d'ordonnées -2.

$$f(x,-2) = \mathbf{15x^2 + 40x + 37(-2)^2 - 40x - 44}$$
$$= \mathbf{15x^2 + 104}$$

Donc, $f(x,-2)=239 \iff \mathbf{15x^2 = 239 - 104 = 135}$

$$\iff \mathbf{x^2 = \frac{135}{15} = 9}$$

Exercice n° 1 : Tu vas étudier cette courbe de niveau $\left(f(x,y)=239\right)$ représentée ci-dessous :

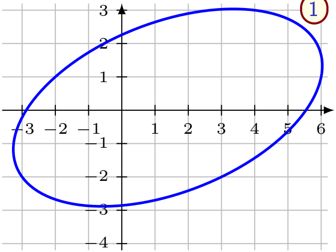


1. Détermines, les deux points A et B d'ordonnées -2.

$$f(x,-2) = \mathbf{15x^2 + 40x + 37(-2)^2 - 40x - 44}$$
$$= \mathbf{15x^2 + 104}$$

Donc, $f(x,-2) = 239 \iff \mathbf{15x^2 = 239 - 104 = 135}$
$\iff \mathbf{x = -3}$ ou $\mathbf{x = 3}$

Exercice n° 1 : Tu vas étudier cette courbe de niveau $\left(f(x,y)=239\right)$ représentée ci-dessous :



1 Détermines, les deux points A et B d'ordonnées -2.

$$\begin{aligned} f(x,-2) &= \mathbf{15x^2+40x+37(-2)^2-40x-44} \\ &= \mathbf{15x^2+104} \end{aligned}$$

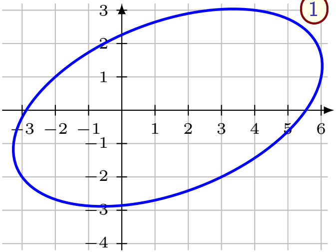
Donc, $f(x,-2)=239 \iff \mathbf{15x^2=239-104=135}$
$\iff \mathbf{x=-3}$ **ou** $\mathbf{x=3}$

Donc, $A\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

2 $\vec{\nabla}f(x,y)=$

donc $\vec{\nabla}f(B)=\begin{pmatrix}\dots\\-186\end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{90}\vec{\nabla}f(B)\simeq\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$

Exercice n° 1 : Tu vas étudier cette courbe de niveau $\big(f(x,y)=239\big)$ représentée ci-dessous :



1. Détermines, les deux points A et B d'ordonnées -2.

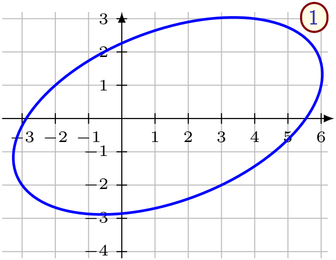
$$f(x,-2) = \mathbf{15x^2 + 40x + 37(-2)^2 - 40x - 44}$$
$$= \mathbf{15x^2 + 104}$$

Donc, $f(x,-2)=239 \iff \mathbf{15x^2 = 239 - 104 = 135}$
$\iff \boldsymbol{x = -3}$ **ou** $\boldsymbol{x = 3}$

Donc, $A\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

2. $\vec{\nabla} f(x,y) = \left|\begin{array}{l} 30x - 20y - 40 \\ \\ \end{array}\right.$ donc $\vec{\nabla} f(B) = \begin{pmatrix}\cdots\\-186\end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{90}\vec{\nabla} f(B) \simeq \begin{pmatrix}\cdots\\\cdots\end{pmatrix}$

Exercice n° 1 : Tu vas étudier cette courbe de niveau $\big(f(x,y)=239\big)$ représentée ci-dessous :



1 Détermines, les deux points A et B d'ordonnées -2.

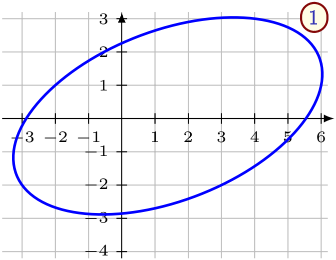
$$f(x,-2) = \mathbf{15x^2 + 40x + 37(-2)^2 - 40x - 44}$$
$$= \mathbf{15x^2 + 104}$$

Donc, $f(x,-2)=239 \iff \mathbf{15x^2 = 239 - 104 = 135}$
$\iff \boldsymbol{x = -3}$ **ou** $\boldsymbol{x = 3}$

Donc, $A\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

2 $\vec{\nabla} f(x,y) = \left| \begin{array}{l} 30x - 20y - 40 \\ -20x + 74y + 22 \end{array} \right.$ donc $\vec{\nabla} f(B) = \begin{pmatrix}\dots\\-186\end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{90}\vec{\nabla} f(B) \simeq \begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$

Exercice n° 1 : Tu vas étudier cette courbe de niveau $\big(f(x,y) = 239\big)$ représentée ci-dessous :



1. Détermines, les deux points A et B d'ordonnées -2.

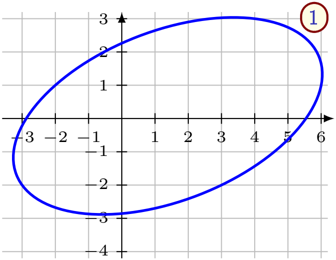
$$f(x,-2) = \mathbf{15x^2 + 40x + 37(-2)^2 - 40x - 44}$$
$$= \mathbf{15x^2 + 104}$$

Donc, $f(x,-2) = 239 \iff \mathbf{15x^2 = 239 - 104 = 135}$
$\iff \boldsymbol{x = -3}$ **ou** $\boldsymbol{x = 3}$

Donc, $A\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \left| \begin{array}{l} 30x - 20y - 40 \\ -20x + 74y + 22 \end{array}\right.$ donc $\overrightarrow{\nabla} f(B) = \begin{pmatrix}90\\-186\end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{90}\overrightarrow{\nabla} f(B) \simeq \begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$

Exercice n° 1 : Tu vas étudier cette courbe de niveau $\big(f(x,y) = 239\big)$ représentée ci-dessous :



1 Détermines, les deux points A et B d'ordonnées -2.

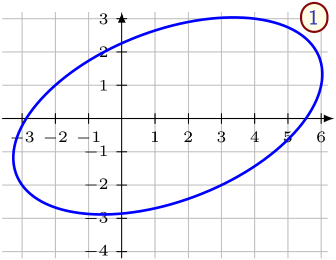
$$f(x,-2) = \mathbf{15x^2 + 40x + 37(-2)^2 - 40x - 44}$$
$$= \mathbf{15x^2 + 104}$$

Donc, $f(x,-2) = 239 \iff \mathbf{15x^2 = 239 - 104 = 135}$
$\iff \boldsymbol{x = -3}$ **ou** $\boldsymbol{x = 3}$

Donc, $A\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

2 $\vec{\nabla} f(x,y) = \left| \begin{array}{l} 30x - 20y - 40 \\ -20x + 74y + 22 \end{array} \right.$ donc $\vec{\nabla} f(B) = \begin{pmatrix} 90 \\ -186 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{90}\vec{\nabla} f(B) \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \end{pmatrix}$

Exercice n° 1 : Tu vas étudier cette courbe de niveau $\big(f(x,y)=239\big)$ représentée ci-dessous :



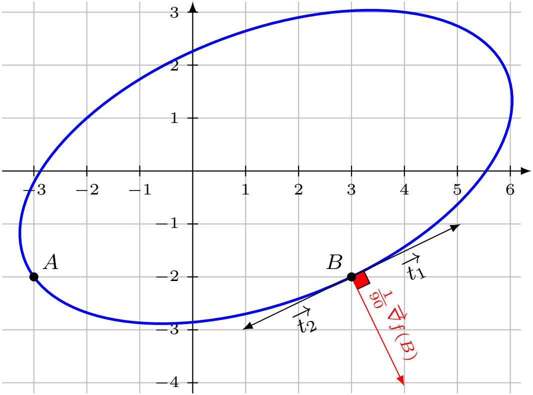
1 Détermines, les deux points A et B d'ordonnées -2.

$$f(x,-2) = \mathbf{15x^2+40x+37(-2)^2-40x-44}$$
$$= \mathbf{15x^2+104}$$

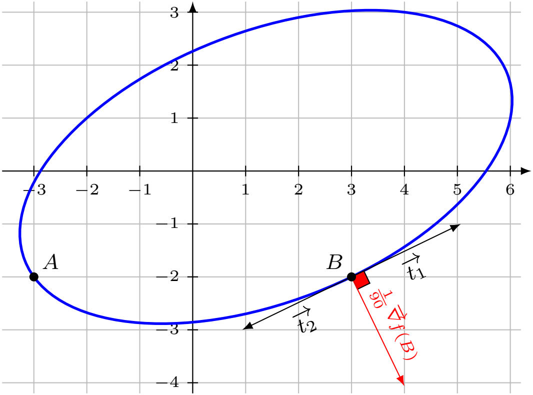
Donc, $f(x,-2)=239 \iff \mathbf{15x^2 = 239-104 = 135}$
$\iff \boldsymbol{x=-3}$ **ou** $\boldsymbol{x=3}$

Donc, $A\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

2 $\vec{\nabla} f(x,y) = \left|\begin{array}{l} 30x-20y-40 \\ -20x+74y+22\end{array}\right.$ donc $\vec{\nabla} f(B) = \begin{pmatrix}90\\-186\end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{90}\vec{\nabla} f(B) \simeq \begin{pmatrix}1\\-2,1\end{pmatrix}$

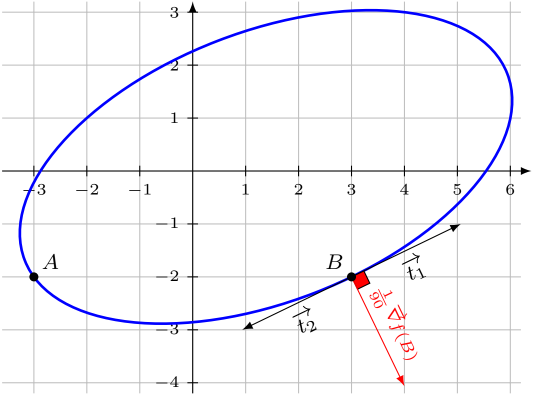


2 $\overrightarrow{\nabla}f(x,y) = \left| \begin{array}{l} 30x - 20y - 40 \\ -20x + 74y + 22 \end{array} \right.$ donc $\overrightarrow{\nabla}f(B) = \begin{pmatrix} 90 \\ -186 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{90}\overrightarrow{\nabla}f(B) \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -2,1 \end{pmatrix}$



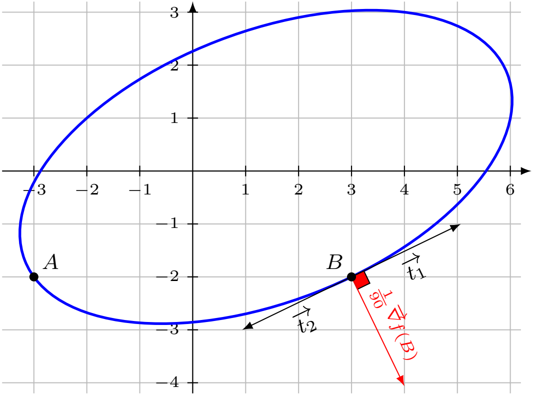
2 $\overrightarrow{\nabla}f(x,y) = \left| \begin{array}{l} 30x - 20y - 40 \\ -20x + 74y + 22 \end{array} \right.$ donc $\overrightarrow{\nabla}f(B) = \begin{pmatrix} 90 \\ -186 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{90}\overrightarrow{\nabla}f(B) \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -2,1 \end{pmatrix}$

3 Un vecteur $\overrightarrow{t}$ tangent en B a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2,1 \\ \dots \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$



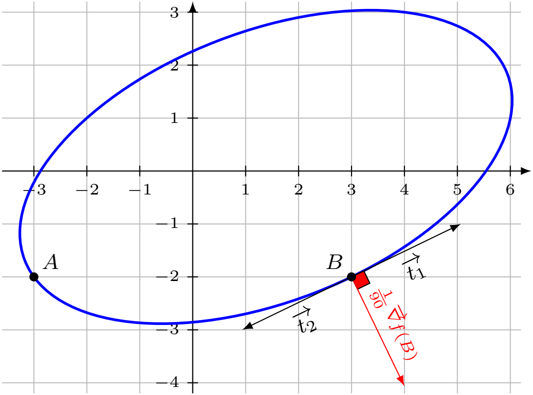
(2) $\overrightarrow{\nabla}f(x,y) = \left| \begin{array}{l} 30x - 20y - 40 \\ -20x + 74y + 22 \end{array} \right.$ donc $\overrightarrow{\nabla}f(B) = \begin{pmatrix} 90 \\ -186 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{90}\overrightarrow{\nabla}f(B) \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -2,1 \end{pmatrix}$

(3) Un vecteur $\overrightarrow{t}$ tangent en B a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2,1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$



(2) $\overrightarrow{\nabla}f(x,y) = \left| \begin{array}{l} 30x - 20y - 40 \\ -20x + 74y + 22 \end{array} \right.$ donc $\overrightarrow{\nabla}f(B) = \begin{pmatrix} 90 \\ -186 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{90}\overrightarrow{\nabla}f(B) \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -2,1 \end{pmatrix}$

(3) Un vecteur $\overrightarrow{t}$ tangent en B a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2,1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -2,1 \\ \dots \end{pmatrix}$



(2) $\overrightarrow{\nabla}f(x,y) = \left| \begin{array}{l} 30x - 20y - 40 \\ -20x + 74y + 22 \end{array} \right.$ donc $\overrightarrow{\nabla}f(B) = \begin{pmatrix} 90 \\ -186 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{90}\overrightarrow{\nabla}f(B) \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -2,1 \end{pmatrix}$

(3) Un vecteur $\overrightarrow{t}$ tangent en B a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2,1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -2,1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2 $\vec{\nabla} f(x,y) = \left| \begin{array}{l} 30x - 20y - 40 \\ -20x + 74y + 22 \end{array} \right.$ donc $\vec{\nabla} f(B) = \begin{pmatrix} 90 \\ -186 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{90} \vec{\nabla} f(B) \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -2,1 \end{pmatrix}$

3 Un vecteur $\vec{t}$ tangent en B a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2,1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -2,1 \\ -1 \end{pmatrix}$

car $\begin{pmatrix} 2,1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2,1 \end{pmatrix} = \dots$ et $\begin{pmatrix} -2,1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2,1 \end{pmatrix} = \dots$

2 $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \left| \begin{array}{l} 30x - 20y - 40 \\ -20x + 74y + 22 \end{array} \right.$ donc $\overrightarrow{\nabla} f(B) = \begin{pmatrix} 90 \\ -186 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{90} \overrightarrow{\nabla} f(B) \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -2,1 \end{pmatrix}$

3 Un vecteur $\overrightarrow{t}$ tangent en B a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2,1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -2,1 \\ -1 \end{pmatrix}$

car $\begin{pmatrix} 2,1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2,1 \end{pmatrix} = 0$ et $\begin{pmatrix} -2,1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2,1 \end{pmatrix} = \dots$

2 $\vec{\nabla} f(x,y) = \left| \begin{array}{l} 30x - 20y - 40 \\ -20x + 74y + 22 \end{array} \right.$ donc $\vec{\nabla} f(B) = \begin{pmatrix} 90 \\ -186 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{90} \vec{\nabla} f(B) \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -2,1 \end{pmatrix}$

3 Un vecteur $\vec{t}$ tangent en B a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2,1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -2,1 \\ -1 \end{pmatrix}$

car $\begin{pmatrix} 2,1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2,1 \end{pmatrix} = 0$ et $\begin{pmatrix} -2,1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2,1 \end{pmatrix} = 0$

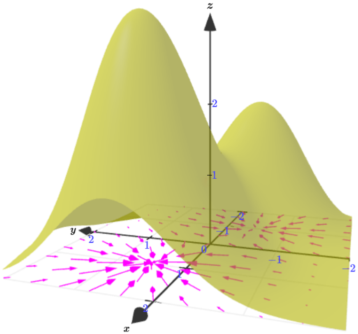
2. Lignes de plus forte pente

Considérons les lignes de niveau $f(x, y) = k$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On se place en un point (x_0, y_0). On cherche dans quelle direction se déplacer pour augmenter au plus vite la valeur de f.

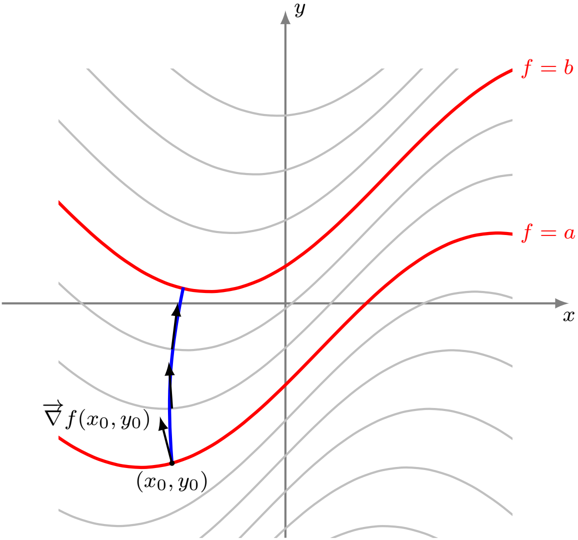
Propriété:

Le vecteur gradient $\mathrm{grad} f(x_0, y_0)$ indique la direction de plus grande pente à partir du point (x_0, y_0).

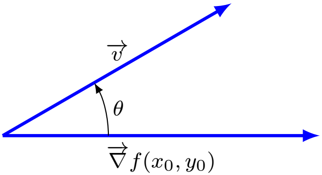
Autrement dit, si l'on veut, à partir d'un point donné (x_0, y_0) de niveau a, passer au niveau $b > a$ le plus vite possible, alors il faut démarrer en suivant la direction du gradient $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$.



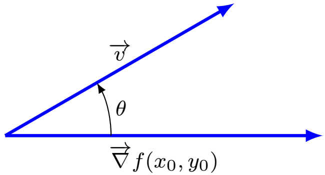
Lancer l'application.


y
$f = b$
$f = a$
x
$\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$
(x_0, y_0)

Considérons un vecteur $\overrightarrow{v}$ de norme 1 faisant un angle θ avec le vecteur gradient en (x_0, y_0)

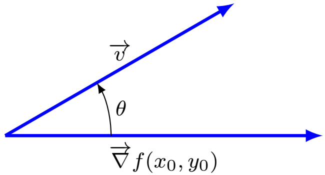


Considérons un vecteur $\overrightarrow{v}$ de norme 1 faisant un angle θ avec le vecteur gradient en (x_0, y_0)



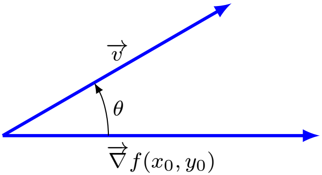
$$D_{\overrightarrow{v}} f(x_0, y_0) = \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{v} =$$

Considérons un vecteur $\overrightarrow{v}$ de norme 1 faisant un angle θ avec le vecteur gradient en (x_0, y_0)



$$D_{\overrightarrow{v}} f(x_0, y_0) = \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{v} = \left\| \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \right\| \times \|v\| \times \cos(\theta)$$

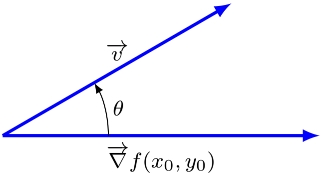
Considérons un vecteur $\overrightarrow{v}$ de norme 1 faisant un angle θ avec le vecteur gradient en (x_0, y_0)



$$D_{\overrightarrow{v}} f(x_0, y_0) = \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{v} = \left\| \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \right\| \times \|v\| \times \cos(\theta)$$

$$= \left\| \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \right\| \cos(\theta)$$

Considérons un vecteur $\overrightarrow{v}$ de norme 1 faisant un angle θ avec le vecteur gradient en (x_0, y_0)



$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{v}} f(x_0, y_0) &= \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)\right\| \times \|v\| \times \cos(\theta) \\ &= \left\|\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)\right\| \cos(\theta) \end{aligned}$$

Donc, la pente $D_{\overrightarrow{v}} f(x_0, y_0)$ est maximale quand $\theta = 0$, donc dans la direction du vecteur gradient.

Exercice n° 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$.

1. Quelle est la cote du point A d'abscisse 4 et d'ordonnée 1.

   ....

2. Détermine la différentielle de f.

   ....

3. Détermine la différentielle de f en $(4,1)$.

   ....

4. Détermine un vecteur de norme 1 qui indique la pente maximale en $(4,1)$.

   ....

   ....

5. A quelle courbe ce vecteur est-il orthogonal ?

   ....

Exercice nº 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$.

1. Quelle est la cote du point A d'abscisse 4 et d'ordonnée 1.

   $f(4,1) = 37$

2. Détermine la différentielle de f.

   ....

3. Détermine la différentielle de f en $(4,1)$.

   ....

4. Détermine un vecteur de norme 1 qui indique la pente maximale en $(4,1)$.

   ....

   ....

5. A quelle courbe ce vecteur est-il orthogonal ?

   ....

Exercice n° 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$.

1. Quelle est la cote du point A d'abscisse 4 et d'ordonnée 1.

   $f(4,1) = 37$

2. Détermine la différentielle de f.

   $\mathrm{d}f(x,y) = \left(6x^2 + y^2 + 6x - 36\right)\mathrm{d}x + \left(2xy + 2y\right)\mathrm{d}y$

3. Détermine la différentielle de f en $(4,1)$.

   ....

4. Détermine un vecteur de norme 1 qui indique la pente maximale en $(4,1)$.

   ....

   ....

5. A quelle courbe ce vecteur est-il orthogonal ?

   ....

Exercice n° 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=2x^3+xy^2+3x^2+y^2-36x$.

1. Quelle est la cote du point A d'abscisse 4 et d'ordonnée 1.

   $f(4,1)=37$

2. Détermine la différentielle de f.

   $\mathrm{d}f(x,y)=\left(6x^2+y^2+6x-36\right)\mathrm{d}x+\left(2xy+2y\right)\mathrm{d}y$

3. Détermine la différentielle de f en $(4,1)$.

   $\mathrm{d}f(4,1)=85\,\mathrm{d}x+10\,\mathrm{d}y$

4. Détermine un vecteur de norme 1 qui indique la pente maximale en $(4,1)$.

   ....

   ....

5. A quelle courbe ce vecteur est-il orthogonal ?

   ....

Exercice n° 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$.

1. Quelle est la cote du point A d'abscisse 4 et d'ordonnée 1.

   $f(4,1) = 37$

2. Détermine la différentielle de f.

   $\mathrm{d}f(x,y) = \left(6x^2 + y^2 + 6x - 36\right)\mathrm{d}x + \left(2xy + 2y\right)\mathrm{d}y$

3. Détermine la différentielle de f en $(4,1)$.

   $\mathrm{d}f(4,1) = 85\,\mathrm{d}x + 10\,\mathrm{d}y$

4. Détermine un vecteur de norme 1 qui indique la pente maximale en $(4,1)$.

   La pente maximale est donnée par le gradient $\vec{\nabla} f(4,1) = \begin{pmatrix} 85 \\ 10 \end{pmatrix}$.

   . . . .

5. A quelle courbe ce vecteur est-il orthogonal ?

   . . . .

Exercice n° 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$.

1. Quelle est la cote du point A d'abscisse 4 et d'ordonnée 1.

   $f(4,1) = 37$

2. Détermine la différentielle de f.

   $\mathrm{d}f(x,y) = \left(6x^2 + y^2 + 6x - 36\right)\mathrm{d}x + \left(2xy + 2y\right)\mathrm{d}y$

3. Détermine la différentielle de f en $(4,1)$.

   $\mathrm{d}f(4,1) = 85\,\mathrm{d}x + 10\,\mathrm{d}y$

4. Détermine un vecteur de norme 1 qui indique la pente maximale en $(4,1)$.

   La pente maximale est donnée par le gradient $\overrightarrow{\nabla} f(4,1) = \begin{pmatrix} 85 \\ 10 \end{pmatrix}$.

   $\left\|\overrightarrow{\nabla} f(4,1)\right\| = \sqrt{85^2 + 10^2} = \sqrt{7325}$. Le vecteur demandé est $\frac{1}{\sqrt{7325}}\begin{pmatrix} 85 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{293}}\begin{pmatrix} 17 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. A quelle courbe ce vecteur est-il orthogonal ?

   ....

Exercice n° 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$.

1. Quelle est la cote du point A d'abscisse 4 et d'ordonnée 1.

   $f(4,1) = 37$

2. Détermine la différentielle de f.

   $$\mathrm{d}f(x,y) = \left(6x^2 + y^2 + 6x - 36\right)\mathrm{d}x + \left(2xy + 2y\right)\mathrm{d}y$$

3. Détermine la différentielle de f en $(4,1)$.

   $\mathrm{d}f(4,1) = 85\,\mathrm{d}x + 10\,\mathrm{d}y$

4. Détermine un vecteur de norme 1 qui indique la pente maximale en $(4,1)$.

   La pente maximale est donnée par le gradient $\overrightarrow{\nabla} f(4,1) = \begin{pmatrix} 85 \\ 10 \end{pmatrix}$.

   $\left\|\overrightarrow{\nabla} f(4,1)\right\| = \sqrt{85^2 + 10^2} = \sqrt{7325}$. Le vecteur demandé est $\dfrac{1}{\sqrt{7325}}\begin{pmatrix} 85 \\ 10 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{293}}\begin{pmatrix} 17 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. A quelle courbe ce vecteur est-il orthogonal ?

   A la ligne de niveau $z = 37$.

Sur cette figure on a dessiner les vecteurs gradients normés (de norme 1) sur la courbe de niveau $z = 37$.

Ces vecteurs indiquent la direction dans laquelle la fonction f croît le plus rapidement.