Exercice n° 1 : Pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$

2) $g(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

3) $h(x,y) = x^2y - 4y$

4) $i(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$

5) $j(x,y) = x^2y^2 + 4x^2y + 3x^2 - 4y^2 - 16y - 12$

1. Détermine son gradient.
2. Détermine ses points critiques.
3. Détermine la nature de chacun de ses points critiques.

1) $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$;

$\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$. On trouve un seul point critique : $P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On calcule la matrice hessienne : $\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

La forme quadratique associée est $q(x,y) = 2x^2 + 4y^2$.

- sa signature : $(2,0)$ car il y a deux carrés, tous deux précédés d'un coefficient positif.
- son rang est 2 (le nombre total de carrés).

Le point P est un minimum.

2) $g(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.

$\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2-6y \\ -6x+6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y = x \end{cases} \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = x \end{cases}$

On trouve deux points critiques $P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Q\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On calcule la matrice hessienne : $\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$.

- <u>Etude du point P :</u> $\nabla^2(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$.

  La forme quadratique associée est $q(x,y) = -12xy + 6y^2$.

  Sa décomposition de Gauss : $q(x,y) = 6(y^2 - 2xy) = 6[(y-x)^2 - x^2] = 6(y-x)^2 - 6x^2$

  - sa signature : $(1,1)$ car il y a un carré positif et un carré négatif.
  - son rang est 2 (le nombre total de carrés).

  P est un point selle.

- <u>Etude du point Q :</u> $\nabla^2(g)(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$.

  La forme quadratique associée est $q(x,y) = 12x^2 - 12xy + 6y^2$.

  Sa décomposition de Gauss :

$$q(x,y) = 12\left(x^2 - xy\right) + 6y^2 = 12\left[\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2\right] + 6y^2$$
$$= 12\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 - 3y^2 + 6y^2 = 12\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + 3y^2$$

- sa signature : $(2,0)$ car il y a deux carrés, tous deux précédés d'un coefficient positif.
- son rang est 2 (le nombre total de carrés).

Le point Q est un minimum.

3 $h(x,y) = x^2y - 4y$.

$$\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ x = -2 \text{ ou } x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

On trouve deux points critiques $P\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Q\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

On calcule la matrice hessienne : $\nabla^2(h)(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$.

- Etude du point P : $\nabla^2(h)(-2,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

  La forme quadratique associée est $q(x,y) = -8xy$.

  Sa décomposition de Gauss : $q(x,y) = -8 \times \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right] = -2(x+y)^2 + 2(x-y)^2$

  - sa signature : $(1,1)$ car il y a un carré positif et un carré négatif.
  - son rang est 2 (la forme est non dégénérée).

  P est un point selle.

- Etude du point Q : $\nabla^2(h)(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

  La forme quadratique associée est $q(xy) = 8xy$.

  Sa décomposition de Gauss : $q(x,y) = 2(x+y)^2 - 2(x-y)^2$

  - sa signature : $(1,1)$ car il y a un carré positif et un carré négatif.
  - son rang est 2 (la forme est non dégénérée).

  Q est un point selle.

4 $i(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

$$\nabla(i)(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3(y^2+1) \\ -6xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x^2 = y^2 + 1 \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$$

- Si $x = 0$ alors $y^2 + 1 = 0$ ce qui est impossible.
- Si $y = 0$ alors $x^2 = 1$ soit $x = -1$ ou $x = 1$

On trouve deux points critiques $P\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Q\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On calcule la matrice hessienne : $\nabla^2(i)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix}$.

- Etude du point P : $\nabla^2(i)(-1,0) = 6\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  La forme quadratique associée est $q(xy) = -6x^2 + 6y^2$.

  - sa signature : $(1,1)$ car il y a un carré positif et un carré négatif.
  - son rang est 2 (la forme est non dégénérée).

  P est un point selle.

- Etude du point Q : $\nabla^2(i)(1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.

  La forme quadratique associée est $q(xy) = 6x^2 - 6y^2$.

  Le point $Q\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas un extremum local, c'est un point-selle.

5 $j(x) = x^2y^2 + 4x^2y + 3x^2 - 4y^2 - 16y - 12$

$\dfrac{\partial j}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 + 8xy + 6x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y + 4x^2 - 8y - 16$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial j}{\partial x}(x,y) = 0 \iff 2x(y^2+4y+3) = 0 &\iff x = 0 \text{ ou } y^2 + 4y + 3 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } y = -1 \text{ ou } y = -3 \end{aligned}$$

- **Si $x = 0$:** $\dfrac{\partial j}{\partial y}(0,y) = -8y - 16 = 0$ soit $y = -2$
- **Si $y = -1$:** $\dfrac{\partial j}{\partial y}(x,-1) = 2x^2 - 8 = 0 \iff x = -2$ ou $x = 2$
- **Si $y = -3$:** $\dfrac{\partial j}{\partial y}(x,-3) = -2x^2 + 8 = 0 \iff x = -2$ ou $x = 2$

On obtient 5 points critiques : $A\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $E\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

La hessienne de j est $\nabla^2(j)(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 + 8y + 6 & 4xy + 8x \\ 4xy + 8x & 2x^2 - 8 \end{pmatrix}$

- Etude en A : $\nabla^2(j)(0,-2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

  La forme quadratique associée est $q_A(x,y) = -2x^2 - 8y^2$

  Sa signature est $(0,2)$, donc A est un maximum local.

- Etude en B : $\nabla^2(f)(-2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$.

  Sa forme quadratique est $q_B(x,y) = -16xy = -16 \times \dfrac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right] = -4(x+y)^2 + 4(x-y)^2$

  Sa signature est $(1,1)$, donc B est se un point selle.

- Etude en C : $\nabla^2(f)(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

  Sa forme quadratique est $q_C(x,y) = 16xy = 4(x+y)^2 - 4(x-y)^2$

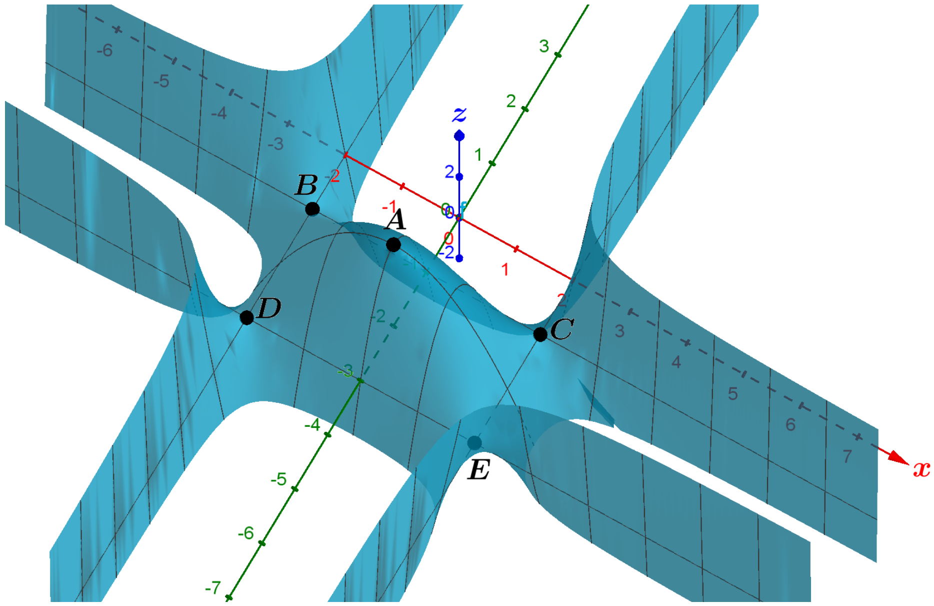
  Sa signature est $(1,1)$, donc C est se un point selle.

- Etude en D : $\nabla^2(f)(-2,-3) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

  Sa signature est $(1,1)$, donc D est se un point selle.

- Etude en E : $\nabla^2(f)(2,-3) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$

  Sa signature est $(1,1)$, donc E est se un point selle.



Exercice n° 2 : Etudie la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = y^4 + x^2 - 2y^2 + z^2 + 4x + 5$.

1. Détermine le gradient de f.

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+4 \\ 4y^3 - 4y \\ 2z \end{pmatrix}$$

2. Déduis-en les points critiques de f.

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} 2x+4=0 \\ 4y^3-4y=0 \\ 2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2 \\ y(y^2-1)=0 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \text{ ou } y=-1 \text{ ou } y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$f(-2,0,0) = 1$, $f(-2,-1,0) = 0$, et $f(-2,1,0) = 0$

f a trois points critiques : $A\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $C\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La Hessienne de f est $\nabla^2(j)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12y^2-4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. Détermine la nature des points critiques de f.

- Etude du point A : $\nabla^2(j)(-2,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{mat}\big(\mathrm{d}^2 f(-2,0)\big)$

Sa forme quadratique est $q_A(x,y,z) = 2x^2 - 4y^2 + 2z^2$. Sa signature est $(2,1)$.
Le point A est un point selle.

Remarque : $q_A(a,b,c) = \mathrm{d}^2 f(-2,0)\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = 2a^2 - 4b^2 + 2c^2$.

- Etude du point B : $\nabla^2(j)(-2,-1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

  Sa forme quadratique est $q_B(x,y,z) = 2x^2 + 8y^2 + 2z^2$. Sa signature est $(3,0)$.
  Le point B est un minimum.

- Etude du point C : $\nabla^2(j)(-2,1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

  On vient de voir que sa signature est $(3,0)$. Le point C est un minimum.

Exercice n° 3 : On considère $f(x,y,z) = z^4 + x^2 + 2y^2 - 7z^2 - 2xy - 2yz + 2x - 2y$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calcul $\nabla^2(f)$.

   $\nabla(f) = \begin{pmatrix} 2x - 2y + 2 \\ -2x + 4y - 2z - 2 \\ 4z^3 - 2y - 14z \end{pmatrix}$ d'où $\nabla^2(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 12z^2 - 14 \end{pmatrix}$

2. Détermine la nature du point critique $A(1,2,2,-17)$.

   $\nabla^2(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 34 \end{pmatrix}$. La forme quadratique $\mathrm{d}^2 f(1,2,2)$ est :

$$\begin{aligned} Q(a,b,c) &= 2a^2 - 4ab + 4b^2 - 4bc + 34c^2 = 2\big(a^2 - 2ab + 2b^2\big) - 4bc + 34c^2 \\ &= 2\big[(a-b)^2 - b^2 + 2b^2\big] - 4bc + 34c^2 = 2(a-b)^2 + \underbrace{2b^2 - 4bc + 34c^2}_{R(a,b,c)} \end{aligned}$$

$$R(a,b,c) = 2\big(b^2 - 2bc + 17c^2\big) = 2\big[(b-c)^2 - c^2 + 17c^2\big] = 2(b-c)^2 + 32c^2$$

$Q(a,b,c) = 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2 + 32c^2$. Sa signature est $(3,0)$, le point A est un minimum.

Exercice n° 4 : Détermine l'aire maximal d'un rectangle de périmètre 20.

On cherche le maximum de $f(x,y) = xy$ avec la contrainte $2x + 2y = 20$ soit $p(x,y) = 2x + 2y - 20 = 0$.

On a le lagrangien : $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy - \lambda(2x + 2y - 20)$

1. **Résolution du système :** $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - \lambda = 0 \implies \mathbf{y} = \lambda \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - \lambda = 0 \implies \mathbf{x} = \lambda \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(2x + 2y - 20) = 0 \implies x + y = 10 \end{cases}$

   On $x = y = \lambda$ donc la contrainte donne $2x = 10$ soit $x = y = 5$.

2. **Calcul des dérivées secondes :** $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda p(x) = xy - \lambda(2x + 2y - 20)$

   - $\dfrac{\partial L}{\partial x} = y - \lambda$
   - $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0$
   - $\dfrac{\partial L}{\partial y} = x - \lambda$
   - $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$
   - $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 1$
   - $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1$
   - $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 2$
   - $\dfrac{\partial p}{\partial y} = 2$

3. La Hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   $\det \overline{H} = 8$ donc le carré de côté 5 réalise le maximum.

Exercice n° 5 : Trouve les extrema de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $x + 2y = 5$.
On a le lagrangien $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (x^2+y^2) - \lambda(x+2y-5)$

1. **Résolution du système :** $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - \lambda = 0 \implies \mathbf{x} = \frac{\lambda}{\mathbf{2}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - 2\lambda = 0 \implies \mathbf{y} = \lambda \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x+2y-5) = 0 \implies x + 2y = 5 \end{cases}$

   On remplace x et y par leurs expressions en fonction de λ dans l'équation de la contrainte :

$$\left(\tfrac{\lambda}{2}\right) + 2(\lambda) = 5$$
$$\tfrac{\lambda}{2} + \tfrac{4\lambda}{2} = 5$$
$$\tfrac{5\lambda}{2} = 5 \implies \lambda = \mathbf{2}$$

   En remplaçant $\lambda = 2$ dans les expressions de x et y : $x = 1$ et $y = 2$.

2. **Calcul des dérivées secondes :** $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = (x^2+y^2) - \lambda(\underbrace{x+2y-5}_{g(x,y)})$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2\lambda$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 0$
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 1$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 2$

3. La Hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Calculons le déterminant de $\overline{H}$ en développant suivant la première ligne :

$$|\overline{H}| = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

   Le point $(1,2)$ est un minimum local pour la fonction f sous la contrainte $g = 0$.

Exercice n° 6 : Trouve les extrema de $f(x,y) = x - y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 2$.
On a le lagrangien $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x - y - \lambda(x^2+y^2-2)$

1. **Résolution du système :** $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 - 2\lambda x = 0 \implies \mathbf{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\lambda} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -1 - 2\lambda y = 0 \implies \mathbf{y} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}\lambda} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x^2+y^2-2) = 0 \implies x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

   D'après (1), $\lambda \neq 0$, on peut donc écrire $x = \dfrac{1}{2\lambda}$ et $y = -\dfrac{1}{2\lambda}$. On injecte ces expressions dans la contrainte :

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 2$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 2 \implies \frac{2}{4\lambda^2} = 2 \implies \frac{1}{2\lambda^2} = 2$$

$$4\lambda^2 = 1 \implies \lambda^2 = \frac{1}{4} \implies \lambda = \pm\mathbf{\frac{1}{2}}$$

- Si $\lambda = \frac{1}{2}$ alors $x = 1$, $y = -1$, et $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Si $\lambda = -\frac{1}{2}$ alors $x = -1$, $y = 1$, et $B\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. **Calcul des dérivées secondes :** $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x) = x - y - \lambda(x^2 + y^2 - 2)$

   - $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\lambda x$
   - $\dfrac{\partial L}{\partial y} = -1 - 2\lambda y$
   - $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 0$
   - $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x$
   - $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -2\lambda$
   - $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda$
   - $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$
   - $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 2y$

3. La Hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$.

   Calculons le déterminant de $\overline{H}$ en développant suivant la première colonne :

$$\left|\overline{H}\right| = -2x \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 0 & -2\lambda \end{vmatrix} + 2y \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -2\lambda & 0 \end{vmatrix} = 8\lambda x^2 + 8\lambda y^2 = 8\lambda(x^2 + y^2)$$

4. Etude des points critiques :

   - Pour le point $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ on a $\lambda = \frac{1}{2}$, $\left|\overline{H}\right| = 8 \times \frac{1}{2}\left(1^2 + (-1)^2\right) = 8$. A est un maximum.
   - Pour le point $B\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\left|\overline{H}\right| = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\left((-1)^2 + 1^2\right) = -8$. B est un minimum.