Différentielles

Fiche n° 1 - partie 2

II. Différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si toute courbe suffisamment lisse pour être dérivable ressemble localement à une droite, alors on va voir que toute surface assez lisse ressemble localement à un plan.

Si toute courbe suffisamment lisse pour être dérivable ressemble localement à une droite, alors on va voir que toute surface assez lisse ressemble localement à un plan. Pour ce faire, dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on va étudier la fonction :

II. Différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si toute courbe suffisamment lisse pour être dérivable ressemble localement à une droite, alors on va voir que toute surface assez lisse ressemble localement à un plan. Pour ce faire, dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on va étudier la fonction :

$$\begin{array}{rrcl} f: & [0,4]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$$

Si toute courbe suffisamment lisse pour être dérivable ressemble localement à une droite, alors on va voir que toute surface assez lisse ressemble localement à un plan. Pour ce faire, dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on va étudier la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,4]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$$

On rappelle que $(x,y) \in [0,4]^2$ signifie $x \in [0,4]$ **et** $y \in [0,4]$.

II. Différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si toute courbe suffisamment lisse pour être dérivable ressemble localement à une droite, alors on va voir que toute surface assez lisse ressemble localement à un plan. Pour ce faire, dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on va étudier la fonction :

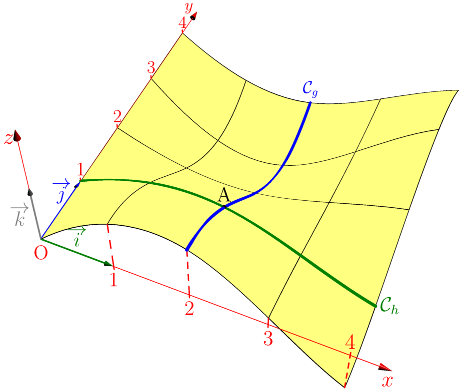
$$\begin{array}{rccc} f: & [0,4]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$$

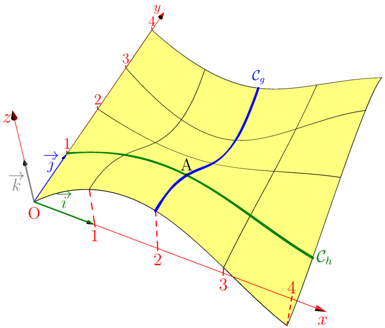
On rappelle que $(x,y) \in [0,4]^2$ signifie $x \in [0,4]$ **et** $y \in [0,4]$.
On note $\mathcal{S}_f$ la surface engendrée par f.

Si toute courbe suffisamment lisse pour être dérivable ressemble localement à une droite, alors on va voir que toute surface assez lisse ressemble localement à un plan. Pour ce faire, dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on va étudier la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} [0,4]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$$

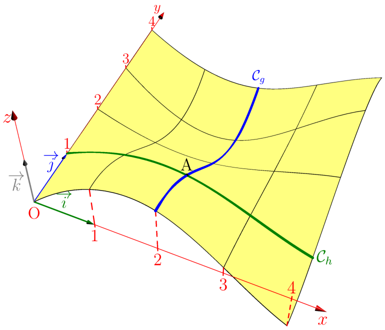
On rappelle que $(x,y) \in [0,4]^2$ signifie $x \in [0,4]$ **et** $y \in [0,4]$.
On note $\mathcal{S}_f$ la surface engendrée par f.





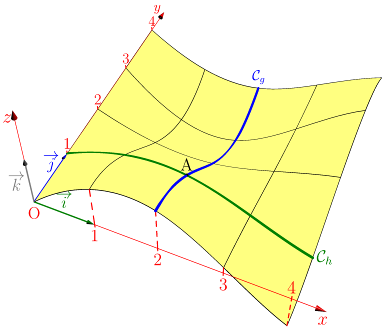
On pose $a = (2,1)$ un point du plan $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$f(a) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ à 0,1 près.



On pose $a = (2, 1)$ un point du plan $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$f(a) = \mathbf{\sin(2)\cos(1) \simeq 0,5}$ à 0,1 près.

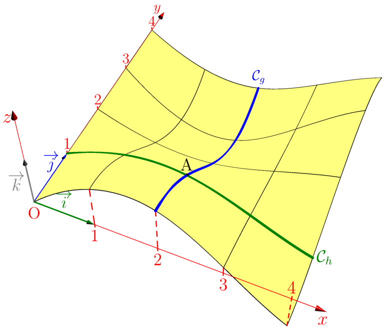


On pose $a = (2, 1)$ un point du plan $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

$f(a) = \mathbf{\sin(2)\cos(1) \simeq 0,5}$ à 0,1 près.

Le point A a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ ? \end{pmatrix} \text{ à 0,1 près,}$$

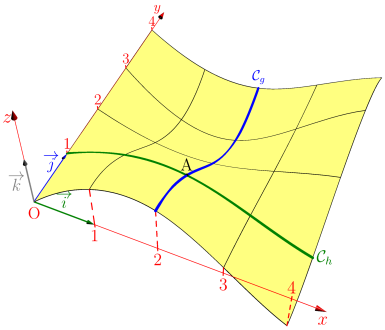


On pose $a = (2, 1)$ un point du plan $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

$f(a) = \mathbf{\sin(2)\cos(1) \simeq 0,5}$ à 0,1 près.

Le point A a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ ? \end{pmatrix} \text{ à 0,1 près,}$$



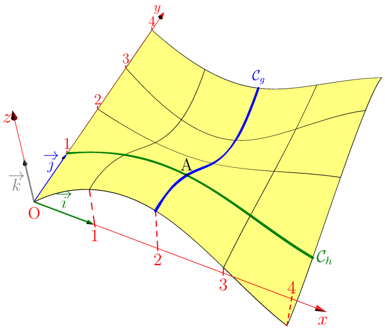
On pose $a = (2, 1)$ un point du plan $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

$f(a) = \mathbf{\sin(2)\cos(1) \simeq 0,5}$ à 0,1 près.

Le point A a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ ? \end{pmatrix}$$ à 0,1 près,

car



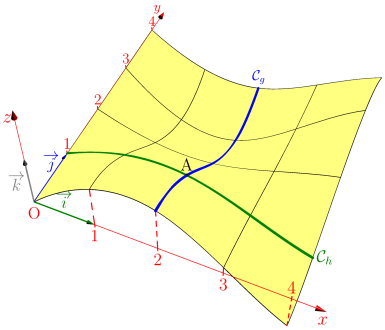
On pose $a = (2, 1)$ un point du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$f(a) = \mathbf{\sin(2)\cos(1) \simeq 0,5}$ à 0,1 près.

Le point A a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ ? \end{pmatrix} \text{ à 0,1 près,}$$

car $\boldsymbol{f(2,1) = \sin(2) \times \cos(1) \simeq}$



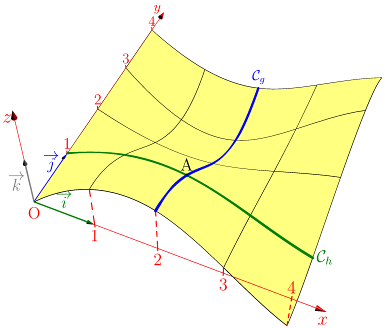
On pose $a = (2,1)$ un point du plan $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

$f(a) =$ $\mathbf{\sin(2)\cos(1) \simeq 0,5}$ à 0,1 près.

Le point A a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ ? \end{pmatrix}$$ à 0,1 près,

car $\boldsymbol{f(2,1) = \sin(2) \times \cos(1) \simeq 0,5}$



On pose $a = (2, 1)$ un point du plan $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

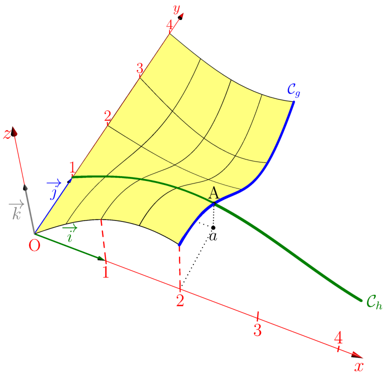
$$f(a) = \mathbf{\sin(2)\cos(1)} \simeq \mathbf{0,5} \text{ à 0,1 près.}$$

Le point A a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \mathbf{0,5} \end{pmatrix} \text{ à 0,1 près,}$$

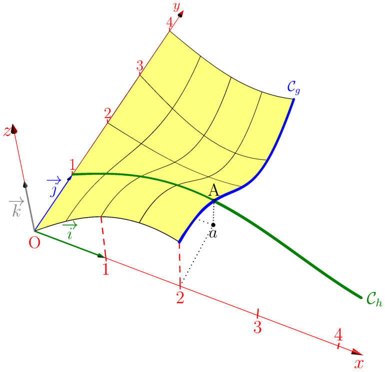
car $\boldsymbol{f(2,1) = \sin(2) \times \cos(1) \simeq 0,5}$

Etude de la courbe bleue :



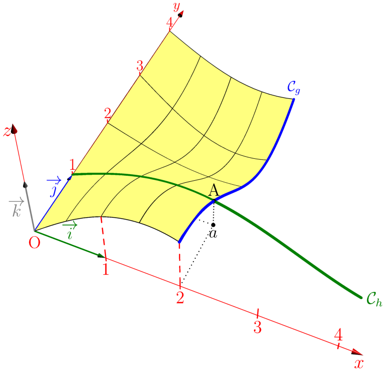
$$\begin{array}{rccl} g: & [0,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{y} & \longmapsto & \end{array}$$

Etude de la courbe bleue :

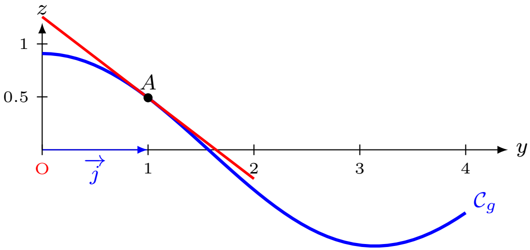


$$\begin{aligned} g :\ [0,4] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{y} &\longmapsto \boldsymbol{f(2,y) = \sin(2)\cos(y)} \end{aligned}$$

Etude de la courbe bleue :

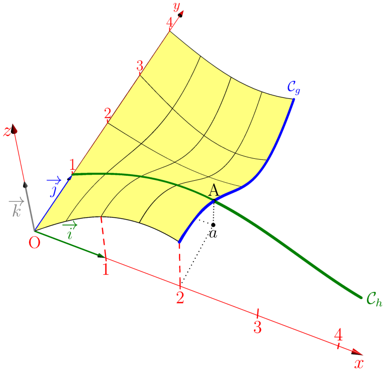


$$\begin{aligned} g\colon\ [0,4] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{y} &\longmapsto \boldsymbol{f(2,y) = \sin(2)\cos(y)} \end{aligned}$$

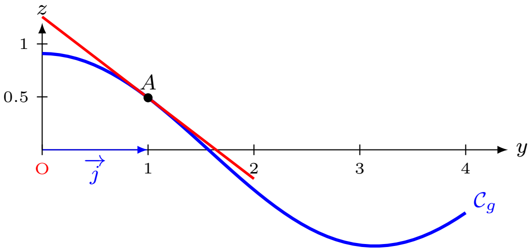


$g'(y) =$

Etude de la courbe bleue :

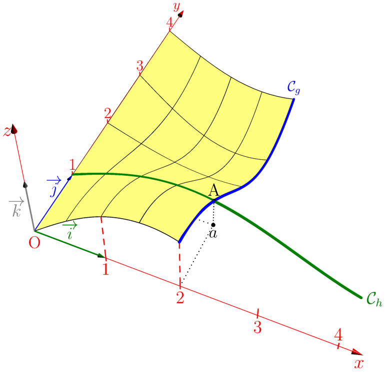


$$\begin{array}{rccl} g\colon & [0,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{y} & \longmapsto & \boldsymbol{f(2,y) = \sin(2)\cos(y)} \end{array}$$

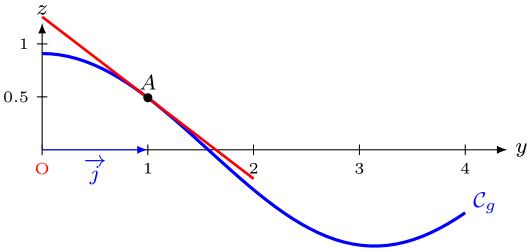


$$g'(y) = \sin(2) \times \big[-\sin(y)\big] = -\sin(2)\sin(y)$$

Etude de la courbe bleue :



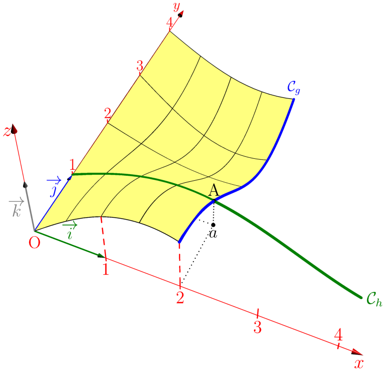
$$g : \begin{array}{ccc} [0,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{y} & \longmapsto & \boldsymbol{f(2,y) = \sin(2)\cos(y)} \end{array}$$



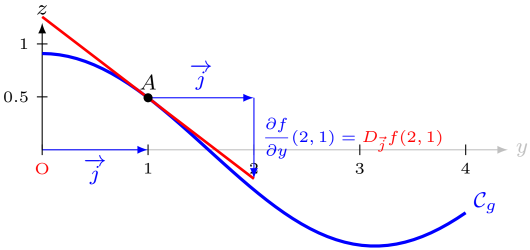
$$g'(y) = \sin(2) \times \big[-\sin(y) \big] = -\sin(2)\sin(y)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(a + h\,\vec{j}\right) - f(a)}{h} =$$

Etude de la courbe bleue :



$$g : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{y \longmapsto f(2,y) = \sin(2)\cos(y)}$$

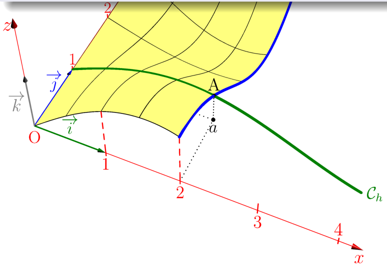


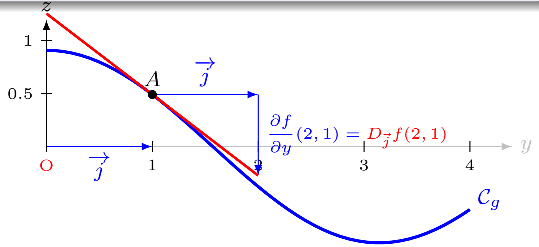
$$g'(y) = \sin(2) \times \big[-\sin(y) \big] = -\sin(2)\sin(y)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\big(a + h\vec{j}\big) - f(a)}{h} = \boldsymbol{D_{\vec{j}} f(a)}$$

Etude de la courbe bleue :

$D_{\vec{j}} f(a)$ est la dérivée directionnelle de f en $a = (2, 1)$ suivant le vecteur $\vec{j}$, on l'appelle la **dérivée partielle** de f par rapport à x, et on la note $\boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)}$.

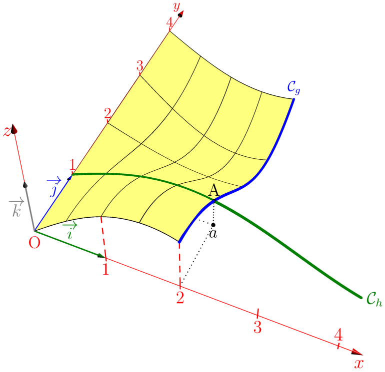




$$g'(y) = \sin(2) \times \big[-\sin(y) \big] = -\sin(2)\sin(y)$$

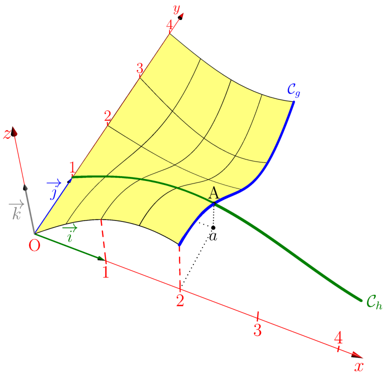
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(a + h\vec{j}\right) - f(a)}{h} = \boldsymbol{D_{\vec{j}} f(a)}$$

Etude de la courbe verte :



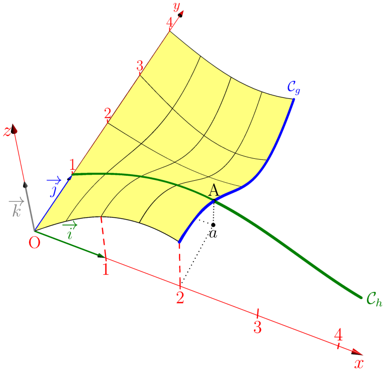
$$\begin{array}{rccl} h\colon & [0,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{x} & \longmapsto & \end{array}$$

Etude de la courbe verte :

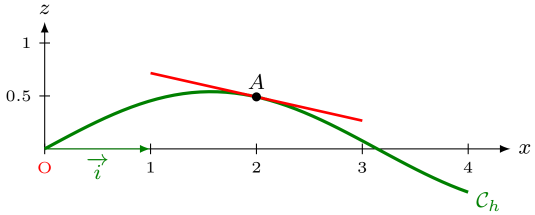


$$\begin{aligned} h\colon\ [0,4] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \boldsymbol{f(x,1) = \sin(x)\cos(1)} \end{aligned}$$

Etude de la courbe verte :

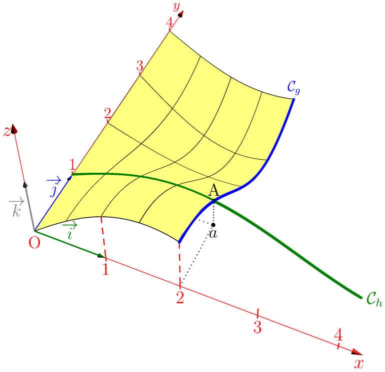


$$h: \ [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{x} \ \longmapsto \boldsymbol{f(x,1) = \sin(x)\cos(1)}$$

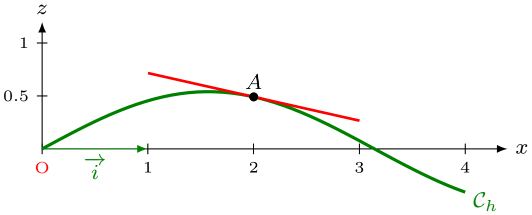


$$h'(x) =$$

Etude de la courbe verte :

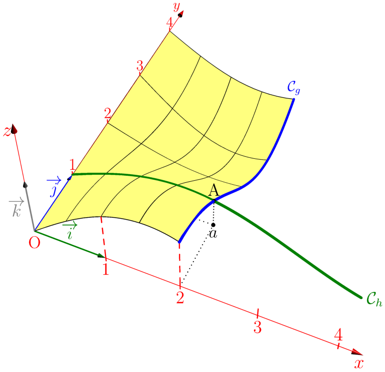


$$\begin{aligned} h:\ & [0,4] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x,1) = \sin(x)\cos(1) \end{aligned}$$

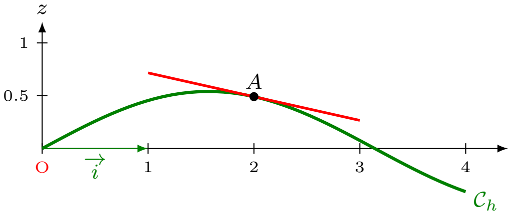


$$h'(x) = \cos(x) \times \cos(1)$$

Etude de la courbe verte :



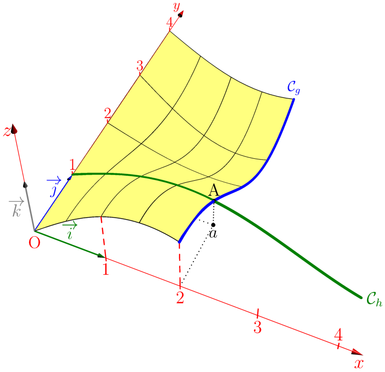
$$h : \; [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f(x,1) = \sin(x)\cos(1)}$$



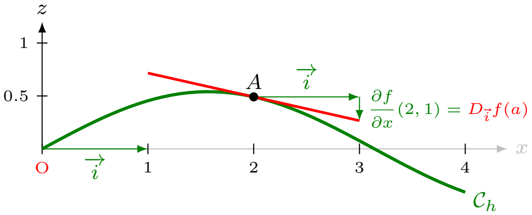
$$h'(x) = \cos(x) \times \cos(1)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(a + h\,\vec{i}\right) - f(a)}{h} =$$

Etude de la courbe verte :



$$\begin{array}{rcl} h\colon [0,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & \boldsymbol{f(x,1) = \sin(x)\cos(1)} \end{array}$$

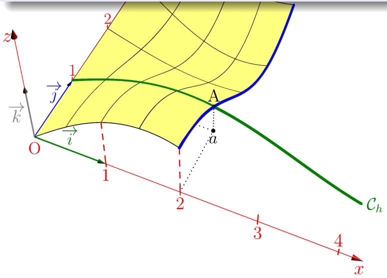


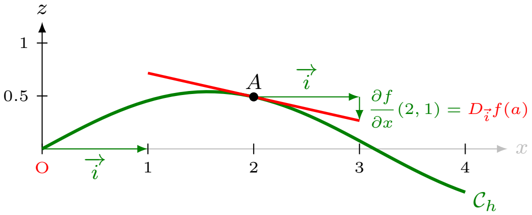
$$h'(x) = \cos(x) \times \cos(1)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(a + h\,\vec{i}\right) - f(a)}{h} = \boldsymbol{D_{\vec{i}} f(a)}$$

Etude de la courbe verte :

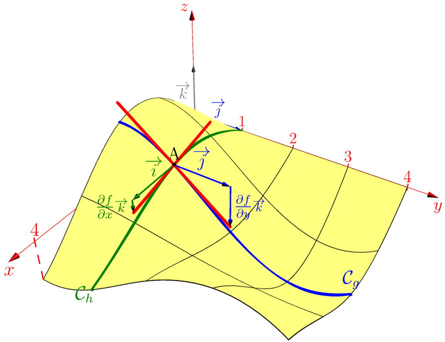
$D_{\vec{i}}f(a)$ est la dérivée directionnelle de f en $a = (2, 1)$ suivant le vecteur $\vec{i}$, on l'appelle la **dérivée partielle** de f par rapport à x, et on la note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2, 1)$.

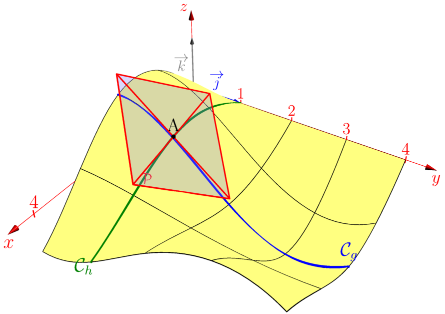




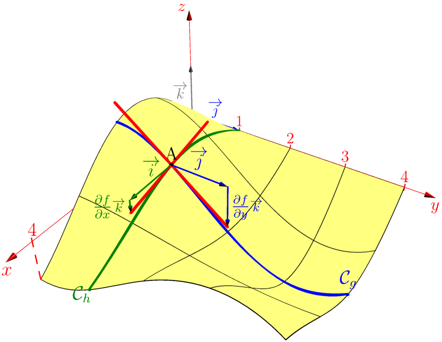
$$h'(x) = \cos(x) \times \cos(1)$$

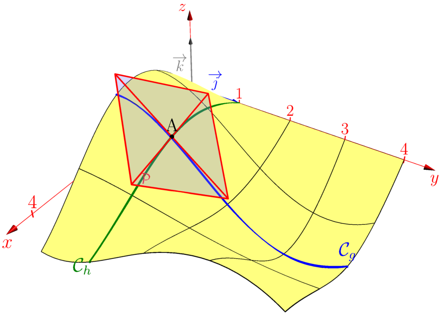
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(a + h\,\vec{i}\right) - f(a)}{h} = D_{\vec{i}}f(a)$$





Les deux tangentes se coupant en A forment un plan $\mathcal{P}$.





Les deux tangentes se coupant en A forment un plan $\mathcal{P}$.

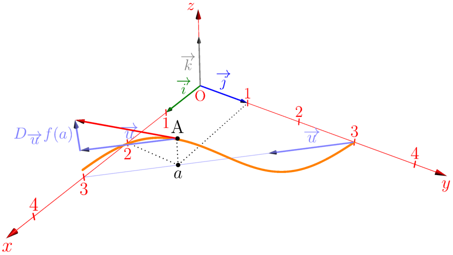
Dérivée directionnelle

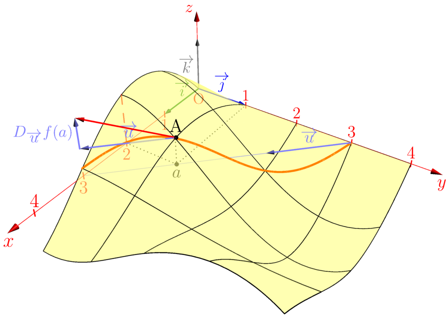
Soient $\overrightarrow{u}$ et a un vecteur et un point appartenant au plan $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit f une fonction définie sur un voisinage de a à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si la limite $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\overrightarrow{u}) - f(a)}{h}$ existe et est finie, alors on dit que la fonction f est dérivable dans la direction $\overrightarrow{u}$, et sa limite est appelée la **dérivée directionnelle** de f en a suivant le vecteur $\overrightarrow{u}$, et notée $\boldsymbol{D_{\vec{u}}f(a)}$.

Attention !

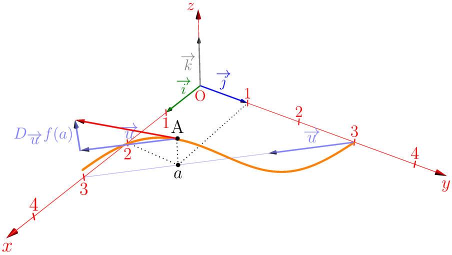
$\overrightarrow{u} \notin \mathbb{R}^3$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas un vecteur de l'espace. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ appartient au plan vectoriel $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ car $f : D \subset (\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

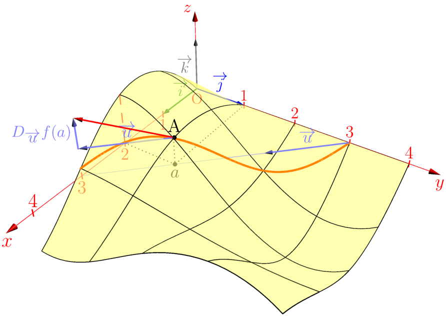




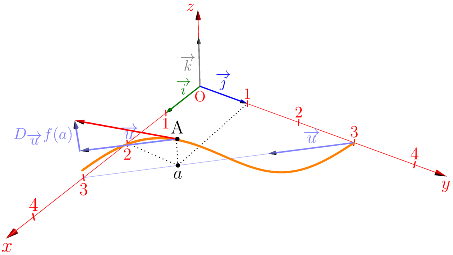
Attention !

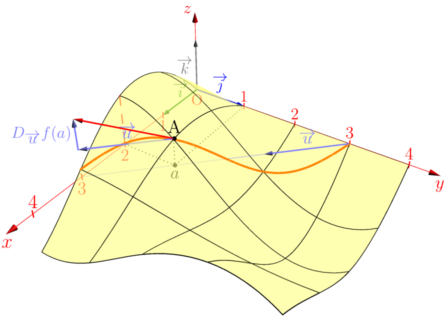
$\overrightarrow{u} \notin \mathbb{R}^3$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas un vecteur de l'espace. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ appartient au plan vectoriel $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ car $f : D \subset (\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) \longrightarrow \mathbb{R}$.





Interprétation : la dérivée directionnelle $D_{\overrightarrow{u}} f(a)$ est la vitesse instantanée sur l'axe $\mathrm{O}z$ au point A d'un point parcourant la surface $\mathcal{S}_f$ avec une vitesse $\overrightarrow{u}$ dans le plan $\mathrm{O}xy$.

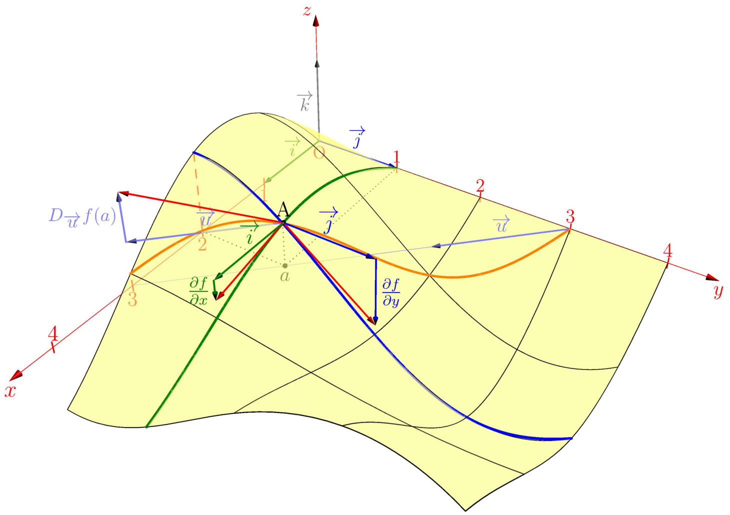




Interprétation : la dérivée directionnelle $D_{\vec{u}} f(a)$ est la vitesse instantanée sur l'axe Oz au point A d'un point parcourant la surface $\mathcal{S}_f$ avec une vitesse $\vec{u}$ dans le plan Oxy.

Remarque

> Dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \boldsymbol{D_{\vec{i}} f}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \boldsymbol{D_{\vec{j}} f}$



z
$\vec{k}$
$\vec{i}$
$\vec{j}$
O
1
2
3
4
y
x
A
a
$D_{\vec{u}}f(a)$
$\vec{u}$
$\frac{\partial f}{\partial x}$
$\frac{\partial f}{\partial y}$

II. Différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition:

Dans l'espace muni d'un repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, une fonction f définie sur un voisinage de $a \in (\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est **différentiable** en a si, et seulement si,

Définition:

Dans l'espace muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, une fonction f définie sur un voisinage de $a \in (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est **différentiable** en a si, et seulement si, il existe une application linéaire, notée $\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ telle que pour tout $\overrightarrow{u} \in (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on a :

$$f(a + \overrightarrow{u}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) +$$

Définition:

Dans l'espace muni d'un repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, une fonction f définie sur un voisinage de $a \in (\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est **différentiable** en a si, et seulement si, il existe une application linéaire, notée $\mathbf{d}f(a)$ telle que pour tout $\overrightarrow{u} \in (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on a :

$$f(a + \overrightarrow{u}) = f(a) + \mathbf{d}f(a).\overrightarrow{u} + \circ(\|\overrightarrow{u}\|).$$

Définition:

Dans l'espace muni d'un repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, une fonction f définie sur un voisinage de $a \in (\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est **différentiable** en a si, et seulement si, il existe une application linéaire, notée $\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ telle que pour tout $\overrightarrow{u} \in (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on a :

$$f(a + \overrightarrow{u}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \circ\left(\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\|\right).$$

En posant $a = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ et $\overrightarrow{u} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ l'égalité précédente s'écrit :

Définition:

Dans l'espace muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, une fonction f définie sur un voisinage de $a \in (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est **différentiable** en a si, et seulement si, il existe une application linéaire, notée $\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ telle que pour tout $\overrightarrow{u} \in (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on a :

$$f(a + \overrightarrow{u}) = \boldsymbol{f(a)} + \mathbf{d}\boldsymbol{f(a)}.\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \circ\left(\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\|\right).$$

En posant $a = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ et $\overrightarrow{u} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ l'égalité précédente s'écrit :

$$f(x + \alpha, y + \beta) = \boldsymbol{f(x, y)} + \mathbf{d}\boldsymbol{f(x, y).(\alpha, \beta)} + \circ\left(\sqrt{\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2}}\right).$$

Définition:

Dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une fonction f définie sur un voisinage de $a \in (O, \vec{i}, \vec{j})$ est **différentiable** en a si, et seulement si, il existe une application linéaire, notée $\mathbf{d}f(a)$ telle que pour tout $\vec{u} \in (\vec{i}, \vec{j})$ on a :

$$f(a + \vec{u}) = f(a) + \mathbf{d}f(a).\vec{u} + \circ\left(\|\vec{u}\|\right).$$

En posant $a = (x, y)$ et $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ l'égalité précédente s'écrit :

$$f(x + \alpha, y + \beta) = f(x, y) + \mathbf{d}f(x, y).(\alpha, \beta) + \circ\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right).$$

Si f est différentiable en a, alors, pour tout vecteur $\vec{u} \in (\vec{i}, \vec{j})$, le vecteur **tangent** $\vec{u} + D_{\vec{u}} f(a) \vec{k}$ est dans le **plan tangent** $\mathcal{P}$.

Définition:

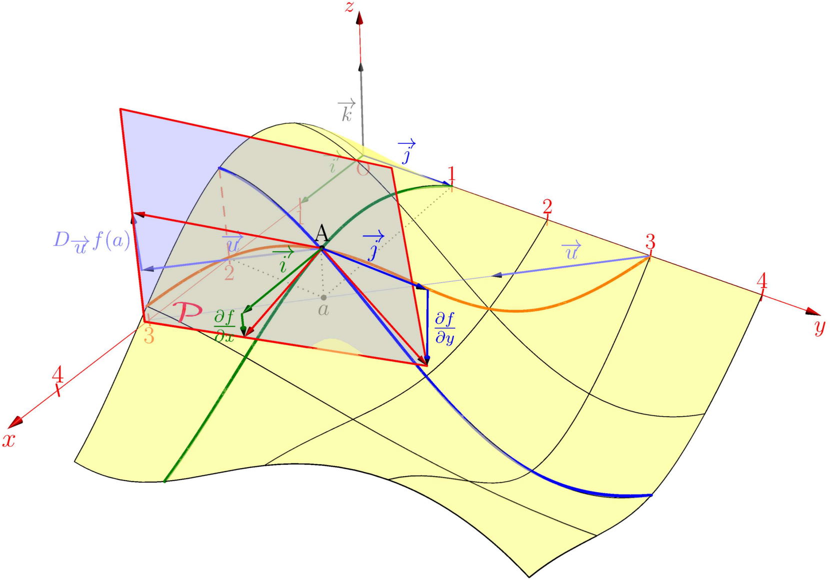
Dans l'espace muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, une fonction f définie sur un voisinage de $a \in (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est **différentiable** en a si, et seulement si, il existe une application linéaire, notée $\mathbf{df(a)}$ telle que pour tout $\overrightarrow{u} \in (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on a :

$$f(a + \overrightarrow{u}) = \boldsymbol{f(a)} + \mathbf{d}\boldsymbol{f(a)}.\boldsymbol{\overrightarrow{u}} + \circ\left(\|\boldsymbol{\overrightarrow{u}}\|\right).$$

En posant $a = \boldsymbol{(x, y)}$ et $\overrightarrow{u} = \boldsymbol{(\alpha, \beta)}$ l'égalité précédente s'écrit :

$$f(x + \alpha, y + \beta) = \boldsymbol{f(x, y)} + \mathbf{d}\boldsymbol{f(x, y).(\alpha, \beta)} + \circ\left(\sqrt{\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2}}\right).$$

Si f est différentiable en a, alors, pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, le vecteur **tangent** $\boldsymbol{\overrightarrow{u}} + \boldsymbol{D_{\overrightarrow{u}} f(a) \overrightarrow{k}}$ est dans le **plan tangent** $\boldsymbol{\mathcal{P}}$. Mais, cette propriété n'est pas suffisante pour prouver que la fonction f est **différentiable** en a.



z
$\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{i}$
O
1
2
3
4
y
x
A
a
$D_{\overrightarrow{u}} f(a)$
$\overrightarrow{u}$
$\overrightarrow{i}$
$\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{u}$
$\mathcal{P}$
$\frac{\partial f}{\partial x}$
$\frac{\partial f}{\partial y}$

$\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sa matrice est de la forme $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$. On sait que :

- $\mathrm{d}f(a).\overrightarrow{i} =$

$\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sa matrice est de la forme $M = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}$. On sait que :

- $\mathrm{d}f(a).\overrightarrow{i} = \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$ donc $M.\overrightarrow{i} = (\alpha \quad \beta)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$

$\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sa matrice est de la forme $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$. On sait que :

- $\mathrm{d}f(a).\overrightarrow{i} = \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$ donc $M.\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}$ donc $\alpha =$

$\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sa matrice est de la forme $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$. On sait que :

- $\mathrm{d}f(a).\overrightarrow{i} = \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$ donc $M.\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}$ donc $\alpha = \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$

$\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sa matrice est de la forme $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$. On sait que :

- $\mathrm{d}f(a).\overrightarrow{i} = \frac{\partial f}{\partial x}$ donc $M.\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha$ donc $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}$
- $\mathrm{d}f(a).\overrightarrow{j} =$

$\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sa matrice est de la forme $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$. On sait que :

- $\mathrm{d}f(a).\overrightarrow{i} = \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$ donc $M.\overrightarrow{i} = (\alpha \quad \beta)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}$ donc $\alpha = \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$
- $\mathrm{d}f(a).\overrightarrow{j} = \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}}$ donc $M.\overrightarrow{i} = (\alpha \quad \beta)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sa matrice est de la forme $M = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}$. On sait que :

- $\mathrm{d}f(a).\overrightarrow{i} = \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$ donc $M.\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}$ donc $\alpha = \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$
- $\mathrm{d}f(a).\overrightarrow{j} = \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}}$ donc $M.\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta}$ donc $\beta =$

$\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sa matrice est de la forme $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$. On sait que :

- $\mathrm{d}f(a).\overrightarrow{i} = \frac{\partial f}{\partial x}$ donc $M.\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha$ donc $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}$
- $\mathrm{d}f(a).\overrightarrow{j} = \frac{\partial f}{\partial y}$ donc $M.\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta$ donc $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$

donc $M = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$

$\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sa matrice est de la forme $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$. On sait que :

- $\mathrm{d}f(a).\overrightarrow{i} = \boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x}}$ donc $M.\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}$ donc $\alpha = \boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x}}$
- $\mathrm{d}f(a).\overrightarrow{j} = \boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$ donc $M.\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta}$ donc $\beta = \boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$

donc $M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \end{pmatrix}$

$\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sa matrice est de la forme $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$. On sait que :

- $\mathrm{d}f(a).\vec{i} = \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$ donc $M.\vec{i} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}$ donc $\alpha = \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$
- $\mathrm{d}f(a).\vec{j} = \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}}$ donc $M.\vec{i} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta}$ donc $\beta = \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}}$

donc $M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$

$\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sa matrice est de la forme $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$. On sait que :

- $\mathrm{d}f(a).\overrightarrow{i} = \boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x}}$ donc $M.\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}$ donc $\alpha = \boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x}}$
- $\mathrm{d}f(a).\overrightarrow{j} = \boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$ donc $M.\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta}$ donc $\beta = \boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$

donc $M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$

Définition:

La matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ est notée $\boldsymbol{J_f(a)}$ et est appelé la matrice **jacobienne** de f :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Définition:

La matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ est notée $\boldsymbol{J_f(a)}$ et est appelé la matrice **jacobienne** de f :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) & \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Définition:

La matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ est notée $\boldsymbol{J_f(a)}$ et est appelé la matrice **jacobienne** de f :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Exemple n° 1 : Reprenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$

Définition:

La matrice de l'application linéaire $df(a)$ est notée $J_f(a)$ et est appelé la matrice **jacobienne** de f :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) & \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Exemple n° 1 : Reprenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \boldsymbol{\cos(x)\cos(y)}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$

Définition:

La matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ est notée $J_f(a)$ et est appelé la matrice **jacobienne** de f :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) & \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Exemple n° 1 : Reprenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x)\cos(y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\sin(x)\sin(y)$

Définition:

La matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ est notée $\boldsymbol{J_f(a)}$ et est appelé la matrice **jacobienne** de f :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Exemple n° 1 : Reprenons $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \boldsymbol{\cos(x)\cos(y)}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \boldsymbol{-\sin(x)\sin(y)}$
2. $J_f(2,1) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ car : $\boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) =}$

Définition:

La matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ est notée $\boldsymbol{J_f(a)}$ et est appelé la matrice **jacobienne** de f :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) & \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Exemple n° 1 : Reprenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x)\cos(y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(x)\sin(y)$
2. $J_f(2,1) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ car : $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \cos(2)\cos(1)$

   et $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) =$

Définition:

La matrice de l'application linéaire $df(a)$ est notée $J_f(a)$ et est appelé la matrice **jacobienne** de f :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) & \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Exemple n° 1 : Reprenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x)\cos(y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(x)\sin(y)$
2. $J_f(2,1) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ car : $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \cos(2)\cos(1)$

   et $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -\sin(2)\sin(1)$

Définition:

La matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ est notée $J_f(a)$ et est appelé la matrice **jacobienne** de f :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Exemple n° 1 : Reprenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x)\cos(y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(x)\sin(y)$
2. $J_f(2,1) = \begin{pmatrix} \cos(2)\cos(1) & \end{pmatrix}$ car : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \cos(2)\cos(1)$

   et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -\sin(2)\sin(1)$

Définition:

La matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ est notée $\boldsymbol{J_f(a)}$ et est appelé la matrice **jacobienne** de f :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Exemple n° 1 : Reprenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \boldsymbol{\cos(x)\cos(y)}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \boldsymbol{-\sin(x)\sin(y)}$
2. $J_f(2,1) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\cos(2)\cos(1)} & \boldsymbol{-\sin(2)\sin(1)} \end{pmatrix}$ car : $\boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \cos(2)\cos(1)}$

   et $\boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -\sin(2)\sin(1)}$

Exemple n° 1 : Reprenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \mathbf{\cos(x)\cos(y)}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \mathbf{-\sin(x)\sin(y)}$
2. $J_f(2, 1) = \begin{pmatrix} \mathbf{\cos(2)\cos(1)} & \mathbf{-\sin(2)\sin(1)} \end{pmatrix}$.

Exemple n° 1 : Reprenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{\cos(x)\cos(y)}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{-\sin(x)\sin(y)}$
2. $J_f(2,1) = \begin{pmatrix} \mathbf{\cos(2)\cos(1)} & \mathbf{-\sin(2)\sin(1)} \end{pmatrix}$.
3. Etant donné un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$, la dérivée direction de f en a suivant le vecteur $\overrightarrow{u}$ est :

$$D_{\overrightarrow{u}} f(a) =$$

Exemple n° 1 : Reprenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \mathbf{\cos(x)\cos(y)}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \mathbf{-\sin(x)\sin(y)}$
2. $J_f(2, 1) = \begin{pmatrix} \mathbf{\cos(2)\cos(1)} & \mathbf{-\sin(2)\sin(1)} \end{pmatrix}$.
3. Etant donné un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, la dérivée direction de f en a suivant le vecteur $\overrightarrow{u}$ est :

$$D_{\overrightarrow{u}} f(a) = \mathbf{df(a).\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \cos(2)\cos(1) & -\sin(2)\sin(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Exemple n° 1 : Reprenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{\cos(x)\cos(y)}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{-\sin(x)\sin(y)}$
2. $J_f(2,1) = \begin{pmatrix} \mathbf{\cos(2)\cos(1)} & \mathbf{-\sin(2)\sin(1)} \end{pmatrix}$.
3. Etant donné un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, la dérivée direction de f en a suivant le vecteur $\overrightarrow{u}$ est :

$$D_{\overrightarrow{u}} f(a) = \mathbf{d}f(a).\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \cos(2)\cos(1) & -\sin(2)\sin(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \cos(2)\cos(1) + \sin(2)\sin(1)$$

Exemple n° 1 : Reprenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \mathbf{\cos(x)\cos(y)}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \mathbf{-\sin(x)\sin(y)}$
2. $J_f(2, 1) = \begin{pmatrix} \mathbf{\cos(2)\cos(1)} & \mathbf{-\sin(2)\sin(1)} \end{pmatrix}$.
3. Etant donné un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, la dérivée direction de f en a suivant le vecteur $\overrightarrow{u}$ est :

$$D_{\overrightarrow{u}} f(a) = \mathbf{df(a).\overrightarrow{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{\cos(2)\cos(1)} & \mathbf{-\sin(2)\sin(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{\cos(2)\cos(1) + \sin(2)\sin(1)}$$

On reconnait la formule $\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = \cos(x - y)$

Exemple n° 1 : Reprenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \mathbf{\cos(x)\cos(y)}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \mathbf{-\sin(x)\sin(y)}$
2. $J_f(2, 1) = \begin{pmatrix} \mathbf{\cos(2)\cos(1)} & \mathbf{-\sin(2)\sin(1)} \end{pmatrix}$.
3. Etant donné un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, la dérivée direction de f en a suivant le vecteur $\overrightarrow{u}$ est :

$$D_{\overrightarrow{u}} f(a) = \mathbf{df(a).\overrightarrow{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{\cos(2)\cos(1)} & \mathbf{-\sin(2)\sin(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{\cos(2)\cos(1) + \sin(2)\sin(1)}$$

On reconnait la formule $\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = \cos(x - y)$

Donc, $\boldsymbol{D_{\overrightarrow{u}} f(a) =}$

Exemple n° 1 : Reprenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{\cos(x)\cos(y)}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{-\sin(x)\sin(y)}$
2. $J_f(2,1) = \begin{pmatrix} \mathbf{\cos(2)\cos(1)} & \mathbf{-\sin(2)\sin(1)} \end{pmatrix}$.
3. Etant donné un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$, la dérivée direction de f en a suivant le vecteur $\overrightarrow{u}$ est :

$$D_{\overrightarrow{u}} f(a) = \mathbf{df(a).\overrightarrow{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{\cos(2)\cos(1)} & \mathbf{-\sin(2)\sin(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{\cos(2)\cos(1) + \sin(2)\sin(1)}$$

On reconnait la formule $\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = \cos(x-y)$

Donc, $\boldsymbol{D_{\overrightarrow{u}} f(a)} = \mathbf{\cos(2-1) = \cos(1) \simeq}$

Exemple n° 1 : Reprenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \mathbf{\cos(x)\cos(y)}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \mathbf{-\sin(x)\sin(y)}$
2. $J_f(2, 1) = \begin{pmatrix} \mathbf{\cos(2)\cos(1)} & \mathbf{-\sin(2)\sin(1)} \end{pmatrix}$.
3. Etant donné un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, la dérivée direction de f en a suivant le vecteur $\overrightarrow{u}$ est :

$$D_{\overrightarrow{u}} f(a) = \mathbf{df(a).\overrightarrow{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{\cos(2)\cos(1)} & \mathbf{-\sin(2)\sin(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{\cos(2)\cos(1) + \sin(2)\sin(1)}$$

On reconnait la formule $\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = \cos(x - y)$

Donc, $\boldsymbol{D_{\overrightarrow{u}} f(a) = \cos(2 - 1) = \cos(1) \simeq 0,54}$

Exemple n° 2 : Soient $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x^3y^2 \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) =$

Exemple n° 2 : Soient $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x^3y^2 \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \boldsymbol{3x^2y^2}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) =$

Exemple n° 2 : Soient $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x^3y^2 \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \boldsymbol{3x^2y^2}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \boldsymbol{2x^3y}$

2. $J_g(-2,3) = (\ldots \quad \ldots)$ car :

   $\boldsymbol{\dfrac{\partial g}{\partial x}(-2,3) =}$

Exemple n° 2 : Soient $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x^3y^2 \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \boldsymbol{3x^2y^2}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \boldsymbol{2x^3y}$

2. $J_g(-2,3) = (\ldots \quad \ldots)$ car :

   $\boldsymbol{\dfrac{\partial g}{\partial x}(-2,3) = 3(-2)^2 \times (3)^2 = 3(4) \times 9 =}$

Exemple n° 2 : Soients $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x^3y^2 \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \mathbf{3x^2y^2}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \mathbf{2x^3y}$

2. $J_g(-2,3) = \big(\mathbf{108} \quad \ldots\big)$ car :

$$\boldsymbol{\frac{\partial g}{\partial x}(-2,3) = 3(-2)^2 \times (3)^2 = 3(4) \times 9 = 12 \times 9 = 108}$$

Exemple n° 2 : Soients $\begin{array}{rccc} g\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x^3y^2 \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \mathbf{3x^2y^2}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \mathbf{2x^3y}$

2. $J_g(-2,3) = \begin{pmatrix} \mathbf{108} & \dots \end{pmatrix}$ car :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(-2,3) = 3(-2)^2 \times (3)^2 = 3(4) \times 9 = 12 \times 9 = 108$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(-2,3) =$$

Exemple n° 2 : Soient $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x^3y^2 \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \mathbf{3x^2y^2}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \mathbf{2x^3y}$

2. $J_g(-2,3) = \begin{pmatrix} \mathbf{108} & \dots \end{pmatrix}$ car :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(-2,3) = 3(-2)^2 \times (3)^2 = 3(4) \times 9 = 12 \times 9 = 108$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(-2,3) = 2(-2)^3 \times 3 = 2(-8) \times 3 =$$

Exemple n° 2 : Soient $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x^3y^2 \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \mathbf{3x^2y^2}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \mathbf{2x^3y}$

2. $J_g(-2,3) = \begin{pmatrix} \mathbf{108} & \mathbf{-48} \end{pmatrix}$ car :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(-2,3) = 3(-2)^2 \times (3)^2 = 3(4) \times 9 = 12 \times 9 = 108$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(-2,3) = 2(-2)^3 \times 3 = 2(-8) \times 3 = -16 \cdot 3 = -48$$

Exemple n° 2 : Soient $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x^3y^2 \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \boldsymbol{3x^2y^2}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \boldsymbol{2x^3y}$

2. $J_g(-2,3) = \begin{pmatrix} \mathbf{108} & \mathbf{-48} \end{pmatrix}$ car :

   $$\boldsymbol{\frac{\partial g}{\partial x}(-2,3) = 3(-2)^2 \times (3)^2 = 3(4) \times 9 = 12 \times 9 = 108}$$

   $$\boldsymbol{\frac{\partial g}{\partial y}(-2,3) = 2(-2)^3 \times 3 = 2(-8) \times 3 = -16 \cdot 3 = -48}$$

3. Etant donné un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, la dérivée direction de g en a suivant le vecteur $\vec{v}$ est :

   $D_{\vec{v}}\, g(a) =$

Exemple n° 2 : Soient $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x^3y^2 \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \mathbf{3x^2y^2}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \mathbf{2x^3y}$

2. $J_g(-2,3) = \begin{pmatrix} \mathbf{108} & \mathbf{-48} \end{pmatrix}$ car :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(-2,3) = 3(-2)^2 \times (3)^2 = 3(4) \times 9 = 12 \times 9 = 108$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(-2,3) = 2(-2)^3 \times 3 = 2(-8) \times 3 = -16 \cdot 3 = -48$$

3. Etant donné un vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, la dérivée direction de g en a suivant le vecteur $\overrightarrow{v}$ est :

$$D_{\overrightarrow{v}}\, g(a) = \mathbf{dg(a).\overrightarrow{v}} =$$

Exemple n° 2 : Soient $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x^3y^2 \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \boldsymbol{3x^2y^2}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \boldsymbol{2x^3y}$

2. $J_g(-2,3) = \begin{pmatrix} \mathbf{108} & \mathbf{-48} \end{pmatrix}$ car :

$$\boldsymbol{\frac{\partial g}{\partial x}(-2,3) = 3(-2)^2 \times (3)^2 = 3(4) \times 9 = 12 \times 9 = 108}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial g}{\partial y}(-2,3) = 2(-2)^3 \times 3 = 2(-8) \times 3 = -16 \cdot 3 = -48}$$

3. Etant donné un vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, la dérivée direction de g en a suivant le vecteur $\overrightarrow{v}$ est :

$$D_{\overrightarrow{v}}\, g(a) = \mathbf{dg}(\boldsymbol{a}).\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \mathbf{108} & \mathbf{-48} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} =$$

Exemple n° 2 : Soient $\begin{array}{rccc} g\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x^3y^2 \end{array}$ et $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \boldsymbol{3x^2y^2}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \boldsymbol{2x^3y}$

2. $J_g(-2,3) = \begin{pmatrix} \mathbf{108} & \mathbf{-48} \end{pmatrix}$ car :

$$\boldsymbol{\frac{\partial g}{\partial x}(-2,3) = 3(-2)^2 \times (3)^2 = 3(4) \times 9 = 12 \times 9 = 108}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial g}{\partial y}(-2,3) = 2(-2)^3 \times 3 = 2(-8) \times 3 = -16 \cdot 3 = -48}$$

3. Etant donné un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, la dérivée direction de g en a suivant le vecteur $\vec{v}$ est :

$$D_{\vec{v}}\,g(a) = \mathbf{dg(a).}\boldsymbol{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \mathbf{108} & \mathbf{-48} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \mathbf{108}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{48}\boldsymbol{\beta}$$

Pour démontrer qu'une fonction est différentiable, on utilise la condition suffisante suivante :

Pour démontrer qu'une fonction est différentiable, on utilise la condition suffisante suivante :

Théorème

Si les dérivées partielles de f, par rapport à x et à y, existent et sont continues en a, alors f est **différentiable** en a.

Pour démontrer qu'une fonction est différentiable, on utilise la condition suffisante suivante :

Théorème

Si les dérivées partielles de f, par rapport à x et à y, existent et sont continues en a, alors f est **différentiable** en a.

Propriété:

Dans l'espace muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, étant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, différentiable en a, et un vecteur $\overrightarrow{u} \in (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, en notant (x, y) les coordonnées du point a dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on a :

Pour démontrer qu'une fonction est différentiable, on utilise la condition suffisante suivante :

Théorème

Si les dérivées partielles de f, par rapport à x et à y, existent et sont continues en a, alors f est **différentiable** en a.

Propriété:

Dans l'espace muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, étant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in (\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, différentiable en a, et un vecteur $\vec{u} \in (\vec{i}, \vec{j})$, en notant (x, y) les coordonnées du point a dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ on a :

- $\mathrm{d}f(a).\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} =$

Pour démontrer qu'une fonction est différentiable, on utilise la condition suffisante suivante :

Théorème

Si les dérivées partielles de f, par rapport à x et à y, existent et sont continues en a, alors f est **différentiable** en a.

Propriété:

Dans l'espace muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, étant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in (\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, différentiable en a, et un vecteur $\vec{u} \in (\vec{i}, \vec{j})$, en notant (x, y) les coordonnées du point a dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ on a :

- $\mathrm{d}f(a).\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}(a) \times \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \times \beta}$

Pour démontrer qu'une fonction est différentiable, on utilise la condition suffisante suivante :

Théorème

Si les dérivées partielles de f, par rapport à x et à y, existent et sont continues en a, alors f est **différentiable** en a.

Propriété:

Dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, étant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in (O, \vec{i}, \vec{j})$, différentiable en a, et un vecteur $\vec{u} \in (\vec{i}, \vec{j})$, en notant (x, y) les coordonnées du point a dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a :

- $\mathrm{d}f(a).\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \times \alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \times \beta$
- $D_{\vec{u}} f(a) =$

Pour démontrer qu'une fonction est différentiable, on utilise la condition suffisante suivante :

Théorème

Si les dérivées partielles de f, par rapport à x et à y, existent et sont continues en a, alors f est **différentiable** en a.

Propriété:

Dans l'espace muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, étant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, différentiable en a, et un vecteur $\overrightarrow{u} \in (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, en notant (x, y) les coordonnées du point a dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on a :

- $\mathrm{d}f(a).\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \times \alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \times \beta$
- $D_{\vec{u}} f(a) = \mathrm{d}f(a).\overrightarrow{u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\left[\overrightarrow{u}\right]_x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\left[\overrightarrow{u}\right]_y$

Pour démontrer qu'une fonction est différentiable, on utilise la condition suffisante suivante :

Théorème

Si les dérivées partielles de f, par rapport à x et à y, existent et sont continues en a, alors f est **différentiable** en a.

Propriété:

Dans l'espace muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, étant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in (\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, différentiable en a, et un vecteur $\vec{u} \in (\vec{i}, \vec{j})$, en notant (x, y) les coordonnées du point a dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ on a :

- $\mathrm{d}f(a).\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \times \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \times \beta$
- $D_{\vec{u}}f(a) = \mathrm{d}f(a).\vec{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(a)[\vec{u}]_x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)[\vec{u}]_y$
- $f(x+\alpha, y+\beta) =$

Pour démontrer qu'une fonction est différentiable, on utilise la condition suffisante suivante :

Théorème

Si les dérivées partielles de f, par rapport à x et à y, existent et sont continues en a, alors f est **différentiable** en a.

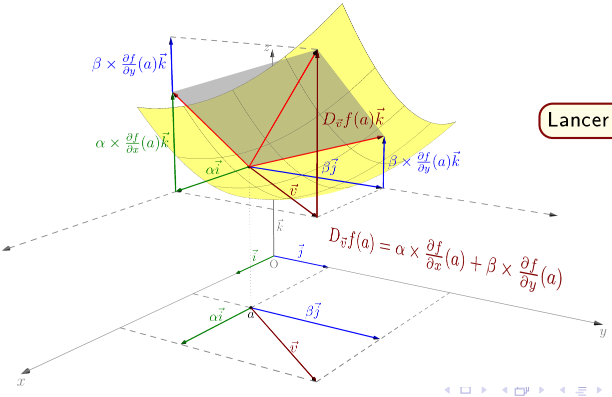
Propriété:

Dans l'espace muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, étant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in (\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, différentiable en a, et un vecteur $\vec{u} \in (\vec{i}, \vec{j})$, en notant (x, y) les coordonnées du point a dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ on a :

- $\mathrm{d}f(a).\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \times \alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \times \beta$
- $D_{\vec{u}}f(a) = \mathrm{d}f(a).\vec{u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)[\vec{u}]_x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)[\vec{u}]_y$
- $f(x+\alpha, y+\beta) = f(x,y) + \alpha\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + \beta\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) + \circ(\sqrt{\alpha^2+\beta^2})$

Propriété:

- $\mathrm{d}f(a).(\alpha, \beta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \times \alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \times \beta$
- $D_{\vec{u}} f(a) = \mathbf{d}f(a).\vec{u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)[\vec{u}]_x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)[\vec{u}]_y$
- $f(x+\alpha, y+\beta) = f(x,y) + \alpha\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + \beta\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) + \circ(\sqrt{\alpha^2+\beta^2})$



Lancer l'application.

Exemple n° 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x\sin(y)$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- $\dfrac{\partial \ell}{\partial x} =$

Exemple n° 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x\sin(y)$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- $\dfrac{\partial \ell}{\partial x} = \mathbf{\sin(y)}$
- $\dfrac{\partial \ell}{\partial y} =$

Exemple n° 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x\sin(y)$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- $\dfrac{\partial \ell}{\partial x} = \mathbf{\sin(y)}$
- $\dfrac{\partial \ell}{\partial y} = \mathbf{x\cos(y)}$
- $J_\ell(x, y) =$

Exemple n° 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x\sin(y)$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- $\dfrac{\partial \ell}{\partial x} = \mathbf{\sin(y)}$
- $\dfrac{\partial \ell}{\partial y} = \boldsymbol{x\cos(y)}$
- $J_\ell(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(y) & x\cos(y) \end{pmatrix}$
- $\mathrm{d}\ell(x, y).\binom{h}{k} =$

Exemple n° 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x\sin(y)$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- $\dfrac{\partial \ell}{\partial x} = \boldsymbol{\sin(y)}$
- $\dfrac{\partial \ell}{\partial y} = \boldsymbol{x\cos(y)}$
- $J_\ell(x,y) = \boldsymbol{\begin{pmatrix} \sin(y) & x\cos(y) \end{pmatrix}}$
- $\mathrm{d}\ell(x,y).\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \boldsymbol{h\sin(y) + kx\cos(y)}$
- $D_{\vec{u}}\ell(x,y) =$

Exemple n° 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x\sin(y)$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- $\dfrac{\partial \ell}{\partial x} = \boldsymbol{\sin(y)}$
- $\dfrac{\partial \ell}{\partial y} = \boldsymbol{x\cos(y)}$
- $J_\ell(x, y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sin(y)} & \boldsymbol{x\cos(y)} \end{pmatrix}$
- $\mathrm{d}\ell(x, y).\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \boldsymbol{h\sin(y) + kx\cos(y)}$
- $D_{\vec{u}}\ell(x, y) = \boldsymbol{-2\sin(y) + 3x\cos(y)}$

Exercice n° 1 :Détermine la différentielle des fonctions suivantes :

- $f(x, y) = 5x^2 - xy^3 - 1$

  On trouve $\mathrm{d}f(x, y).\binom{h}{k} =$ ....

- $g(x, y) = y\ln(x + y)$

  On trouve ....

- $h(x, y) = \ln^2\left(x^4y^2\right)$

  On trouve ....

Exemple n° 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x\sin(y)$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- $\dfrac{\partial \ell}{\partial x} = \boldsymbol{\sin(y)}$
- $\dfrac{\partial \ell}{\partial y} = \boldsymbol{x\cos(y)}$
- $J_\ell(x,y) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sin(y)} & \boldsymbol{x\cos(y)} \end{pmatrix}$
- $\mathrm{d}\ell(x,y).\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \boldsymbol{h\sin(y) + kx\cos(y)}$
- $D_{\vec{u}}\ell(x,y) = \boldsymbol{-2\sin(y) + 3x\cos(y)}$

Exercice n° 1 :Détermine la différentielle des fonctions suivantes :

- $f(x,y) = 5x^2 - xy^3 - 1$

  On trouve $\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} = \big(10x - y^3\big)h + \big(-3xy^2\big)k$

- $g(x,y) = y\ln(x+y)$

  On trouve ....

- $h(x,y) = \ln^2\left(x^4y^2\right)$

  On trouve ....

Exemple n° 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x\sin(y)$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- $\dfrac{\partial \ell}{\partial x} = \sin(y)$
- $\dfrac{\partial \ell}{\partial y} = x\cos(y)$
- $J_\ell(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(y) & x\cos(y) \end{pmatrix}$
- $\mathrm{d}\ell(x,y).\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = h\sin(y) + kx\cos(y)$
- $D_{\vec{u}}\ell(x,y) = -2\sin(y) + 3x\cos(y)$

Exercice n° 1 :Détermine la différentielle des fonctions suivantes :

- $f(x,y) = 5x^2 - xy^3 - 1$

  On trouve $\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} = \big(10x - y^3\big)h + \big(-3xy^2\big)k$

- $g(x,y) = y\ln(x+y)$

  On trouve $\mathrm{d}g(x,y).\binom{h}{k} = \left(\dfrac{y}{x+y}\right)h + \left(\ln(x+y) + \dfrac{y}{x+y}\right)k$

- $h(x,y) = \ln^2\left(x^4y^2\right)$

  On trouve ....

Exemple n° 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x\sin(y)$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- $\dfrac{\partial \ell}{\partial x} = \mathbf{\sin(y)}$
- $\dfrac{\partial \ell}{\partial y} = \boldsymbol{x\cos(y)}$
- $J_\ell(x,y) = \begin{pmatrix} \mathbf{\sin(y)} & \boldsymbol{x\cos(y)} \end{pmatrix}$
- $\mathrm{d}\ell(x,y).\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \boldsymbol{h\sin(y) + kx\cos(y)}$
- $D_{\vec{u}}\ell(x,y) = \boldsymbol{-2\sin(y) + 3x\cos(y)}$

Exercice n° 1 :Détermine la différentielle des fonctions suivantes :

- $f(x,y) = 5x^2 - xy^3 - 1$

  On trouve $\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} = \left(10x - y^3\right)h + \left(-3xy^2\right)k$

- $g(x,y) = y\ln(x+y)$

  On trouve $\mathrm{d}g(x,y).\binom{h}{k} = \left(\dfrac{y}{x+y}\right)h + \left(\ln(x+y) + \dfrac{y}{x+y}\right)k$

- $h(x,y) = \ln^2\left(x^4y^2\right)$

  On trouve $\mathrm{d}h(x,y).\binom{h}{k} = \left(\dfrac{8\ln\left(x^4y^2\right)}{x}\right)h + \left(\dfrac{4\ln\left(x^4y^2\right)}{y}\right)k$

Exemple n° 4 : Détermine la différentielle de :

la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$

$\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Cette différentielle est notée ... , $\mathrm{d}x\binom{-2}{3} = \ldots$

la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$

$\mathrm{d}g(x,y).\binom{h}{k} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Cette différentielle est notée ..., $\mathrm{d}y\binom{-2}{3} = \ldots$

Exemple n° 4 : Détermine la différentielle de :

la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$

$\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} = 1 \times h + 0 \times k = h$

Cette différentielle est notée ... , $\mathrm{d}x\binom{-2}{3} = \ldots$

la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$

$\mathrm{d}g(x,y).\binom{h}{k} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Cette différentielle est notée ..., $\mathrm{d}y\binom{-2}{3} = \ldots$

Exemple n° 4 : Détermine la différentielle de :

la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$

$\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} = 1 \times h + 0 \times k = h$

Cette différentielle est notée $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x\binom{-2}{3} = \ ..$

la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$

$\mathrm{d}g(x,y).\binom{h}{k} = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Cette différentielle est notée ..., $\mathrm{d}y\binom{-2}{3} = \ \ldots$

Exemple n° 4 : Détermine la différentielle de :

la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$

$\mathrm{d}f(x, y).\binom{h}{k} = 1 \times h + 0 \times k = h$

Cette différentielle est notée $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x\binom{-2}{3} = -2$

la fonction $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$

$\mathrm{d}g(x, y).\binom{h}{k} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Cette différentielle est notée . . ., $\mathrm{d}y\binom{-2}{3} = \ldots$

Exemple n° 4 : Détermine la différentielle de :

la fonction $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$

$\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} = 1 \times h + 0 \times k = h$

Cette différentielle est notée $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x\binom{-2}{3} = -2$

la fonction $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$

$\mathrm{d}g(x,y).\binom{h}{k} = 0 \times h + 1 \times k = k$

Cette différentielle est notée ..., $\mathrm{d}y\binom{-2}{3} = \ldots$

Exemple n° 4 : Détermine la différentielle de :

la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$

$\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} = 1 \times h + 0 \times k = h$

Cette différentielle est notée $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x\binom{-2}{3} = -2$

la fonction $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$

$\mathrm{d}g(x,y).\binom{h}{k} = 0 \times h + 1 \times k = k$

Cette différentielle est notée $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}y\binom{-2}{3} = \ldots$

Exemple n° 4 : Détermine la différentielle de :

la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$

$\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} = 1 \times h + 0 \times k = h$

Cette différentielle est notée $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x\binom{-2}{3} = -2$

la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$

$\mathrm{d}g(x,y).\binom{h}{k} = 0 \times h + 1 \times k = k$

Cette différentielle est notée $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}y\binom{-2}{3} = 3$

II. Différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemple n° 4 : Détermine la différentielle de :

la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$

$\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} = 1 \times h + 0 \times k = h$

Cette différentielle est notée $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x\binom{-2}{3} = -2$

la fonction $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$

$\mathrm{d}g(x,y).\binom{h}{k} = 0 \times h + 1 \times k = k$

Cette différentielle est notée $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}y\binom{-2}{3} = 3$

Il s'en suit la propriété suivante :

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) =$$

Exemple n° 4 : Détermine la différentielle de :

la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$

$\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} = 1 \times h + 0 \times k = h$

Cette différentielle est notée $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x\binom{-2}{3} = -2$

la fonction $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$

$\mathrm{d}g(x,y).\binom{h}{k} = 0 \times h + 1 \times k = k$

Cette différentielle est notée $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}y\binom{-2}{3} = 3$

Il s'en suit la propriété suivante :

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y =$$

Exemple n° 4 : Détermine la différentielle de :

la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$

$\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} = 1 \times h + 0 \times k = h$

Cette différentielle est notée $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x\binom{-2}{3} = -2$

la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$

$\mathrm{d}g(x,y).\binom{h}{k} = 0 \times h + 1 \times k = k$

Cette différentielle est notée $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}y\binom{-2}{3} = 3$

Il s'en suit la propriété suivante :

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$$

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

i. Si $T = x^3 - 5y^2 + 3xy$ alors $\dfrac{\partial T}{\partial x} =$

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

i. Si $T = x^3 - 5y^2 + 3xy$ alors $\dfrac{\partial T}{\partial x} = \mathbf{3x^2 + 3y}$ et $\dfrac{\partial T}{\partial y} =$

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

i. Si $T = x^3 - 5y^2 + 3xy$ alors $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 3x^2 + 3y$ et $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -10y + 3x$, donc on a :

$$\mathrm{d}x\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} =$$

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

i. Si $T = x^3 - 5y^2 + 3xy$ alors $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 3x^2 + 3y$ et $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -10y + 3x$, donc on a :

$$\mathrm{d}x\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = h,\ \mathrm{d}y\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} =$$

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

i. Si $T = x^3 - 5y^2 + 3xy$ alors $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 3x^2 + 3y$ et $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -10y + 3x$, donc on a :

$$\mathrm{d}x\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = h,\ \mathrm{d}y\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = k, \text{ et } \mathrm{d}T\cdot\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} =$$

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

i. Si $T = x^3 - 5y^2 + 3xy$ alors $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 3x^2 + 3y$ et $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -10y + 3x$, donc on a :

$$\mathrm{d}x\begin{pmatrix}h \\ k\end{pmatrix} = h,\ \mathrm{d}y\begin{pmatrix}h \\ k\end{pmatrix} = k, \text{ et } \mathrm{d}T\cdot\begin{pmatrix}h \\ k\end{pmatrix} = (3x^2+3y)\times h + (-10y+3x)\times k$$

On a bien $\mathrm{d}T =$

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

i. Si $T = x^3 - 5y^2 + 3xy$ alors $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 3x^2 + 3y$ et $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -10y + 3x$, donc on a :

$$\mathrm{d}x\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = h,\ \mathrm{d}y\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = k, \text{ et } \mathrm{d}T\cdot\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = (3x^2+3y)\times h + (-10y+3x)\times k$$

On a bien $\mathrm{d}T = (3x^2+3y)\,\mathrm{d}x + (-10y+3x)\,\mathrm{d}y$

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}}$$

Exemple n° 5 :

i. Si $T = x^3 - 5y^2 + 3xy$ alors $\dfrac{\partial T}{\partial x} = \boldsymbol{3x^2 + 3y}$ et $\dfrac{\partial T}{\partial y} = \boldsymbol{-10y + 3x}$, donc on a :

$$\mathrm{d}x\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = \boldsymbol{h},\ \mathrm{d}y\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = \boldsymbol{k},\text{ et } \mathrm{d}T\cdot\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = \boldsymbol{(3x^2 + 3y)\times h + (-10y + 3x)\times k}$$

On a bien $\mathrm{d}T = \boldsymbol{(3x^2 + 3y)\,\mathrm{d}x + (-10y + 3x)\,\mathrm{d}y}$

ii. Si $U(x, y) = x^2 \mathrm{e}^{3y+1}$: $\mathrm{d}U = \ldots\ldots\,\mathrm{d}x + \ldots\ldots\,\mathrm{d}y$

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

i. Si $T = x^3 - 5y^2 + 3xy$ alors $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 3x^2 + 3y$ et $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -10y + 3x$, donc on a :

$$\mathrm{d}x\begin{pmatrix}h \\ k\end{pmatrix} = h,\ \mathrm{d}y\begin{pmatrix}h \\ k\end{pmatrix} = k, \text{ et } \mathrm{d}T \cdot \begin{pmatrix}h \\ k\end{pmatrix} = (3x^2 + 3y) \times h + (-10y + 3x) \times k$$

On a bien $\mathrm{d}T = (3x^2 + 3y)\,\mathrm{d}x + (-10y + 3x)\,\mathrm{d}y$

ii. Si $U(x, y) = x^2 \mathrm{e}^{3y+1}$: $\mathrm{d}U = 2x\mathrm{e}^{3y+1}\,\mathrm{d}x + \ldots\ldots\,\mathrm{d}y$

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

i. Si $T = x^3 - 5y^2 + 3xy$ alors $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 3x^2 + 3y$ et $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -10y + 3x$, donc on a :

$$\mathrm{d}x\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = h,\ \mathrm{d}y\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = k,\ \text{et } \mathrm{d}T\cdot\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = (3x^2+3y)\times h + (-10y+3x)\times k$$

On a bien $\mathrm{d}T = (3x^2+3y)\,\mathrm{d}x + (-10y+3x)\,\mathrm{d}y$

ii. Si $U(x,y) = x^2\mathrm{e}^{3y+1}$: $\mathrm{d}U = 2x\mathrm{e}^{3y+1}\,\mathrm{d}x + 3x^2\mathrm{e}^{3y+1}\,\mathrm{d}y$

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

i. Si $T = x^3 - 5y^2 + 3xy$ alors $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 3x^2 + 3y$ et $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -10y + 3x$, donc on a :

$$\mathrm{d}x\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = h,\ \mathrm{d}y\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = k, \text{ et } \mathrm{d}T\cdot\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = (3x^2+3y)\times h + (-10y+3x)\times k$$

On a bien $\mathrm{d}T = (3x^2+3y)\,\mathrm{d}x + (-10y+3x)\,\mathrm{d}y$

ii. Si $U(x,y) = x^2\mathrm{e}^{3y+1}$: $\mathrm{d}U = \left(2x\,dx + 3x^2\,dy\right)\mathrm{e}^{3y+1}$

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

i. Si $T = x^3 - 5y^2 + 3xy$ alors $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 3x^2 + 3y$ et $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -10y + 3x$, donc on a :

$$\mathrm{d}x\begin{pmatrix}h \\ k\end{pmatrix} = h,\ \mathrm{d}y\begin{pmatrix}h \\ k\end{pmatrix} = k, \text{ et } \mathrm{d}T\cdot\begin{pmatrix}h \\ k\end{pmatrix} = (3x^2+3y)\times h + (-10y+3x)\times k$$

On a bien $\mathrm{d}T = (3x^2+3y)\,\mathrm{d}x + (-10y+3x)\,\mathrm{d}y$

ii. Si $U(x,y) = x^2\mathrm{e}^{3y+1}$: $\mathrm{d}U = \left(2x\,dx + 3x^2\,dy\right)\mathrm{e}^{3y+1}$

iii. Si $V(x,y) = x\mathrm{e}^{xy}$ alors $\dfrac{\partial V}{\partial x} =$

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

i. Si $T = x^3 - 5y^2 + 3xy$ alors $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 3x^2 + 3y$ et $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -10y + 3x$, donc on a :

$$\mathrm{d}x\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = h,\ \mathrm{d}y\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = k,\ \text{et } \mathrm{d}T\cdot\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = (3x^2 + 3y)\times h + (-10y + 3x)\times k$$

On a bien $\mathrm{d}T = (3x^2 + 3y)\,\mathrm{d}x + (-10y + 3x)\,\mathrm{d}y$

ii. Si $U(x,y) = x^2\mathrm{e}^{3y+1}$: $\mathrm{d}U = \left(2x\,dx + 3x^2\,dy\right)\mathrm{e}^{3y+1}$

iii. Si $V(x,y) = x\mathrm{e}^{xy}$ alors $\dfrac{\partial V}{\partial x} = (1)\times e^{xy} + x\times(ye^{xy})$ et

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

i. Si $T = x^3 - 5y^2 + 3xy$ alors $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 3x^2 + 3y$ et $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -10y + 3x$, donc on a :

$$\mathrm{d}x\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = h,\ \mathrm{d}y\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = k, \text{ et } \mathrm{d}T\cdot\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = (3x^2 + 3y)\times h + (-10y + 3x)\times k$$

On a bien $\mathrm{d}T = (3x^2 + 3y)\,\mathrm{d}x + (-10y + 3x)\,\mathrm{d}y$

ii. Si $U(x,y) = x^2\mathrm{e}^{3y+1}$: $\mathrm{d}U = \big(2x\,dx + 3x^2\,dy\big)\mathrm{e}^{3y+1}$

iii. Si $V(x,y) = x\mathrm{e}^{xy}$ alors $\dfrac{\partial V}{\partial x} = (1)\times e^{xy} + x\times(ye^{xy})$ et $\dfrac{\partial V}{\partial y} = x\times(xe^{xy}) = x^2e^{xy}$

$\mathrm{d}V =$

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

i. Si $T = x^3 - 5y^2 + 3xy$ alors $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 3x^2 + 3y$ et $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -10y + 3x$, donc on a :

$\mathrm{d}x\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = h$, $\mathrm{d}y\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = k$, et $\mathrm{d}T \cdot \begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = (3x^2 + 3y) \times h + (-10y + 3x) \times k$

On a bien $\mathrm{d}T = (3x^2 + 3y)\,\mathrm{d}x + (-10y + 3x)\,\mathrm{d}y$

ii. Si $U(x,y) = x^2 e^{3y+1}$: $\mathrm{d}U = \left(2x\,dx + 3x^2\,dy\right)e^{3y+1}$

iii. Si $V(x,y) = xe^{xy}$ alors $\dfrac{\partial V}{\partial x} = (1) \times e^{xy} + x \times (ye^{xy})$ et $\dfrac{\partial V}{\partial y} = x \times (xe^{xy}) = x^2 e^{xy}$

$\mathrm{d}V = \left[(1 + xy)dx + x^2 dy\right]e^{xy}$ et $J_V(x,y) =$

Propriété:

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = J_f(a)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

i. Si $T = x^3 - 5y^2 + 3xy$ alors $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 3x^2 + 3y$ et $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -10y + 3x$, donc on a :

$$\mathrm{d}x\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = h,\ \mathrm{d}y\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = k,\ \text{et } \mathrm{d}T\cdot\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = (3x^2 + 3y)\times h + (-10y + 3x)\times k$$

On a bien $\mathrm{d}T = (3x^2 + 3y)\,\mathrm{d}x + (-10y + 3x)\,\mathrm{d}y$

ii. Si $U(x,y) = x^2 \mathrm{e}^{3y+1}$: $\mathrm{d}U = \big(2x\,dx + 3x^2\,dy\big)\mathrm{e}^{3y+1}$

iii. Si $V(x,y) = x\mathrm{e}^{xy}$ alors $\dfrac{\partial V}{\partial x} = (1)\times e^{xy} + x\times(ye^{xy})$ et $\dfrac{\partial V}{\partial y} = x\times(xe^{xy}) = x^2e^{xy}$

$\mathrm{d}V = \big[(1+xy)dx + x^2dy\big]\mathrm{e}^{xy}$ et $J_V(x,y) = \begin{pmatrix}1+xy & x^2\end{pmatrix} e^{xy}$

Exemple n° 5 :

iii. Si $V(x,y) = x\mathrm{e}^{xy}$ alors $\dfrac{\partial V}{\partial x} = (1) \times e^{xy} + x \times (ye^{xy})$ et $\dfrac{\partial V}{\partial y} = x \times (xe^{xy}) = x^2 e^{xy}$

$\mathrm{d}V = \left[(1+xy)dx + x^2 dy\right]\mathrm{e}^{xy}$ et $J_V(x,y) = \left(1+xy \quad x^2\right) e^{xy}$

Exemple n° 5 :

iii. Si $V(x,y) = x\mathrm{e}^{xy}$ alors $\dfrac{\partial V}{\partial x} = (1) \times e^{xy} + x \times (ye^{xy})$ et $\dfrac{\partial V}{\partial y} = x \times (xe^{xy}) = x^2 e^{xy}$

$\mathrm{d}V = \left[(1+xy)dx + x^2 dy\right]\mathrm{e}^{xy}$ et $J_V(x,y) = \begin{pmatrix} 1+xy & x^2 \end{pmatrix} e^{xy}$

iv. Si $W = x^2 \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$ alors $\dfrac{\partial W}{\partial x} =$

Exemple n° 5 :

iii. Si $V(x,y) = x\mathrm{e}^{xy}$ alors $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \boldsymbol{(1) \times e^{xy} + x \times (ye^{xy})}$ et $\dfrac{\partial V}{\partial y} = \boldsymbol{x \times (xe^{xy}) = x^2 e^{xy}}$

$\mathrm{d}V = \boldsymbol{\left[(1+xy)dx + x^2 dy\right]\mathrm{e}^{xy}}$ et $J_V(x,y) = \boldsymbol{\begin{pmatrix} 1+xy & x^2 \end{pmatrix} e^{xy}}$

iv. Si $W = x^2 \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$ alors $\dfrac{\partial W}{\partial x} = \boldsymbol{(2x) \times \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + x^2 \times \left(-\frac{y}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\right)}$ et $\dfrac{\partial W}{\partial y} =$

Exemple n° 5 :

iii. Si $V(x,y) = x\mathrm{e}^{xy}$ alors $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \boldsymbol{(1) \times e^{xy} + x \times (ye^{xy})}$ et $\dfrac{\partial V}{\partial y} = \boldsymbol{x \times (xe^{xy}) = x^2 e^{xy}}$

$\mathrm{d}V = \boldsymbol{\left[(1+xy)dx + x^2 dy\right]\mathrm{e}^{xy}}$ et $J_V(x,y) = \boldsymbol{\begin{pmatrix} 1+xy & x^2 \end{pmatrix} e^{xy}}$

iv. Si $W = x^2\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$ alors $\dfrac{\partial W}{\partial x} = \boldsymbol{(2x) \times \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + x^2 \times \left(-\frac{y}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\right)}$ et $\dfrac{\partial W}{\partial y} = \boldsymbol{x^2 \times \left(\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\right)}$

Exemple n° 5 :

iii. Si $V(x,y) = x\mathrm{e}^{xy}$ alors $\dfrac{\partial V}{\partial x} = (1) \times e^{xy} + x \times (ye^{xy})$ et $\dfrac{\partial V}{\partial y} = x \times (xe^{xy}) = x^2 e^{xy}$

$\mathrm{d}V = \left[(1+xy)dx + x^2 dy\right]\mathrm{e}^{xy}$ et $J_V(x,y) = \begin{pmatrix} 1+xy & x^2 \end{pmatrix} e^{xy}$

iv. Si $W = x^2 \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$ alors $\dfrac{\partial W}{\partial x} = (2x) \times \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + x^2 \times \left(-\frac{y}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\right)$ et $\dfrac{\partial W}{\partial y} = x^2 \times \left(\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\right)$

$\mathrm{d}W =$

Exemple n° 5 :

iii. Si $V(x,y) = x\mathrm{e}^{xy}$ alors $\dfrac{\partial V}{\partial x} = (1) \times e^{xy} + x \times (ye^{xy})$ et $\dfrac{\partial V}{\partial y} = x \times (xe^{xy}) = x^2 e^{xy}$

$\mathrm{d}V = \left[(1+xy)dx + x^2 dy\right]\mathrm{e}^{xy}$ et $J_V(x,y) = \begin{pmatrix} 1+xy & x^2 \end{pmatrix} e^{xy}$

iv. Si $W = x^2\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$ alors $\dfrac{\partial W}{\partial x} = (2x) \times \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + x^2 \times \left(-\frac{y}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\right)$ et $\dfrac{\partial W}{\partial y} = x^2 \times \left(\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\right)$

$\mathrm{d}W = \Big[(2x - y)\ \mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y\Big]\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$ et $J_W(x,y) =$

Exemple n° 5 :

iii. Si $V(x,y) = x\mathrm{e}^{xy}$ alors $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \mathbf{(1) \times e^{xy} + x \times (ye^{xy})}$ et $\dfrac{\partial V}{\partial y} = \mathbf{x \times (xe^{xy}) = x^2 e^{xy}}$

$\mathrm{d}V = \mathbf{\left[(1+xy)dx + x^2 dy\right] e^{xy}}$ et $J_V(x,y) = \mathbf{\begin{pmatrix} 1+xy & x^2 \end{pmatrix} e^{xy}}$

iv. Si $W = x^2 \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$ alors $\dfrac{\partial W}{\partial x} = \mathbf{(2x) \times e^{\frac{y}{x}} + x^2 \times \left(-\frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}\right)}$ et $\dfrac{\partial W}{\partial y} = \mathbf{x^2 \times \left(\frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}}\right)}$

$\mathrm{d}W = \mathbf{\left[(2x - y)\ dx + x\, dy\right] e^{\frac{y}{x}}}$ et $J_W(x,y) = \mathbf{\begin{pmatrix} 2x - y & x \end{pmatrix} e^{\frac{y}{x}}}$