Différentielle d'ordre 2.

1. Formule de Taylor.

1. Formule de Taylor.

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

1. Formule de Taylor.

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

- f est différentiable en (x, y) et sa différentielle est : $\mathrm{d}f(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$

1. Formule de Taylor.

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

- f est différentiable en (x, y) et sa différentielle est : $\mathrm{d}f(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$

  C'est une forme linéaire : $\mathrm{d}f(x, y).\binom{h}{k} = \dfrac{\partial f}{\partial x} h + \dfrac{\partial f}{\partial y} k$

1. Formule de Taylor.

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

- f est différentiable en (x, y) et sa différentielle est : $\mathrm{d}f(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$

  C'est une forme linéaire : $\mathrm{d}f(x, y).\binom{h}{k} = \dfrac{\partial f}{\partial x} h + \dfrac{\partial f}{\partial y} k$

- $\mathrm{d}f$ est différentiable en (x, y) et la différentielle de $\mathrm{d}f$ en (x, y) est sa différentielle d'ordre deux :

I. Différentielle d'ordre 2.

1. Formule de Taylor.

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

- f est différentiable en (x, y) et sa différentielle est : $\mathrm{d}f(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$

  C'est une forme linéaire : $\mathrm{d}f(x, y).\binom{h}{k} = \dfrac{\partial f}{\partial x} h + \dfrac{\partial f}{\partial y} k$

- $\mathrm{d}f$ est différentiable en (x, y) et la différentielle de $\mathrm{d}f$ en (x, y) est sa différentielle d'ordre deux :

$$\mathrm{d}^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y$$

1. Formule de Taylor.

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

- f est différentiable en (x,y) et sa différentielle est : $\mathrm{d}f(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$

  C'est une forme linéaire : $\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} = \dfrac{\partial f}{\partial x}h + \dfrac{\partial f}{\partial y}k$

- $\mathrm{d}f$ est différentiable en (x,y) et la différentielle de $\mathrm{d}f$ en (x,y) est sa différentielle d'ordre deux :

  $$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y$$

  C'est une forme bilinéaire : $\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{a}{b},\binom{c}{d}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}ac + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(ad+bc) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}bd$

1. Formule de Taylor.

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

- f est différentiable en (x,y) et sa différentielle est : $\mathrm{d}f(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$

  C'est une forme linéaire : $\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} = \dfrac{\partial f}{\partial x}h + \dfrac{\partial f}{\partial y}k$

- $\mathrm{d}f$ est différentiable en (x,y) et la différentielle de $\mathrm{d}f$ en (x,y) est sa différentielle d'ordre deux :

  $$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y$$

  C'est une forme bilinéaire : $\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{a}{b},\binom{c}{d}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}ac + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(ad+bc) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}bd$

  Et, $\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2$

I. Différentielle d'ordre 2.

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

- **La formule de Taylor à l'ordre 2 :**

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

- **La formule de Taylor à l'ordre 2 :**

$$f(x+h, y+k) = f(x, y)$$

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

- **La formule de Taylor à l'ordre 2 :**

$$f(x+h, y+k) = f(x, y)$$
$$+\underbrace{h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)}_{\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right)} + \circ\left(\left\|\binom{h}{k}\right\|^2\right)$$

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

- **La formule de Taylor à l'ordre 2 :**

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) \\ + \underbrace{h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)}_{\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right)} + \circ\left(\left\|\binom{h}{k}\right\|^2\right)$$

Remarque

☞ $\left\|\binom{h}{k}\right\|^2 = \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2 =$

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

- **La formule de Taylor à l'ordre 2 :**

$$f(x+h, y+k) = f(x,y)$$
$$+ \underbrace{h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)}_{\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right)} + \circ\left(\left\|\binom{h}{k}\right\|^2\right)$$

Remarque

☞ $\left\|\binom{h}{k}\right\|^2 = \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2 =$

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

- **La formule de Taylor à l'ordre 2 :**

$$f(x+h, y+k) = f(x,y)$$
$$+\underbrace{h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)}_{\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right)} + \circ\left(\left\|\binom{h}{k}\right\|^2\right)$$

Remarque

☞ $\left\|\binom{h}{k}\right\|^2 = \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2 = \boldsymbol{h^2 + k^2}$

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

- **La formule de Taylor à l'ordre 2 :**

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)$$
$$+\underbrace{h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}+\frac{1}{2}\underbrace{\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right)}+\circ\left(\left\|\binom{h}{k}\right\|^2\right)$$

Remarque

☞ $\left\|\binom{h}{k}\right\|^2=\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2=\boldsymbol{h^2+k^2}$

☞ $\mathrm{d}^2f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right)$ s'écrit plus simplement

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

- **La formule de Taylor à l'ordre 2 :**

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) \\ + \underbrace{h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)}_{\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right)} + \circ\left(\left\|\binom{h}{k}\right\|^2\right)$$

Remarque

☞ $\left\|\binom{h}{k}\right\|^2 = \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2 = \boldsymbol{h^2 + k^2}$

☞ $\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k}, \binom{h}{k}\right)$ s'écrit plus simplement $\boldsymbol{\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2}$

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

- **La formule de Taylor à l'ordre 2 :**

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \underbrace{h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)}_{\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right)} + \circ\left(\left\|\binom{h}{k}\right\|^2\right)$$

Remarque

- ☞ $\left\|\binom{h}{k}\right\|^2 = \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2 = \boldsymbol{h^2 + k^2}$
- ☞ $\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k}, \binom{h}{k}\right)$ s'écrit plus simplement $\boldsymbol{\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2}$
- ☞ $f(A + \overrightarrow{u}) =$

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont **continues**, alors :

- **La formule de Taylor à l'ordre 2 :**

$$f(x+h,y+k) = f(x,y)$$
$$+\underbrace{h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)}_{\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right)} + \circ\left(\left\|\binom{h}{k}\right\|^2\right)$$

Remarque

- $\left\|\binom{h}{k}\right\|^2 = \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2 = \boldsymbol{h^2 + k^2}$
- $\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right)$ s'écrit plus simplement $\boldsymbol{\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2}$
- $f(A+\vec{u}) = \boldsymbol{f(A) + \mathrm{d}f(A).\vec{u} + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(A).(\vec{u},\vec{u}) + \circ\left(\|\vec{u}\|^2\right)}$

Exemple n° 1 : Ecris la formule de Taylor à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{y-x^2}$$

Exemple n° 1 : Ecris la formule de Taylor à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{y-x^2}$$

On calcule les dérivées partielles en (0,0) :

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple n° 1 : Ecris la formule de Taylor à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = e^{y-x^2}$$

On calcule les dérivées partielles en (0,0) :

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \boldsymbol{-2xe^{y-x^2}\Big|_{(0,0)} = 0}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple n° 1 : Ecris la formule de Taylor à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{y-x^2}$$

On calcule les dérivées partielles en (0,0) :

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \boldsymbol{-2x\mathrm{e}^{y-x^2}\Big|_{(0,0)} = 0}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \boldsymbol{\mathrm{e}^{y-x^2}\Big|_{(0,0)} = 1}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple n° 1 : Ecris la formule de Taylor à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{y-x^2}$$

On calcule les dérivées partielles en (0,0) :

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \mathbf{-2x e^{y-x^2}\Big|_{(0,0)} = 0}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \mathbf{e^{y-x^2}\Big|_{(0,0)} = 1}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \mathbf{4x^2 e^{y-x^2} - 2e^{y-x^2}\Big|_{(0,0)} = -2}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple n° 1 : Ecris la formule de Taylor à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{y-x^2}$$

On calcule les dérivées partielles en (0,0) :

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \mathbf{-2x\mathrm{e}^{y-x^2}\Big|_{(0,0)} = 0}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \mathbf{\mathrm{e}^{y-x^2}\Big|_{(0,0)} = 1}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \mathbf{4x^2\mathrm{e}^{y-x^2} - 2\mathrm{e}^{y-x^2}\Big|_{(0,0)} = -2}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \mathbf{\mathrm{e}^{y-x^2}\Big|_{(0,0)} = 1}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple n° 1 : Ecris la formule de Taylor à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{y-x^2}$$

On calcule les dérivées partielles en (0,0) :

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \boldsymbol{-2x\mathrm{e}^{y-x^2}\Big|_{(0,0)} = 0}$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \boldsymbol{\mathrm{e}^{y-x^2}\Big|_{(0,0)} = 1}$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \boldsymbol{4x^2\mathrm{e}^{y-x^2} - 2\mathrm{e}^{y-x^2}\Big|_{(0,0)} = -2}$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \boldsymbol{\mathrm{e}^{y-x^2}\Big|_{(0,0)} = 1}$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \boldsymbol{-2x\mathrm{e}^{y-x^2}\Big|_{(0,0)} = 0}$

Exemple n° 2 : Ecris la formule de Taylor à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{y-x^2}$$

Exemple n° 2 : Ecris la formule de Taylor à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{y-x^2}$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1$

$$f(0+h,0+k) = f(0,0) + \underbrace{\qquad\qquad}_{\mathrm{d}f(0,0).\binom{h}{k}}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\mathrm{d}^2 f(0,0).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

Exemple n° 2 : Ecris la formule de Taylor à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = e^{y-x^2}$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1$

$$f(0+h, 0+k) = f(0,0) + \underbrace{\mathbf{0 \times h + 1 \times k}}_{\mathrm{d}f(0,0).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\mathrm{d}^2 f(0,0).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

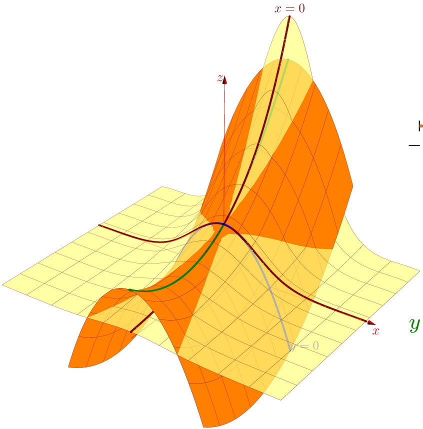
Exemple n° 2 : Ecris la formule de Taylor à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

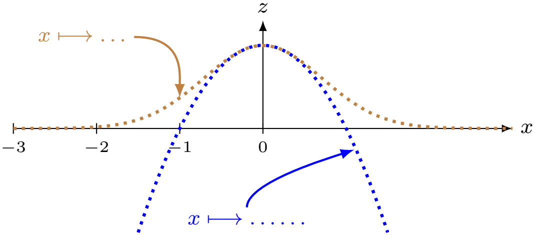
$$f(x,y) = \mathrm{e}^{y-x^2}$$

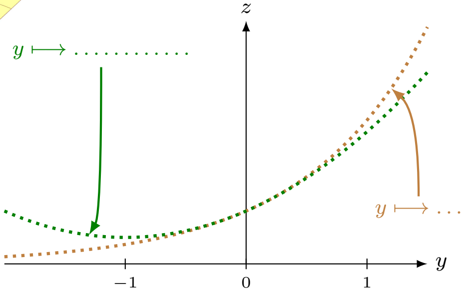
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1$

$$f(0+h,0+k) = f(0,0) + \underbrace{\mathbf{0 \times h + 1 \times k}}_{\mathrm{d}f(0,0).\binom{h}{k}}$$

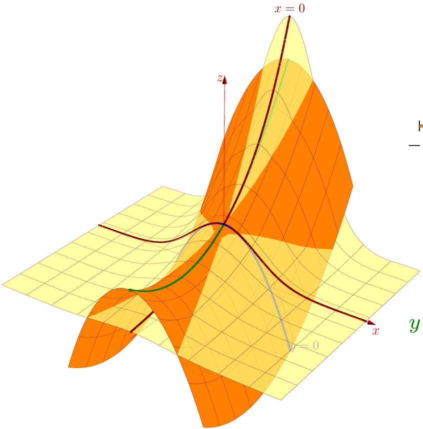
$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left(\mathbf{-2 \times h^2 + 0 \times hk + 1 \times k^2}\right)}_{\mathrm{d}^2 f(0,0).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

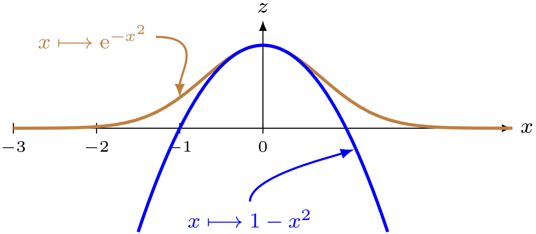


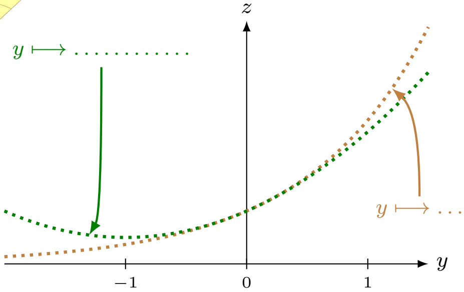




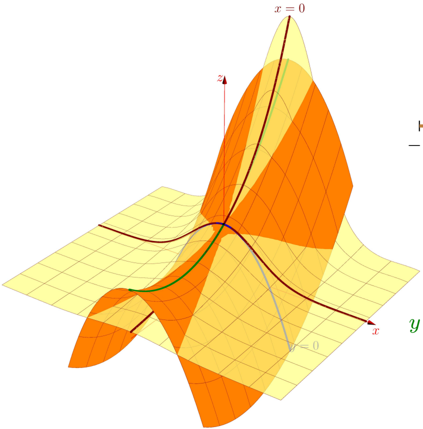
$\mathbf{1 - x^2 + y + \frac{y^2}{2}}$ est l'approximation de f à l'ordre 2 en $(0, 0)$ par la formule de Taylor.

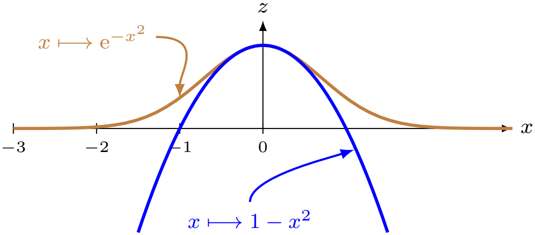


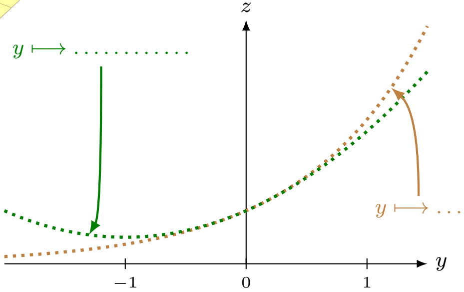




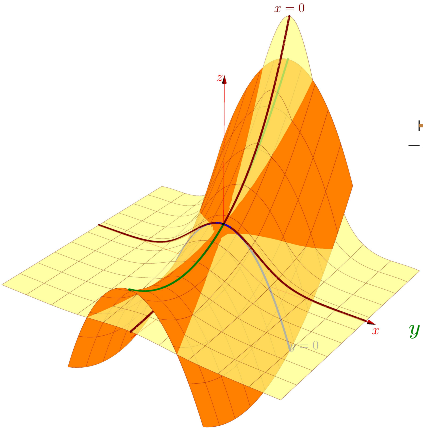
$\mathbf{1 - x^2 + y + \frac{y^2}{2}}$ est
l'approximation de f à l'ordre 2 en
$(0, 0)$ par la formule de Taylor.

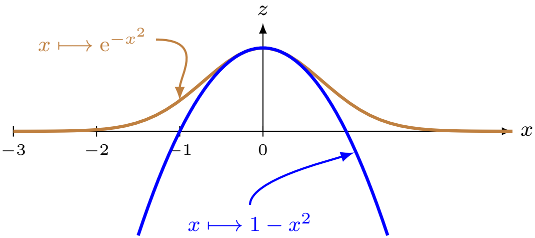


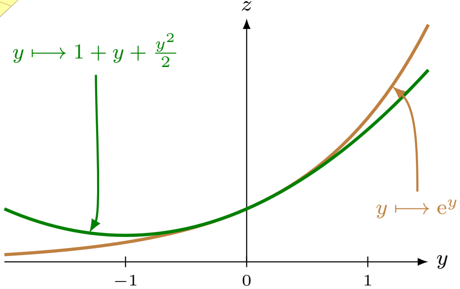




$\mathbf{1 - x^2 + y + \dfrac{y^2}{2}}$ est l'approximation de f à l'ordre 2 en $(0,0)$ par la formule de Taylor.







$\boldsymbol{1 - x^2 + y + \frac{y^2}{2}}$ est l'approximation de f à l'ordre 2 en $(0,0)$ par la formule de Taylor.

2. Application à la recherche d'extremums.

2. Application à la recherche d'extremums.

On se limite à la recherche d'extremums d'une fonction f sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Dans cette partie, nous commencerons par étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3y^2$.

Définition:

Un point qui annule le gradient (différentielle nulle) de f s'appelle un point **critique** de f.

2. Application à la recherche d'extremums.

On se limite à la recherche d'extremums d'une fonction f sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Dans cette partie, nous commencerons par étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^3 + 3y^2$.

Définition:

Un point qui annule le gradient (différentielle nulle) de f s'appelle un point **critique** de f.

Théorème

Les extrema locaux d'une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sont à chercher parmi ses points critiques.

2. Application à la recherche d'extremums.

On se limite à la recherche d'extremums d'une fonction f sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Dans cette partie, nous commencerons par étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3y^2$.

Définition:

Un point qui annule le gradient (différentielle nulle) de f s'appelle un point **critique** de f.

Théorème

Les extrema locaux d'une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sont à chercher parmi ses points critiques.

Exemple n° 3 : Recherchons les points critiques de f :

2. Application à la recherche d'extremums.

On se limite à la recherche d'extremums d'une fonction f sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Dans cette partie, nous commencerons par étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^3 + 3y^2$.

Définition:

Un point qui annule le gradient (différentielle nulle) de f s'appelle un point **critique** de f.

Théorème

Les extrema locaux d'une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sont à chercher parmi ses points critiques.

Exemple n° 3 : Recherchons les points critiques de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ldots\ldots \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \ldots\ldots\ldots$$

2. Application à la recherche d'extremums.

On se limite à la recherche d'extremums d'une fonction f sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Dans cette partie, nous commencerons par étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3y^2$.

Définition:

Un point qui annule le gradient (différentielle nulle) de f s'appelle un point **critique** de f.

Théorème

Les extrema locaux d'une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sont à chercher parmi ses points critiques.

Exemple n° 3 : Recherchons les points critiques de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{2x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \ldots\ldots\ldots$$

2. Application à la recherche d'extremums.

On se limite à la recherche d'extremums d'une fonction f sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Dans cette partie, nous commencerons par étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3y^2$.

Définition:

Un point qui annule le gradient (différentielle nulle) de f s'appelle un point **critique** de f.

Théorème

Les extrema locaux d'une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sont à chercher parmi ses points critiques.

Exemple n° 3 : Recherchons les points critiques de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{2x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{3y^2 + 6y}$$

2. Application à la recherche d'extremums.

On se limite à la recherche d'extremums d'une fonction f sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Dans cette partie, nous commencerons par étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^3 + 3y^2$.

Définition:

Un point qui annule le gradient (différentielle nulle) de f s'appelle un point **critique** de f.

Théorème

Les extrema locaux d'une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sont à chercher parmi ses points critiques.

Exemple n° 3 : Recherchons les points critiques de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{2x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{3y^2 + 6y}$$

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 + 6y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \left\{ \phantom{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}} \right. \qquad \iff \left\{ \phantom{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}} \right.$$

2. Application à la recherche d'extremums.

On se limite à la recherche d'extremums d'une fonction f sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Dans cette partie, nous commencerons par étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3y^2$.

Définition:

Un point qui annule le gradient (différentielle nulle) de f s'appelle un point **critique** de f.

Théorème

Les extrema locaux d'une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sont à chercher parmi ses points critiques.

Exemple n° 3 : Recherchons les points critiques de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{2x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{3y^2 + 6y}$$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 + 6y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y(3y+6) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \\ \end{cases}$$

2. Application à la recherche d'extremums.

On se limite à la recherche d'extremums d'une fonction f sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Dans cette partie, nous commencerons par étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3y^2$.

Définition:

Un point qui annule le gradient (différentielle nulle) de f s'appelle un point **critique** de f.

Théorème

Les extrema locaux d'une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sont à chercher parmi ses points critiques.

Exemple n° 3 : Recherchons les points critiques de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{2x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{3y^2 + 6y}$$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 + 6y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y(3y+6) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \text{ ou } y = -2 \end{cases}$$

Exemple n° 4 : $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3y^2$

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 + 6y \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = 0 \text{ ou } y = -2} \end{cases}$$

Exemple n° 4 : $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3y^2$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 + 6y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \text{ ou } y = -2 \end{cases}$$

On trouve 2 points critiques : $A\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Exemple n° 4 : $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3y^2$

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 + 6y \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = 0 \text{ ou } y = -2} \end{cases}$$

On trouve 2 points critiques : $A \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Exemple n° 4 : $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3y^2$

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 + 6y \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = 0 \text{ ou } y = -2} \end{cases}$$

On trouve 2 points critiques : $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Exemple n° 4 : $f(x, y) = x^2 + y^3 + 3y^2$

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 + 6y \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = 0 \text{ ou } y = -2} \end{cases}$$

On trouve 2 points critiques : $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$$f(0,0) = 0^2 + 0^3 + 3 \times 0^2 =$$

Exemple n° 4 : $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3y^2$

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 + 6y \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = 0 \text{ ou } y = -2} \end{cases}$$

On trouve 2 points critiques : $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$$f(0,0) = 0^2 + 0^3 + 3 \times 0^2 = 0$$

Exemple n° 4 : $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3y^2$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 + 6y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = 0 \text{ ou } y = -2} \end{cases}$$

On trouve 2 points critiques : $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$$f(0,0) = 0^2 + 0^3 + 3 \times 0^2 = 0$$

Exemple n° 4 : $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3y^2$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 + 6y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = 0 \text{ ou } y = -2} \end{cases}$$

On trouve 2 points critiques : $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Exemple n° 4 : $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3y^2$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 + 6y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = 0 \text{ ou } y = -2} \end{cases}$$

On trouve 2 points critiques : $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \dots \end{pmatrix}$

Exemple n° 4 : $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3y^2$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 + 6y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = 0 \text{ ou } y = -2} \end{cases}$$

On trouve 2 points critiques : $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \dots \end{pmatrix}$

$$f(0,-2) = 0^2 + (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 =$$

Exemple n° 4 : $f(x, y) = x^2 + y^3 + 3y^2$

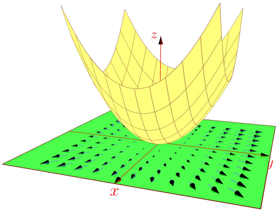
$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 + 6y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = 0 \text{ ou } y = -2} \end{cases}$$

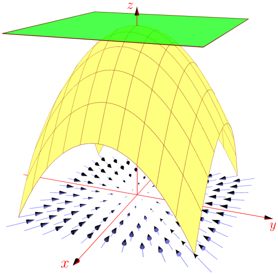
On trouve 2 points critiques : $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

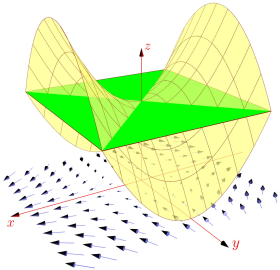
$$f(0, -2) = 0^2 + (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 = 4$$

Un point critique n'est pas nécessairement un extremum.

Un point critique n'est pas nécessairement un extremum.







Minimum

On voit que le minimum repousse les vecteurs gradients.

Maximum

On voit que les vecteurs gradients pointent bien vers le maximum.

Point selle

Un minimum suivant l'axe (Ox) et un maximum suivant l'axe (Oy).

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \ldots\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \ldots\ldots\ldots \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \ldots$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2} \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \ldots\ldots\ldots \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \ldots$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2}\ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boldsymbol{6y+6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \ldots$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2} \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boldsymbol{6y + 6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{6y+6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2} \text{ , } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{6y + 6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \mathbf{2} h^2 +$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2} \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{6y + 6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \mathbf{2} h^2 + 2 \times \mathbf{0} \times hk +$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2} \text{ , } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{6y + 6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \mathbf{2} h^2 + 2 \times \mathbf{0} \times hk + (\mathbf{6y + 6}) k^2 =$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{6y+6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \mathbf{2}h^2 + 2 \times \mathbf{0} \times hk + (\mathbf{6y+6})k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2} \text{ , } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{6y + 6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \mathbf{2} h^2 + 2 \times \mathbf{0} \times hk + (\mathbf{6y + 6}) k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2} \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{6y + 6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \mathbf{2} h^2 + 2 \times \mathbf{0} \times hk + (\mathbf{6y + 6}) k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

- **Etude du point A :**

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2} \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{6y+6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2 = \mathbf{2}h^2 + 2 \times \mathbf{0} \times hk + (\mathbf{6y+6})k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2 f(0,0) =$ .... donc le développement de Taylor s'écrit :

$f(0+h, 0+k) =$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{6y+6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \mathbf{2} h^2 + 2 \times \mathbf{0} \times hk + (\mathbf{6y+6}) k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2 f(0,0) = \mathbf{2\,dx^2 + 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

$$f(0+h, 0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \underbrace{\mathbf{d}\boldsymbol{f}\mathbf{(0,0).}\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)}_{=0} +$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2} \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boldsymbol{6y+6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2 = \mathbf{2}h^2 + 2 \times \mathbf{0} \times hk + (\boldsymbol{6y+6})k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2 f(0,0) = \mathbf{2\,dx^2 + 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

$$f(0+h, 0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \underbrace{\boldsymbol{\mathrm{d}f(0,0).\binom{h}{k}}}_{=0} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{\mathrm{d}^2 f(0,0).\binom{h}{k}^2} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{6y+6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \mathbf{2}h^2 + 2 \times \mathbf{0} \times hk + (\mathbf{6y+6})k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2 f(0,0) = \mathbf{2\,dx^2 + 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

$$f(0+h,0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \underbrace{\boldsymbol{\mathrm{d}f(0,0).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)}}_{=0} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\mathrm{d}^2 f(0,0).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$$

$$f(0+h,0+k) =$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2} \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{6y+6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2 = \mathbf{2}h^2 + 2 \times \mathbf{0} \times hk + (\mathbf{6y+6})k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2 f(0,0) = \mathbf{2\,dx^2 + 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

$$f(0+h, 0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \underbrace{\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\mathbf{0},\mathbf{0}).\binom{h}{k}}_{=0} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{d^2}\boldsymbol{f}(\mathbf{0},\mathbf{0}).\binom{h}{k}^{\mathbf{2}} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$$

$$f(0+h, 0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \boldsymbol{h^2} + \boldsymbol{3k^2} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boldsymbol{6y+6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \mathbf{2} h^2 + 2 \times \mathbf{0} \times hk + (\boldsymbol{6y+6}) k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2 f(0,0) = \mathbf{2\,dx^2 + 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

$$f(0+h, 0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \underbrace{\boldsymbol{\mathrm{d}f(0,0).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)}}_{=0} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{\mathrm{d}^2 f(0,0).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2} + \circ\boldsymbol{(h^2+k^2)}$$

$$f(0+h, 0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \boldsymbol{h^2 + 3k^2} + \circ\boldsymbol{(h^2+k^2)}$$

car

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{6y+6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \mathbf{2}h^2 + 2 \times \mathbf{0} \times hk + (\mathbf{6y+6})k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2 f(0,0) = \mathbf{2\,dx^2 + 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

$$f(0+h,0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \underbrace{\mathbf{d}\boldsymbol{f(0,0)}.\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)}_{=0} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \mathbf{d}^2 \boldsymbol{f(0,0)}.\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$$

$$f(0+h,0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \boldsymbol{h^2} + \boldsymbol{3k^2} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$$

car $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \mathbf{d}^2 \boldsymbol{f(0,0)}.\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 =$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{6y+6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \mathbf{2}h^2 + 2 \times \mathbf{0} \times hk + (\mathbf{6y+6})k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2 f(0,0) = \mathbf{2\,dx^2 + 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

$$f(0+h, 0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \underbrace{\boldsymbol{\mathrm{d}f(0,0).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)}}_{=0} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathrm{d}^2 f(0,0).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$$

$$f(0+h, 0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \boldsymbol{h^2 + 3k^2} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$$

$$\text{car } \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathrm{d}^2 f(0,0).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2} = \frac{1}{2}(\mathbf{2\,dx^2 + 6\,dy^2}).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 =$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boldsymbol{6y+6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix}h\\k\end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\times\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix}h\\k\end{smallmatrix}\right)^2 = \mathbf{2}h^2 + 2\times\mathbf{0}\times hk + (\boldsymbol{6y+6})k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

- **Etude du point $\boldsymbol{A}$:** $\mathrm{d}^2 f(0,0) = \mathbf{2\,dx^2 + 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

$$f(0+h,0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \underbrace{\boldsymbol{\mathrm{d}f(0,0).\left(\begin{smallmatrix}h\\k\end{smallmatrix}\right)}}_{=\mathbf{0}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\mathrm{d}^2 f(0,0).\left(\begin{smallmatrix}h\\k\end{smallmatrix}\right)^2} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$$

$$f(0+h,0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \boldsymbol{h^2+3k^2} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$$

$$\text{car } \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\mathrm{d}^2 f(0,0).\left(\begin{smallmatrix}h\\k\end{smallmatrix}\right)^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{(2\,\mathrm{d}x^2+6\,\mathrm{d}y^2).\left(\begin{smallmatrix}h\\k\end{smallmatrix}\right)^2} = \boldsymbol{h^2+3k^2}$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2}\ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boldsymbol{6y+6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \mathbf{2} h^2 + 2 \times \mathbf{0} \times hk + (\boldsymbol{6y+6}) k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2 f(0,0) = \mathbf{2\,dx^2 + 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

$$f(0+h, 0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \underbrace{\mathbf{d}\boldsymbol{f(0,0).}\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)}_{=0} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \mathbf{d^2}\boldsymbol{f(0,0).}\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^{\mathbf{2}} + \circ(\boldsymbol{h^2 + k^2})$$

$$f(0+h, 0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \boldsymbol{h^2 + 3k^2} + \circ(\boldsymbol{h^2 + k^2})$$

$$\text{car } \frac{1}{2} \mathrm{d}^2 f(0,0).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{1}{2}(2\,\mathrm{d}x^2 + 6\,\mathrm{d}y^2).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = h^2 + 3k^2$$

$$f(0+h, 0+k) - f(0,0) =$$

Pour déterminer la nature de chacun des deux points, on va étudier la différentielle d'ordre 2 en chacun de ces points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{2}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{6y+6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \mathbf{2} h^2 + 2 \times \mathbf{0} \times hk + (\mathbf{6y+6}) k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2 f(0,0) = \mathbf{2\,dx^2 + 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

$$f(0+h,0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \underbrace{\mathbf{d}\boldsymbol{f(0,0)}.\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)}_{=0} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \mathbf{d^2}\boldsymbol{f(0,0)}.\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^{\mathbf{2}} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$$

$$f(0+h,0+k) = \boldsymbol{f(0,0)} + \boldsymbol{h^2 + 3k^2} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$$

$$\text{car } \frac{1}{2}\mathbf{d^2}\boldsymbol{f(0,0)}.\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{2\,dx^2 + 6\,dy^2}).\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right)^2 = \boldsymbol{h^2 + 3k^2}$$

$$f(0+h,0+k) - f(0,0) = \boldsymbol{h^2 + 3k^2} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2 = \mathbf{2}h^2 + 2\times\mathbf{0}\times hk + (\boldsymbol{6y+6})k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2 = \mathbf{2}h^2 + 2\times\mathbf{0}\times hk + (\mathbf{6y+6})k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

- **Etude du point A :**

$$f(0+h,0+k) - f(0,0) = \boldsymbol{h^2 + 3k^2 + \circ(h^2+k^2)}$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2 = \mathbf{2}h^2 + 2\times\mathbf{0}\times hk + (\boldsymbol{6y+6})k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

- **Etude du point A :**

  $f(0+h,0+k) - f(0,0) = \boldsymbol{h^2 + 3k^2 + \circ(h^2+k^2)}$

  Donc, il existe un voisinage de A, où $f(0+h,0+k) - f(0,0) \geqslant \mathbf{0}$.

I. Différentielle d'ordre 2.

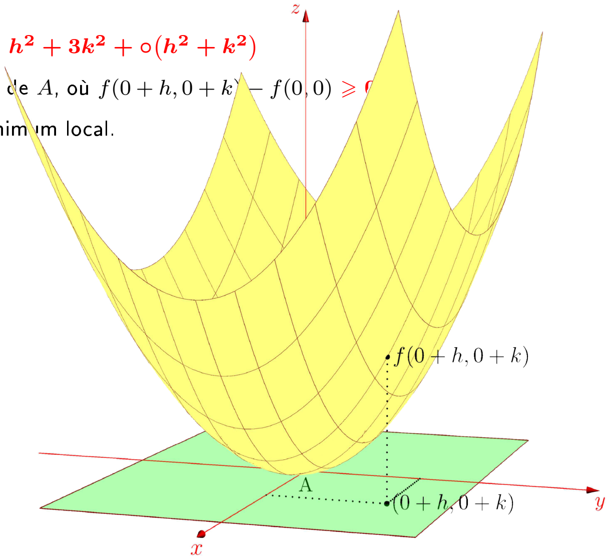
$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2 = \mathbf{2}h^2 + 2\times\mathbf{0}\times hk + (\boldsymbol{6y+6})k^2 = 2h^2 + (6y+6)k^2$$

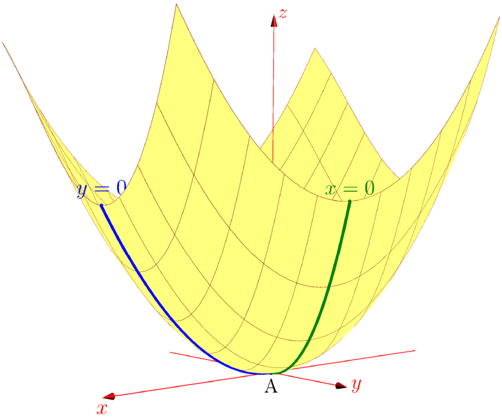
- **Etude du point A :**

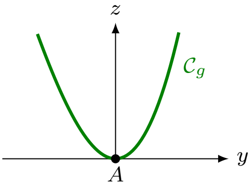
$f(0+h,0+k) - f(0,0) = \boldsymbol{h^2 + 3k^2 + \circ(h^2+k^2)}$

Donc, il existe un voisinage de A, où $f(0+h,0+k) - f(0,0) \geqslant 0$

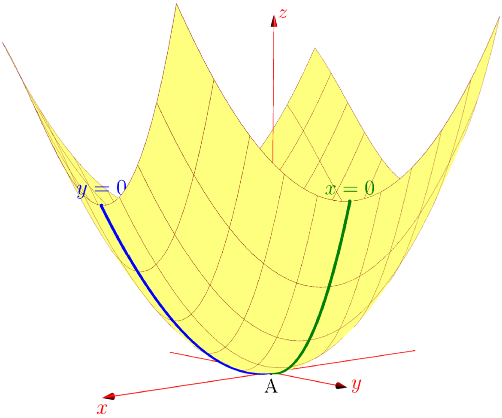
Le point A est donc un minimum local.

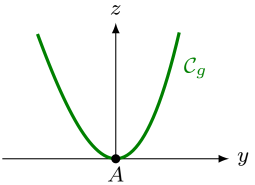




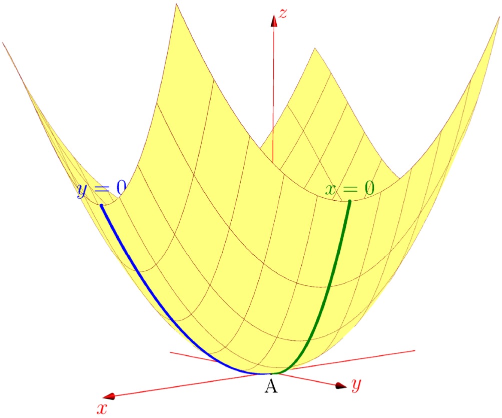


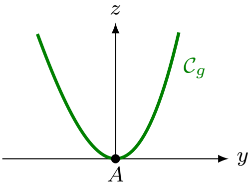
où $g : y \longmapsto$



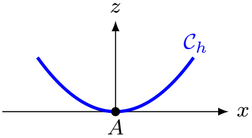


où $g : y \longmapsto \boldsymbol{f(0, y) = y^3 + 3y^2}$

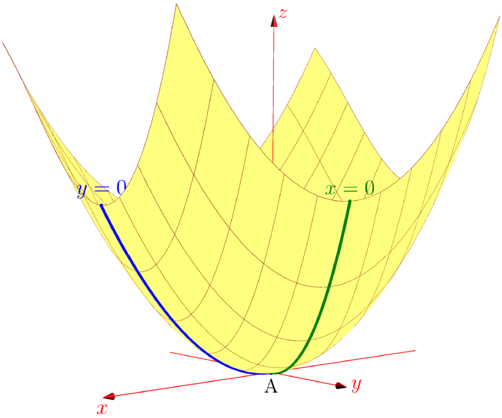


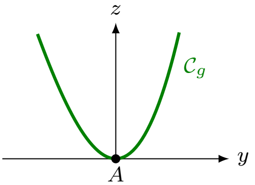


où $g : y \longmapsto$ $\boldsymbol{f(0, y) = y^3 + 3y^2}$

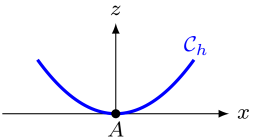


où $h : x \longmapsto$





où $g : y \longmapsto \boldsymbol{f(0, y) = y^3 + 3y^2}$



où $h : x \longmapsto \boldsymbol{f(x, 0) = x^2}$

- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2 f(0,-2) =$

- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2 f(0,-2) = \mathbf{2\,dx^2 - 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

  $f(0+h, -2+k) =$

- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2 f(0,-2) = \mathbf{2\,dx^2 - 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

  $f(0+h,-2+k) = \boldsymbol{f(0,-2)} + \boldsymbol{h^2 - 3k^2} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$

  $f(0+h,-2+k) - f(0,-2) =$

- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2 f(0,-2) = \mathbf{2\,dx^2 - 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

  $f(0+h,-2+k) = \boldsymbol{f(0,-2) + h^2 - 3k^2 + \circ(h^2+k^2)}$

  $f(0+h,-2+k) - f(0,-2) = \boldsymbol{h^2 - 3k^2 + \circ(h^2+k^2)}$

  Donc, le signe de $f(0+h,-2+k) - f(0,-2)$

- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2 f(0,-2) = \mathbf{2\,d}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{6\,d}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

  $f(0+h,-2+k) = \boldsymbol{f(0,-2) + h^2 - 3k^2 + \mathrm{o}(h^2+k^2)}$

  $f(0+h,-2+k) - f(0,-2) = \boldsymbol{h^2 - 3k^2 + \mathrm{o}(h^2+k^2)}$

  Donc, le signe de $f(0+h,-2+k) - f(0,-2)$ **fluctue** sur tout voisinage de B.

- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2 f(0,-2) = \mathbf{2\,dx^2 - 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

  $f(0+h,-2+k) = \boldsymbol{f(0,-2) + h^2 - 3k^2 + \circ(h^2+k^2)}$

  $f(0+h,-2+k) - f(0,-2) = \boldsymbol{h^2 - 3k^2 + \circ(h^2+k^2)}$

  Donc, le signe de $f(0+h,-2+k) - f(0,-2)$ **fluctue** sur tout voisinage de B.

  Le point B est un point selle.

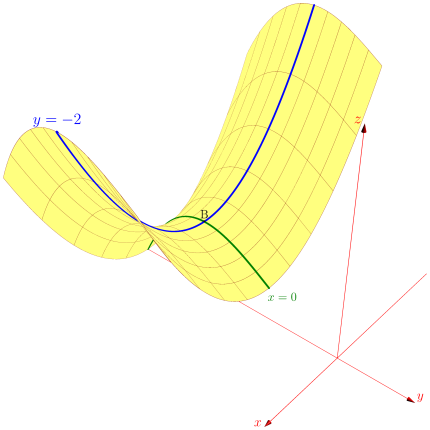
- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2 f(0,-2) = \mathbf{2\,dx^2 - 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

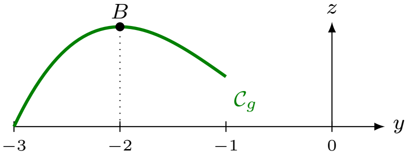
  $f(0+h,-2+k) = \boldsymbol{f(0,-2) + h^2 - 3k^2} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$

  $f(0+h,-2+k) - f(0,-2) = \boldsymbol{h^2 - 3k^2} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$

  Donc, le signe de $f(0+h,-2+k) - f(0,-2)$ **fluctue** sur tout voisinage de B.

  Le point B est un point selle.





$g : y \longmapsto$

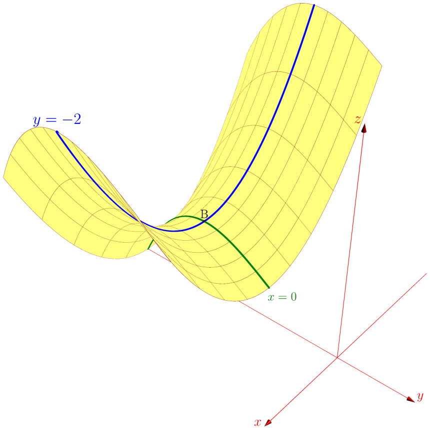
- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2f(0,-2) = \mathbf{2\,dx^2 - 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

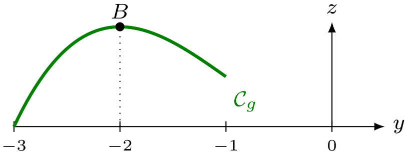
  $f(0+h,-2+k) = \boldsymbol{f(0,-2) + h^2 - 3k^2 + \circ(h^2+k^2)}$

  $f(0+h,-2+k) - f(0,-2) = \boldsymbol{h^2 - 3k^2 + \circ(h^2+k^2)}$

  Donc, le signe de $f(0+h,-2+k) - f(0,-2)$ **fluctue** sur tout voisinage de B.

  Le point B est un point selle.





$g : y \longmapsto \boldsymbol{f(0,y) = y^3 + 3y^2}$

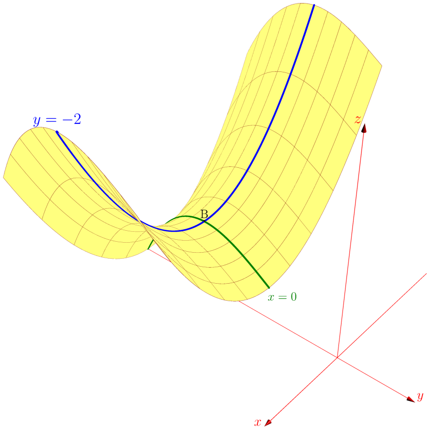
- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2 f(0,-2) = \mathbf{2\,dx^2 - 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

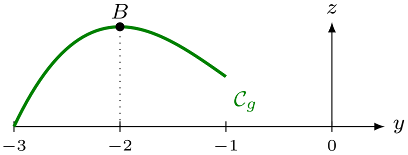
$$f(0+h,-2+k) = f(0,-2) + h^2 - 3k^2 + \circ(h^2+k^2)$$

$$f(0+h,-2+k) - f(0,-2) = h^2 - 3k^2 + \circ(h^2+k^2)$$

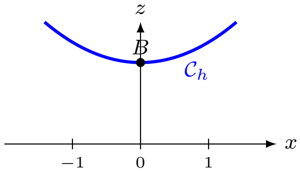
Donc, le signe de $f(0+h,-2+k) - f(0,-2)$ **fluctue** sur tout voisinage de B.

Le point B est un point selle.





$g : y \longmapsto f(0,y) = y^3 + 3y^2$



$h : x \longmapsto$

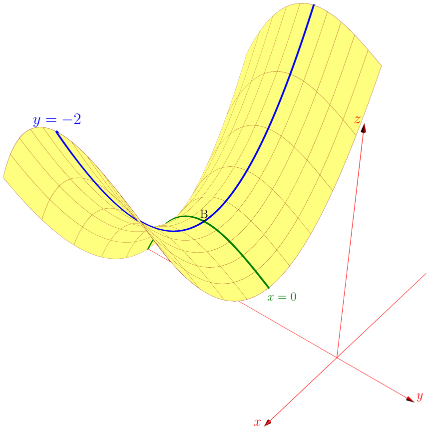
- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2 f(0,-2) = \mathbf{2\,dx^2 - 6\,dy^2}$ donc le développement de Taylor s'écrit :

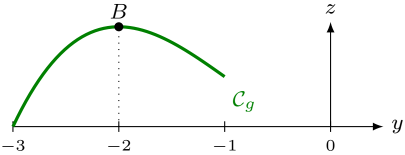
$f(0+h,-2+k) = \boldsymbol{f(0,-2) + h^2 - 3k^2 + o(h^2+k^2)}$

$f(0+h,-2+k) - f(0,-2) = \boldsymbol{h^2 - 3k^2 + o(h^2+k^2)}$

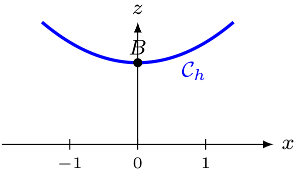
Donc, le signe de $f(0+h,-2+k) - f(0,-2)$ **fluctue** sur tout voisinage de B.

Le point B est un point selle.

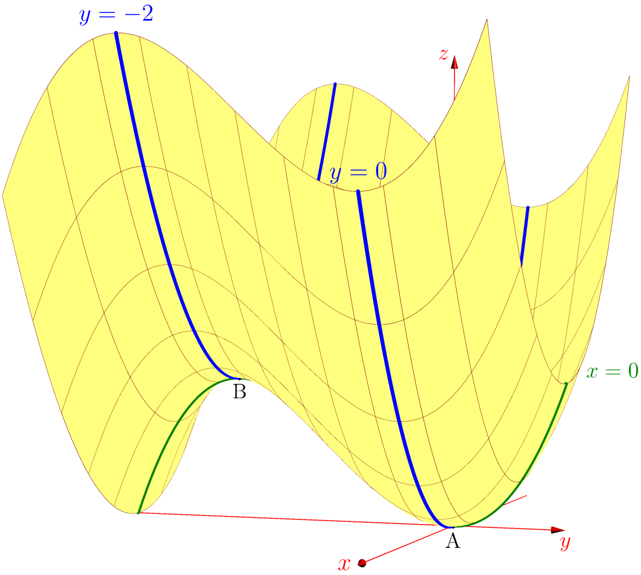




$g : y \longmapsto \boldsymbol{f(0,y) = y^3 + 3y^2}$



$h : x \longmapsto \boldsymbol{f(x,-2) = x^2 + 4}$



$y=-2$
$y=0$
z
$x=0$
B
A
y
x

Recherche des extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$$

Recherche des extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$$

1. On écrit la formule de Taylor à l'ordre 2 de la fonction f :

   On a vu que : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 6x - 36$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y$.

Recherche des extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$$

1. On écrit la formule de Taylor à l'ordre 2 de la fonction f :

On a vu que : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 6x - 36$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y$.

Il reste $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \ldots$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \ldots\ldots\ldots$, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \ldots\ldots\ldots$

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big] + \circ(x^2+y^2)$$

Recherche des extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$$

1. On écrit la formule de Taylor à l'ordre 2 de la fonction f :

On a vu que : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 6x - 36$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y$.

Il reste $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{2y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dots\dots\dots$, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dots\dots\dots$

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{1}{2}\Big[\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\Big] + \circ(x^2 + y^2)$$

Recherche des extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$$

1 On écrit la formule de Taylor à l'ordre 2 de la fonction f :

On a vu que : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 6x - 36$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y$.

Il reste $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{2y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{12x+6}$, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dots\dots\dots$

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{1}{2}\Big[\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\Big] + o(x^2+y^2)$$

Recherche des extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$$

1. On écrit la formule de Taylor à l'ordre 2 de la fonction f :

On a vu que : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 6x - 36$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y$.

Il reste $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{2y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{12x+6}$, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{2x+2}$

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{2}\Big[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big] + \circ(x^2+y^2)$$

Recherche des extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$$

1. On écrit la formule de Taylor à l'ordre 2 de la fonction f :

On a vu que : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 6x - 36$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y$.

Il reste $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{2y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{12x + 6}$, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{2x + 2}$

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2 + y^2 + 6x - 36)h + (2xy + 2y)k}_{df(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+ \frac{1}{2}\Big[\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \Big] + o(x^2 + y^2)$$

Recherche des extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$$

1. On écrit la formule de Taylor à l'ordre 2 de la fonction f :

On a vu que : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 6x - 36$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y$.

Il reste $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{2y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{12x + 6}$, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{2x + 2}$

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2 + y^2 + 6x - 36)h + (2xy + 2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+ \frac{1}{2} \underbrace{\left[(12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2\right]}_{\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2 + y^2\right)$$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$
$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{\left(6x^2+y^2+6x-36\right)h + \left(2xy+2y\right)k}_{df(x,y).\binom{h}{k}}$$
$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2\right)}_{d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \left\{ \right.$$

$$\iff \left\{ \right.$$

$$\iff \left\{ \right.$$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{df(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2\right)}_{d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \\ 2xy+2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \Bigg\{$$

$$\iff \Bigg\{$$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36=0 \\ 2xy+2y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36=0 \\ 2y(x+1)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \\ \end{cases}$$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{df(x,y).\binom{h}{k}}$$
$$+ \frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2)}_{d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \\ 2xy+2y = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$
$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- Cas n° 1 : $y = 0$.

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- **Cas n° 1 :** $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36 = 0$,

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{\left(6x^2+y^2+6x-36\right)h + \left(2xy+2y\right)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\ \frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0\ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- **Cas n° 1 :** $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36=0$, on trouve $x =$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- **Cas n° 1 :** $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36 = 0$, on trouve $x = \ -3$ ou $x =$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- **Cas n° 1 :** $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36 = 0$, on trouve $x = -3$ ou $x = 2$.

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{df(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2)}_{d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- Cas n° 1 : $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36 = 0$, on trouve $x = -3$ ou $x = 2$.
- Cas n° 2 : $x = -1$.

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

(2) On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- Cas n° 1 : $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36 = 0$, on trouve $x = -3$ ou $x = 2$.
- Cas n° 2 : $x = -1$. L'équation (E) devient $y^2 - 36 = 0$,

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{\left(6x^2+y^2+6x-36\right)h + \left(2xy+2y\right)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\ \frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- Cas n° 1 : $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36 = 0$, on trouve $x = -3$ ou $x = 2$.
- Cas n° 2 : $x = -1$. L'équation (E) devient $y^2 - 36 = 0$, on trouve $y =$

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h+(2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$
$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2}+\circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla}f(x,y)=\begin{pmatrix}6x^2+y^2+6x-36\\2xy+2y\end{pmatrix}=\vec{0}\iff\begin{cases}6x^2+y^2+6x-36=0\ (E)\\y=0\text{ ou }x=-1\end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- Cas n° 1 : $y=0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36=0$, on trouve $x=\ -3$ ou $x=2$.
- Cas n° 2 : $x=-1$. L'équation (E) devient $y^2-36=0$, on trouve $y=\ -6$ ou $y=$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{\left(6x^2+y^2+6x-36\right)h + \left(2xy+2y\right)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$
$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- Cas n° 1 : $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36=0$, on trouve $x = -3$ ou $x = 2$.
- Cas n° 2 : $x = -1$. L'équation (E) devient $y^2-36=0$, on trouve $y = -6$ ou $y = 6$.

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{\mathbf{(6x^2+y^2+6x-36)h+(2xy+2y)k}}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\mathbf{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

(2) On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- Cas n° 1 : $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36 = 0$, on trouve $x = -3$ ou $x = 2$.
- Cas n° 2 : $x = -1$. L'équation (E) devient $y^2-36 = 0$, on trouve $y = -6$ ou $y = 6$.

On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix} \dots \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} \dots \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix} -1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- Cas n° 1 : $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36 = 0$, on trouve $x = -3$ ou $x = 2$.
- Cas n° 2 : $x = -1$. L'équation (E) devient $y^2 - 36 = 0$, on trouve $y = -6$ ou $y = 6$.

On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} \dots \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix} -1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- **Cas n° 1 :** $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36 = 0$, on trouve $x = -3$ ou $x = 2$.
- **Cas n° 2 :** $x = -1$. L'équation (E) devient $y^2 - 36 = 0$, on trouve $y = -6$ ou $y = 6$.

On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 81 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} \dots \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix} -1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$
$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- Cas n° 1 : $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36 = 0$, on trouve $x = -3$ ou $x = 2$.
- Cas n° 2 : $x = -1$. L'équation (E) devient $y^2 - 36 = 0$, on trouve $y = -6$ ou $y = 6$.

On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 81 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix} -1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- **Cas n° 1 :** $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36 = 0$, on trouve $x = -3$ ou $x = 2$.
- **Cas n° 2 :** $x = -1$. L'équation (E) devient $y^2 - 36 = 0$, on trouve $y = -6$ ou $y = 6$.

On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 81 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -44 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix} -1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{df(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2\right)}_{d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- Cas n° 1 : $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36 = 0$, on trouve $x = -3$ ou $x = 2$.
- Cas n° 2 : $x = -1$. L'équation (E) devient $y^2 - 36 = 0$, on trouve $y = -6$ ou $y = 6$.

On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 81 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -44 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ \dots \end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix} -1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{\left(6x^2+y^2+6x-36\right)h + \left(2xy+2y\right)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\ \frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- Cas n° 1 : $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36 = 0$, on trouve $x = -3$ ou $x = 2$.
- Cas n° 2 : $x = -1$. L'équation (E) devient $y^2 - 36 = 0$, on trouve $y = -6$ ou $y = 6$.

On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 81 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -44 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 37 \end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix} -1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$
$$+ \frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- Cas n° 1 : $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36 = 0$, on trouve $x = -3$ ou $x = 2$.
- Cas n° 2 : $x = -1$. L'équation (E) devient $y^2 - 36 = 0$, on trouve $y = -6$ ou $y = 6$.

On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 81 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -44 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 37 \end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ \ldots \end{pmatrix}$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2 On recherche les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2+y^2+6x-36 \\ 2xy+2y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 6x^2+y^2+6x-36 = 0 \ (E) \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- Cas n° 1 : $y = 0$. L'équation (E) devient $6x^2+6x-36 = 0$, on trouve $x = -3$ ou $x = 2$.
- Cas n° 2 : $x = -1$. L'équation (E) devient $y^2 - 36 = 0$, on trouve $y = -6$ ou $y = 6$.

On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{df(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}_{d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point A :** $d^2f(-3,0) =$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2f(-3,0) = \mathbf{-30\,\mathrm{d}x^2 - 4\,\mathrm{d}y^2}$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2f(-3,0) = -30\,\mathrm{d}x^2 - 4\,\mathrm{d}y^2$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-3+h,0+k) =$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{df(x,y).\binom{h}{k}} + \frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}_{d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\,(x^2+y^2)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2f(-3,0) = -30\,\mathrm{d}x^2 - 4\,\mathrm{d}y^2$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-3+h,0+k) = f(-3,0) - 15h^2 - 2k^2 + \circ(h^2+k^2)$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$
$$+ \frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2f(-3,0) = -30\,\mathrm{d}x^2 - 4\,\mathrm{d}y^2$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-3+h, 0+k) = f(-3,0) - 15h^2 - 2k^2 + \circ(h^2+k^2)$

  $f(-3+h, 0+k) - f(-3,0) =$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2f(-3,0) = -30\,\mathrm{d}x^2 - 4\,\mathrm{d}y^2$ donc de Taylor s'écrit :

$$f(-3+h,0+k) = f(-3,0) - 15h^2 - 2k^2 + \circ(h^2+k^2)$$

$$f(-3+h,0+k) - f(-3,0) = -15h^2 - 2k^2 + \circ(h^2+k^2)$$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2+4yhk+(2x+2)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2f(-3,0) = -30\,\mathrm{d}x^2 - 4\,\mathrm{d}y^2$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-3+h,0+k) = f(-3,0) - 15h^2 - 2k^2 + \circ(h^2+k^2)$

  $f(-3+h,0+k) - f(-3,0) = -15h^2 - 2k^2 + \circ(h^2+k^2)$

  Donc, il existe un voisinage du point A où $f(-3+h,0+k) - f(-3,0)$

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h+(2xy+2y)k}_{df(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}_{d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2}+\circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2=(12x+6)h^2+4yhk+(2x+2)k^2$$

- **Etude du point A :** $d^2f(-3,0)=\mathbf{-30\,dx^2-4\,dy^2}$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-3+h,0+k)=f(-3,0)-15h^2-2k^2+\circ(h^2+k^2)$

  $f(-3+h,0+k)-f(-3,0)=-15h^2-2k^2+\circ(h^2+k^2)$

  Donc, il existe un voisinage du point A où $f(-3+h,0+k)-f(-3,0)\leqslant 0$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{\mathbf{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\ \frac{1}{2}\underbrace{\mathbf{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point A :** $\mathrm{d}^2f(-3,0) = \mathbf{-30\,dx^2 - 4\,dy^2}$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-3+h,0+k) = \boldsymbol{f(-3,0) - 15h^2 - 2k^2 + \circ(h^2+k^2)}$

  $f(-3+h,0+k) - f(-3,0) = \boldsymbol{-15h^2 - 2k^2 + \circ(h^2+k^2)}$

  Donc, il existe un voisinage du point A où $f(-3+h,0+k) - f(-3,0) \leqslant \mathbf{0}$

  Il s'en suit que ***A* est un maximum local.**

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2f(2,0) =$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + o\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2f(2,0) = -30\,\mathrm{d}x^2 + 6\,\mathrm{d}y^2$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2f(2,0) = -30\,\mathrm{d}x^2 + 6\,\mathrm{d}y^2$ donc de Taylor s'écrit :

$f(2+h,0+k) - f(2,0) =$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2f(2,0) = -30\,\mathrm{d}x^2 + 6\,\mathrm{d}y^2$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(2+h,0+k) - f(2,0) = 15h^2 + 3k^2 + \circ(h^2+k^2)$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$
$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2+4yhk+(2x+2)k^2$$

- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2f(2,0) = -30\,\mathrm{d}x^2 + 6\,\mathrm{d}y^2$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(2+h,0+k)-f(2,0) = 15h^2+3k^2+\circ(h^2+k^2)$

  $f(2+h,0+k)-f(2,0) =$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{\boldsymbol{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\boldsymbol{((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2)}}_{\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2 f(2,0) = \boldsymbol{-30\,\mathrm{d}x^2 + 6\,\mathrm{d}y^2}$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(2+h,0+k) - f(2,0) = \boldsymbol{15h^2 + 3k^2} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$

  $f(2+h,0+k) - f(2,0) = \boldsymbol{15h^2 + 3k^2} + \circ(\boldsymbol{h^2+k^2})$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2+4yhk+(2x+2)k^2$$

- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2f(2,0) = -30\,\mathrm{d}x^2 + 6\,\mathrm{d}y^2$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(2+h,0+k)-f(2,0) = 15h^2+3k^2+\circ(h^2+k^2)$

  $f(2+h,0+k)-f(2,0) = 15h^2+3k^2+\circ(h^2+k^2)$

  Donc, il existe un voisinage du point B où $f(2+h,0+k)-f(2,0)$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2+4yhk+(2x+2)k^2$$

- **Etude du point B :** $\mathrm{d}^2f(2,0) = -30\,\mathrm{d}x^2 + 6\,\mathrm{d}y^2$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(2+h,0+k)-f(2,0) = 15h^2+3k^2+\circ(h^2+k^2)$

  $f(2+h,0+k)-f(2,0) = 15h^2+3k^2+\circ(h^2+k^2)$

  Donc, il existe un voisinage du point B où $f(2+h,0+k)-f(2,0) \geqslant 0$

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h+(2xy+2y)k}_{df(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2\right)}_{d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2}+\circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2=(12x+6)h^2+4yhk+(2x+2)k^2$$

- **Etude du point B :** $d^2f(2,0)=-30\,dx^2+6\,dy^2$ donc de Taylor s'écrit :

$f(2+h,0+k)-f(2,0)=15h^2+3k^2+\circ(h^2+k^2)$

$f(2+h,0+k)-f(2,0)=15h^2+3k^2+\circ(h^2+k^2)$

Donc, il existe un voisinage du point B où $f(2+h,0+k)-f(2,0)\geqslant 0$

Il s'en suit que **B est un minimum local.**

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{\mathbf{(6x^2+y^2+6x-36)h+(2xy+2y)k}}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\mathbf{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2+4yhk+(2x+2)k^2$$

- **Etude du point C :** $\mathrm{d}^2f(-1,-6) =$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\ \frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point C :** $\mathrm{d}^2 f(-1,-6) = \mathbf{-6\,\mathrm{d}x^2 - 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\ \frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\,(x^2+y^2)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point C :** $\mathrm{d}^2f(-1,-6) = -6\,\mathrm{d}x^2 - 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-1+h,-6+k) - f(-1,-6) =$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point C :** $\mathrm{d}^2f(-1,-6) = -6\,\mathrm{d}x^2 - 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-1+h,-6+k) - f(-1,-6) = -3h^2 - 12hk + \circ(h^2+k^2)$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2+4yhk+(2x+2)k^2$$

- **Etude du point C :** $\mathrm{d}^2f(-1,-6) = -6\,\mathrm{d}x^2 - 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-1+h,-6+k)-f(-1,-6) = -3h^2-12hk + \circ(h^2+k^2)$

  Comme $-3h^2-12hk =$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{df(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2\right)}_{d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2+4yhk+(2x+2)k^2$$

- **Etude du point C :** $d^2f(-1,-6) = -6\,dx^2 - 24\,dx\,dy$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-1+h,-6+k)-f(-1,-6) = -3h^2-12hk+\circ(h^2+k^2)$

  Comme $-3h^2-12hk = -3(h^2+4hk) =$

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\underbrace{\left(6x^2+y^2+6x-36\right)h+\left(2xy+2y\right)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2}+\circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2=(12x+6)h^2+4yhk+(2x+2)k^2$$

- **Etude du point C :** $\mathrm{d}^2f(-1,-6)=-6\,\mathrm{d}x^2-24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-1+h,-6+k)-f(-1,-6)=-3h^2-12hk+\circ\left(h^2+k^2\right)$

  Comme $-3h^2-12hk=-3(h^2+4hk)=-3\left[(h+2k)^2-4k^2\right]=$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point C :** $\mathrm{d}^2f(-1,-6) = -6\,\mathrm{d}x^2 - 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-1+h,-6+k) - f(-1,-6) = -3h^2 - 12hk + \circ(h^2+k^2)$

  Comme $-3h^2 - 12hk = -3\left[(h+2k)^2 - 4k^2\right] = -3(h+2k)^2 + 12k^2$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2+4yhk+(2x+2)k^2$$

- **Etude du point C :** $\mathrm{d}^2f(-1,-6) = -6\,\mathrm{d}x^2 - 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-1+h,-6+k)-f(-1,-6) = -3h^2-12hk+\circ(h^2+k^2)$

  Comme $-3h^2-12hk = -3\left[(h+2k)^2-4k^2\right] = -3(h+2k)^2+12k^2$

  qui a un signe non constant sur tout voisinage de C.

  $f(-1+h,-6+k)-f(-1,-6) = -3(h+2k)^2+12k^2$, donc C n'est pas un extremum local.

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2+4yhk+(2x+2)k^2$$

- **Etude du point D :** $\mathrm{d}^2f(-1,6) =$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{df(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2)}_{d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point D :** $d^2f(-1,6) = -6\,dx^2 + 24\,dx\,dy$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point D :** $\mathrm{d}^2f(-1,6) = -6\,\mathrm{d}x^2 + 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-1+h,6+k) - f(-1,6) =$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{\mathbf{(6x^2+y^2+6x-36)h+(2xy+2y)k}}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\ \mathbf{\frac{1}{2}}\underbrace{\mathbf{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2+4yhk+(2x+2)k^2$$

- **Etude du point D :** $\mathrm{d}^2f(-1,6) = \mathbf{-6\,dx^2+24\,dx\,dy}$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-1+h,6+k)-f(-1,6) = \mathbf{-3h^2+12hk} + \circ(\mathbf{h^2+k^2})$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$
$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :
$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point D :** $\mathrm{d}^2f(-1,6) = -6\,\mathrm{d}x^2 + 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-1+h,6+k) - f(-1,6) = -3h^2 + 12hk + \circ(h^2+k^2)$

  Comme $-3h^2 + 12hk =$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2+4yhk+(2x+2)k^2$$

- **Etude du point D :** $\mathrm{d}^2f(-1,6) = -6\,\mathrm{d}x^2 + 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-1+h,6+k)-f(-1,6) = -3h^2+12hk+\circ(h^2+k^2)$

  Comme $-3h^2+12hk = -3(h^2-4hk) =$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{\left(6x^2+y^2+6x-36\right)h + \left(2xy+2y\right)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2\right)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2+4yhk+(2x+2)k^2$$

- **Etude du point D :** $\mathrm{d}^2f(-1,6) = -6\,\mathrm{d}x^2 + 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ donc de Taylor s'écrit :

  $$f(-1+h,6+k)-f(-1,6) = -3h^2+12hk+\circ(h^2+k^2)$$

  Comme $-3h^2+12hk = -3(h^2-4hk) = -3\left[(h-2k)^2-4k^2\right] =$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{df(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2 + (4y)hk + (2x+2)k^2)}_{d^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point D :** $\mathrm{d}^2 f(-1,6) = -6\,\mathrm{d}x^2 + 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-1+h,6+k) - f(-1,6) = -3h^2 + 12hk + \circ(h^2+k^2)$

  Comme $-3h^2+12hk = -3\left[(h-2k)^2 - 4k^2\right] = -3(h-2k)^2 + 12k^2$

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{(6x^2+y^2+6x-36)h + (2xy+2y)k}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{((12x+6)h^2+(4y)hk+(2x+2)k^2)}_{\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2} + \circ\left(x^2+y^2\right)$$

2. On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix}-3\\0\\81\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-44\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-6\\37\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}-1\\6\\37\end{pmatrix}$

3. Pour étudier la nature chacun de ces points, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

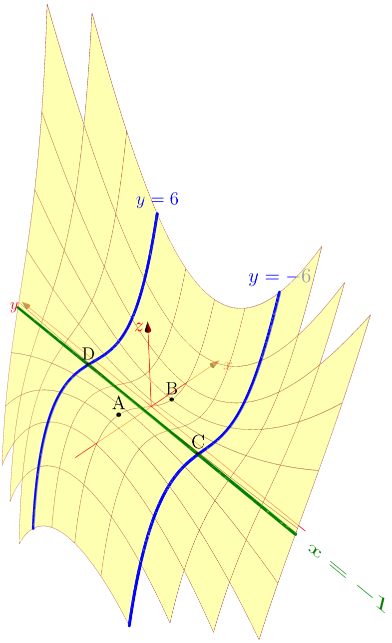
$$\mathrm{d}^2f(x,y).\binom{h}{k}^2 = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point D :** $\mathrm{d}^2f(-1,6) = -6\,\mathrm{d}x^2 + 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ donc de Taylor s'écrit :

  $f(-1+h,6+k) - f(-1,6) = -3h^2 + 12hk + \circ(h^2+k^2)$

  Comme $-3h^2+12hk = -3\left[(h-2k)^2 - 4k^2\right] = -3(h-2k)^2 + 12k^2$

  qui a un signe non constant sur tout voisinage de D, donc D n'est pas un extremum local.



$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y$ donc cette dérivée partielle est nulle dans le plan d'équation $x = -1$. L'intersection de ce plan avec la surface $\mathcal{S}_f$ est la droite (DC). Donc, f est constante sur cette droite. D et C ne peuvent être des extremums.

D'autre part, C est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x, 6)$. Il en est de même pour D.

3. Matrice Hessienne et recherche d'extremums.

Supposons que f soit une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont continues.
On a vu (formule de **Taylor**) que :

3. Matrice Hessienne et recherche d'extremums.

Supposons que f soit une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont continues.
On a vu (formule de **Taylor**) que :

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) +$$

3. Matrice Hessienne et recherche d'extremums.

Supposons que f soit une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont continues.
On a vu (formule de **Taylor**) que :

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} +$$

3. Matrice Hessienne et recherche d'extremums.

Supposons que f soit une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont continues.
On a vu (formule de **Taylor**) que :

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \mathrm{d}f(x, y).\binom{h}{k} + \frac{1}{2}\left[\mathrm{d}^2 f(x, y).\left(\binom{h}{k}, \binom{h}{k}\right)\right] +$$

3. Matrice Hessienne et recherche d'extremums.

Supposons que f soit une fonction définie sur un voisinage de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont continues.
On a vu (formule de **Taylor**) que :

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \mathrm{d}f(x, y).\binom{h}{k} + \frac{1}{2}\left[\mathrm{d}^2 f(x, y).\left(\binom{h}{k}, \binom{h}{k}\right)\right] + \circ\left(\left\|\binom{h}{k}\right\|^2\right)$$

3. Matrice Hessienne et recherche d'extremums.

Supposons que f soit une fonction définie sur un voisinage de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont continues.
On a vu (formule de **Taylor**) que :

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} + \frac{1}{2}\left[\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right)\right] + \circ\left(\left\|\binom{h}{k}\right\|^2\right)$$

La recherche des extremums de f consiste à chercher les points qui annulent de gradient $\big(\mathrm{d}f(x,y)=0\big)$, on les appellent les points **critiques**), puis à étudier le signe de la forme bilinéaire $\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right)$ lorsque $\binom{h}{k}$ parcourt $\mathbb{R}^2$. S'il elle est positive, le point critique est un point est un minimum, si elle est négative, le point critique est un maximum, si elle change de signe, le point critique est un point col.

$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\times h^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\times hk + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\times k^2$ est une forme quadratique dont la matrice associée est :

I. Différentielle d'ordre 2.

$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times h^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \times k^2$ est une forme quadratique dont la matrice associée est :

Définition:

Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ dont toutes dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues, on appelle **Hessienne** de f la matrice :

$$\nabla^2(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \left[\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & f(x_1,\ldots,x_n) \end{array}\right.$$

$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times h^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times hk + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \times k^2$ est une forme quadratique dont la matrice associée est :

Définition:

Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ dont toutes dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues, on appelle **Hessienne** de f la matrice :

$$\nabla^2(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \left[\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & f(x_1,\dots,x_n) \end{array} \right.$$

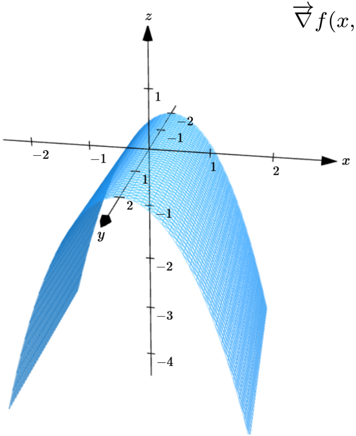
Remarque: D'après le théorème de Schwarz, la matrice Hessienne est symétrique.

Théorème

Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ dont toutes dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues et dont le gradient s'annule en $a \in \mathbb{R}^n$. Si la signature (s, t) de la forme quadratique associée à la hessienne $\nabla^2(f)$ est

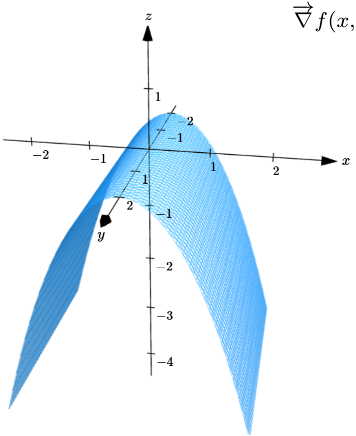
- définie $(s + t = n)2$, $s \neq 0$ et $t \neq 0$ alors a est un point selle.
- définie négative $(t = n)$, alors a est un **maximum local** ;
- définie positive $(s = n)$, alors a est un **minimum local**.

Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



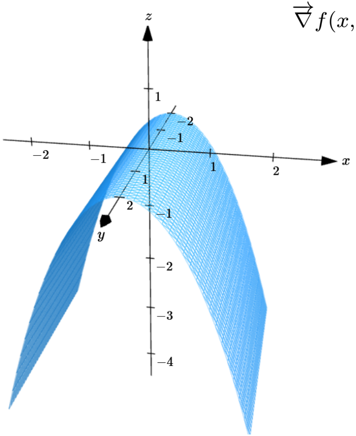
$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x =$$

Exemple n° 5 : Etude de $f(x, y) = -x^2$



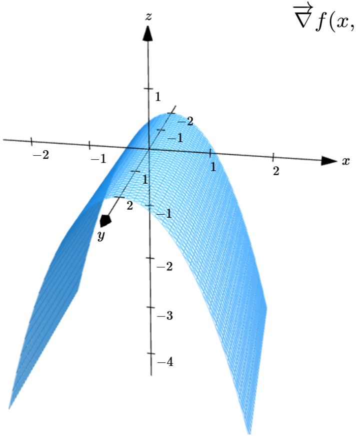
$$\overrightarrow{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \\ \\ \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff x =$$

Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



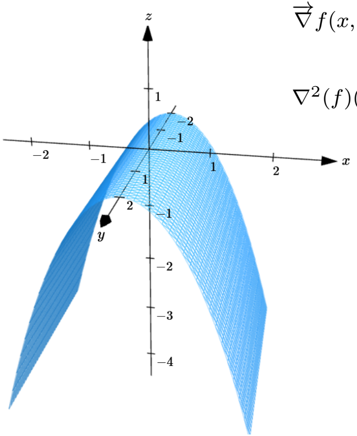
$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x =$$

Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

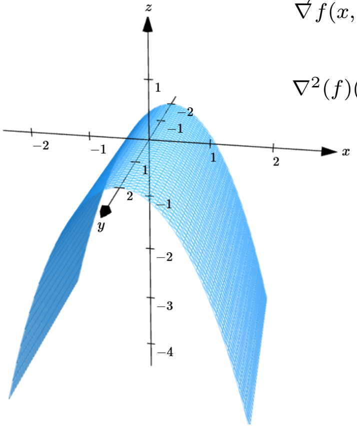
Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

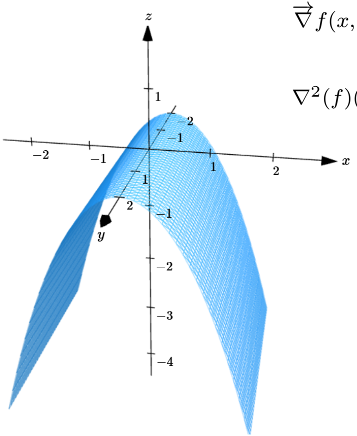
Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & \\ & \end{pmatrix}$$

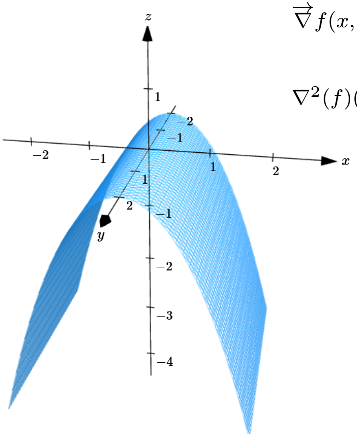
Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}$$

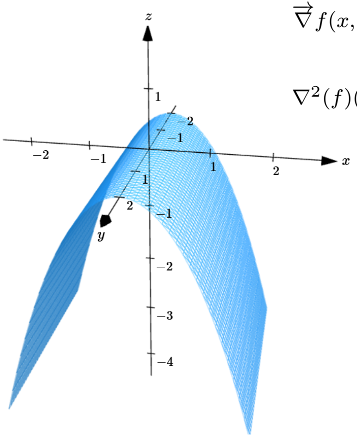
Exemple n° 5 : Etude de $f(x, y) = -x^2$



$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

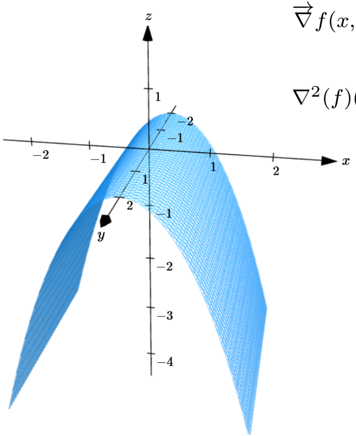
Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

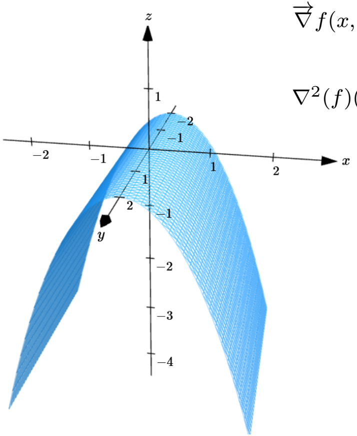
Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(f)(\ ,\ ) = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

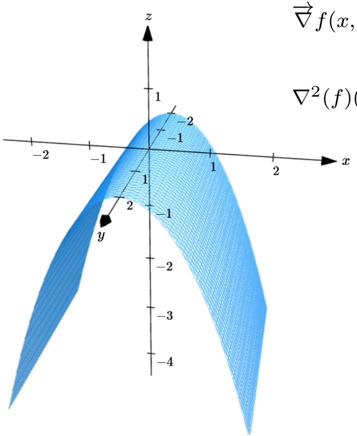
Exemple n° 5 : Etude de $f(x, y) = -x^2$



$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(f)(0,\ ) = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

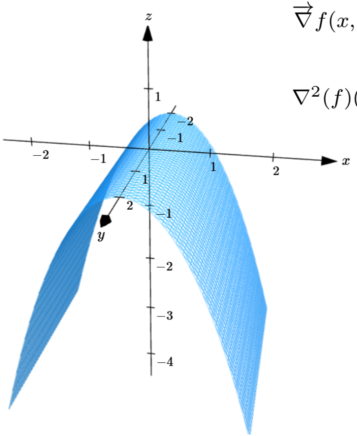
Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(f)(0,y) = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

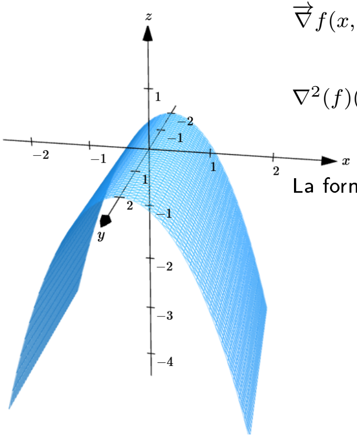
Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(f)(0,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



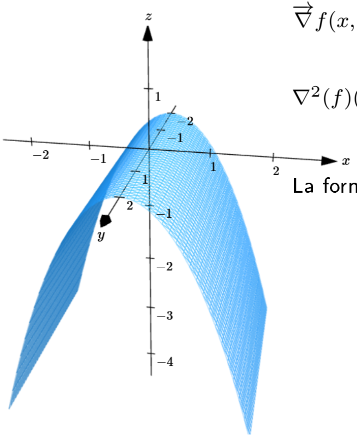
$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(f)(0,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme quadratique associée à $\nabla^2(f)$ est

$$q(x,y) =$$

Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



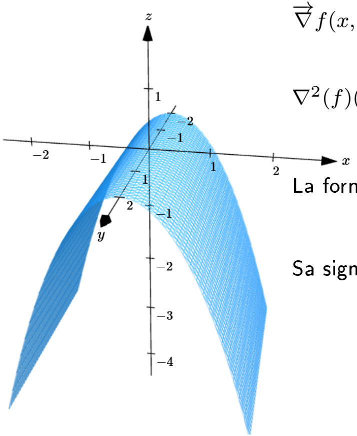
$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(f)(0,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme quadratique associée à $\nabla^2(f)$ est

$$q(x,y) = \mathbf{-2x^2}.$$

Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

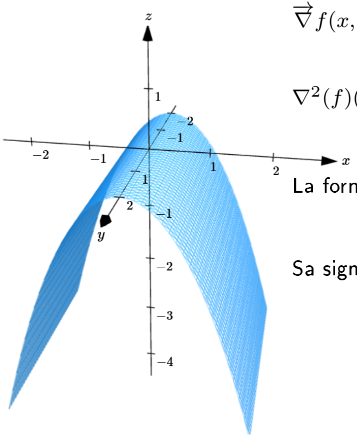
$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(f)(0,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme quadratique associée à $\nabla^2(f)$ est

$$q(x,y) = \mathbf{-2x^2}.$$

Sa signature est

Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

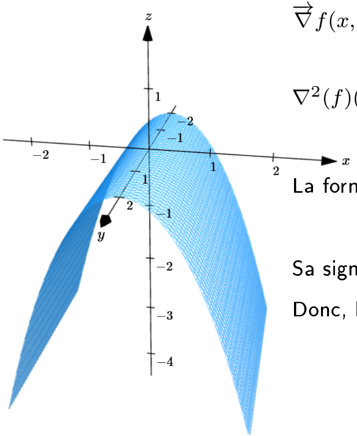
$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(f)(0,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme quadratique associée à $\nabla^2(f)$ est

$$q(x,y) = \mathbf{-2x^2}.$$

Sa signature est $\mathbf{(0,1)}$.

Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(f)(0,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

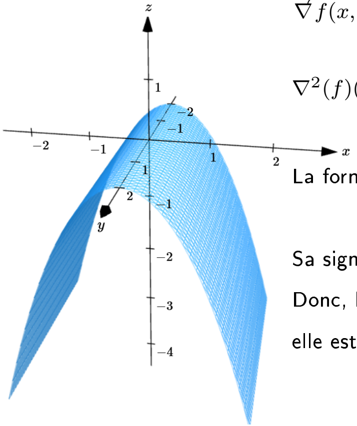
La forme quadratique associée à $\nabla^2(f)$ est

$$q(x,y) = \mathbf{-2x^2}.$$

Sa signature est $\mathbf{(0,1)}$.

Donc, la forme quadratique q **n'est pas une forme définie,**

Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(f)(0,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme quadratique associée à $\nabla^2(f)$ est

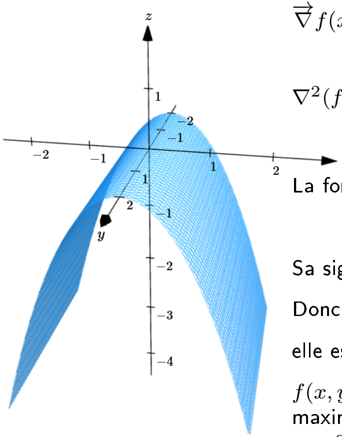
$$q(x,y) = \boldsymbol{-2x^2}.$$

Sa signature est $\mathbf{(0,1)}$.

Donc, la forme quadratique q **n'est pas une forme définie**,

elle est **semi-définie négative**.

Exemple n° 5 : Etude de $f(x,y) = -x^2$



$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(f)(0,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme quadratique associée à $\nabla^2(f)$ est

$$q(x,y) = \mathbf{-2x^2}.$$

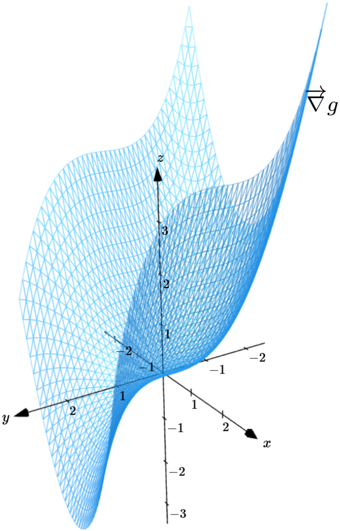
Sa signature est $\mathbf{(0,1)}$.

Donc, la forme quadratique q **n'est pas une forme définie,**

elle est **semi-définie négative**.

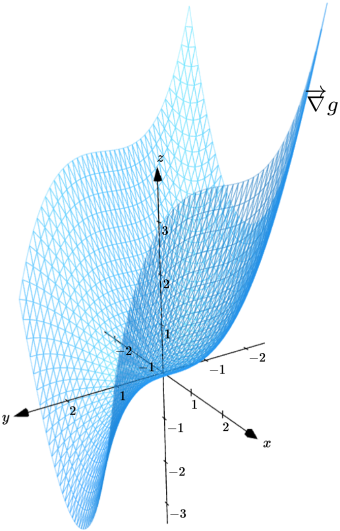
$f(x,y) = -x^2$ admet un maximum, mais, il s'agit d'un maximum non **strict** qui est atteint sur toute une droite $x = 0$ du plan (xOy).

Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



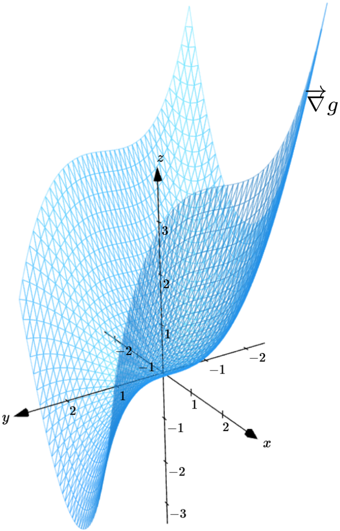
$$\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff x =$$

Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



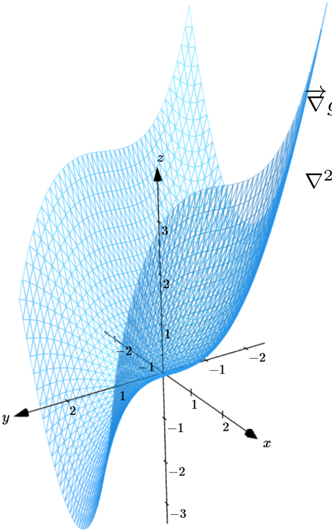
$$\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et}$$

Exemple n° 6 : Etude de $f(x, y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$$\overrightarrow{\nabla} g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

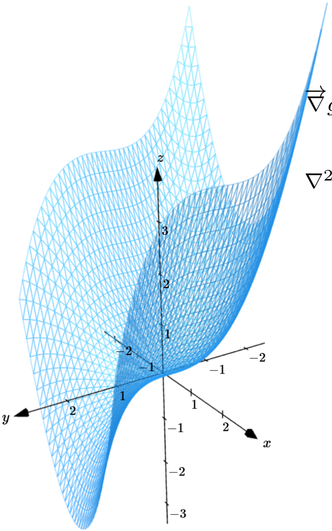
Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$$\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \text{ donc}$$

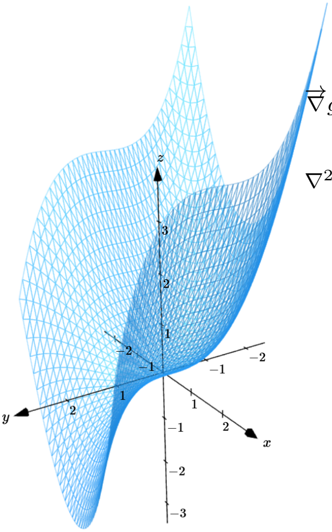
Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$$\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & \\ & \end{pmatrix} \text{ donc}$$

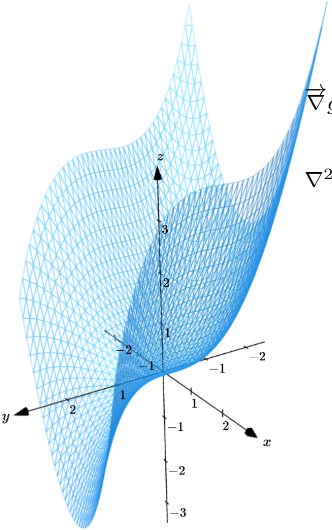
Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$$\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ & \end{pmatrix} \text{ donc}$$

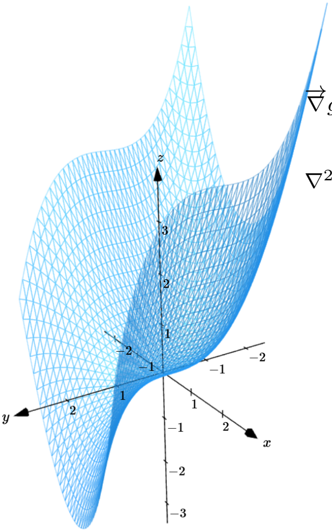
Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$$\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \text{ donc}$$

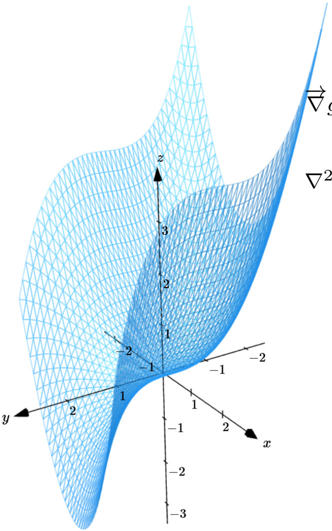
Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$$\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix} \text{ donc}$$

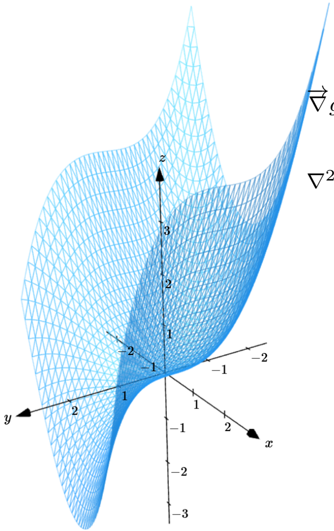
Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}.$



$$\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(g)(\ ,\ ) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

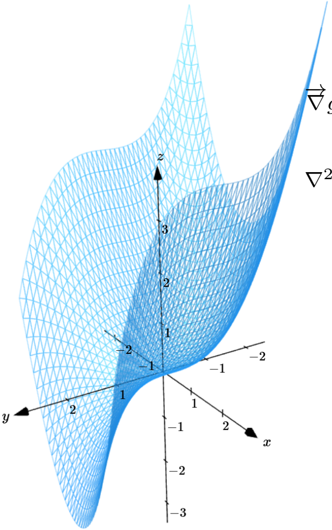
Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$$\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(g)(0, \ ) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

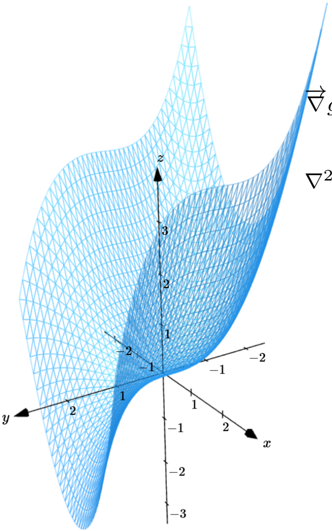
Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$$\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(g)(0,0) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

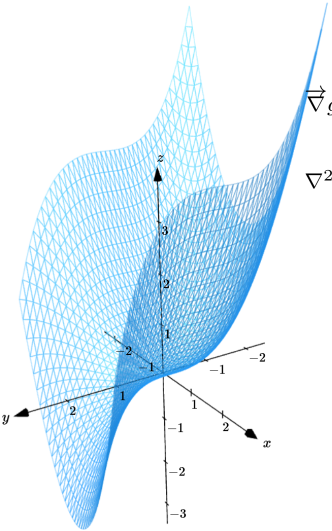
Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$$\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & \\ & \end{pmatrix}$$

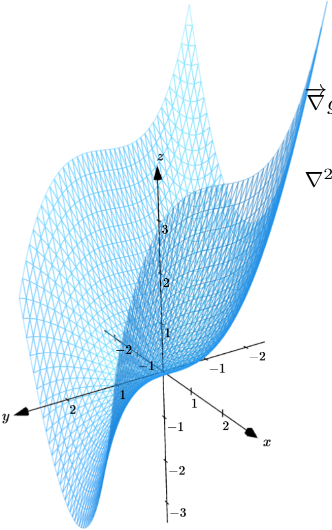
Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$$\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

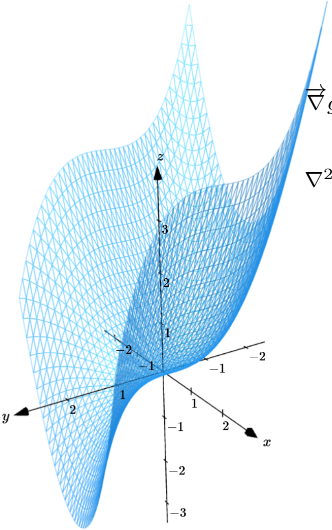
Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$$\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

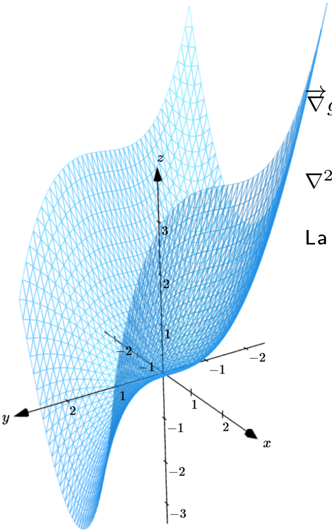
Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$$\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.

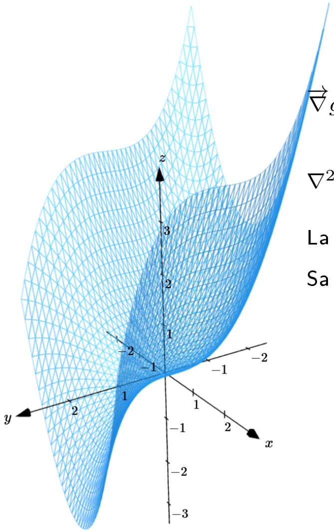


$$\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme quadratique associée à $\nabla^2(g)$ est $q(x,y) =$

Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



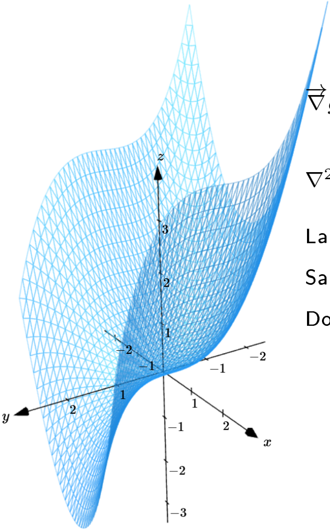
$\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0}$ et $y = \mathbf{0}$.

$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix}$ donc $\nabla^2(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

La forme quadratique associée à $\nabla^2(g)$ est $q(x,y) = \mathbf{2x^2}$.

Sa signature est

Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$$\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

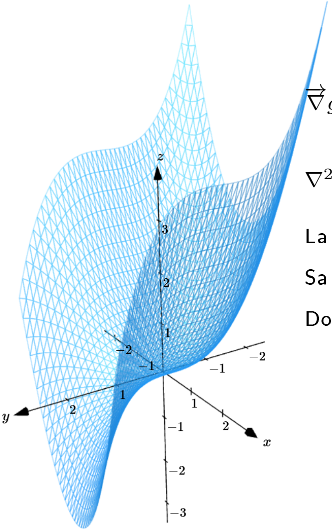
$$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme quadratique associée à $\nabla^2(g)$ est $q(x,y) = \mathbf{2x^2}$.

Sa signature est $\mathbf{(1,0)}$.

Donc, la forme quadratique q

Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff x = \mathbf{0}$ et $y = \mathbf{0}$.

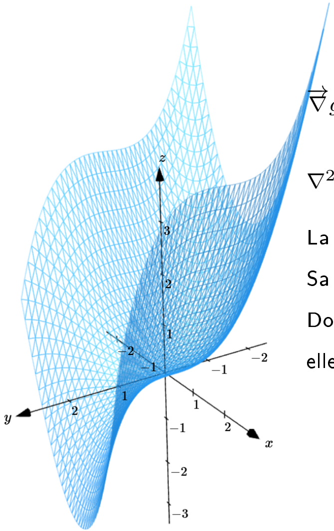
$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix}$ donc $\nabla^2(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

La forme quadratique associée à $\nabla^2(g)$ est $q(x,y) = \mathbf{2x^2}$.

Sa signature est $\mathbf{(1,0)}$.

Donc, la forme quadratique q **n'est pas une forme définie**,

Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$$\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

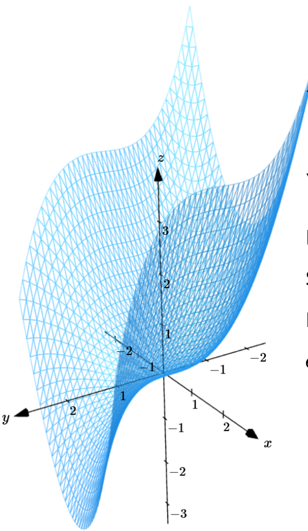
La forme quadratique associée à $\nabla^2(g)$ est $q(x,y) = \mathbf{2x^2}$.

Sa signature est $\mathbf{(1,0)}$.

Donc, la forme quadratique q **n'est pas une forme définie**,

elle est

Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$$\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

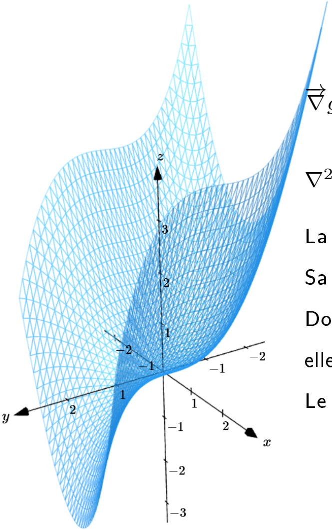
La forme quadratique associée à $\nabla^2(g)$ est $q(x,y) = \mathbf{2x^2}$.

Sa signature est $\mathbf{(1,0)}$.

Donc, la forme quadratique q **n'est pas une forme définie**,

elle est **semi-définie positive**.

Exemple n° 6 : Etude de $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0}$ et $y = \mathbf{0}$.

$\nabla^2(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix}$ donc $\nabla^2(g)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

La forme quadratique associée à $\nabla^2(g)$ est $q(x,y) = \mathbf{2x^2}$.

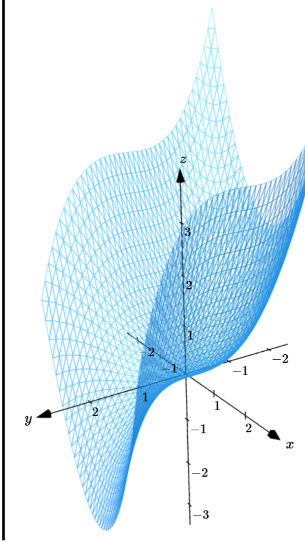
Sa signature est $\mathbf{(1,0)}$.

Donc, la forme quadratique q **n'est pas une forme définie**,

elle est **semi-définie positive**.

Le point $(0,0)$ **n'est pas un extremum**,

Exemple n° 6 : Etude de $f(x, y) = x^2 + \frac{y^3}{3}$.



$$\vec{\nabla} g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ et } y = \mathbf{0}.$$

$$\nabla^2(g)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla^2(g)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme quadratique associée à $\nabla^2(g)$ est $q(x, y) = \mathbf{2x^2}$.

Sa signature est $\mathbf{(1, 0)}$.

Donc, la forme quadratique q **n'est pas une forme définie**,

elle est **semi-définie positive**.

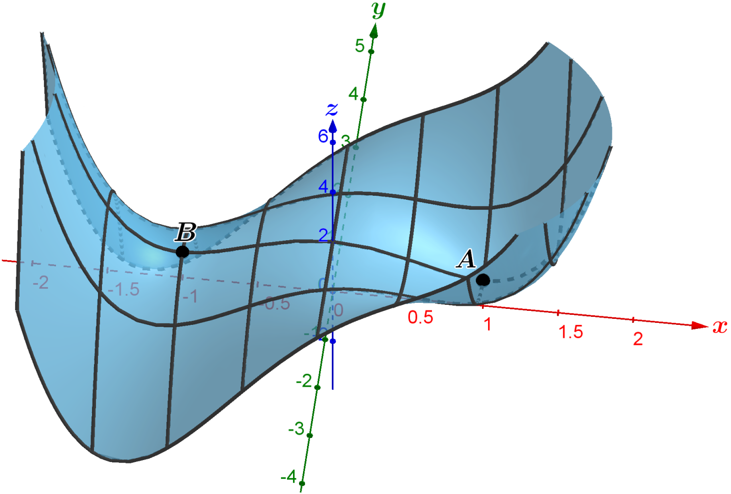
Le point $(0, 0)$ **n'est pas un extremum,**

c'est un point selle ou plutôt un point "chaise"...

Exemple n° 7 : Etude de $h(x,y,z) = y^2z + y^2 + 2x - 16z + x^2$

Exercice n° 1 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + xy^2 + 2$.
Détermine la nature de ses deux points critiques $A(1, 0, 1)$ et $B(-1, 0, 1)$.

Exercice n° 1 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + xy^2 + 2$.
Détermine la nature de ses deux points critiques $A(1,0,1)$ et $B(-1,0,1)$.



Exercice n° 2 : Pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$
2. $g(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$
3. $h(x,y) = x^2y - 4y$
4. $i(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$
5. $j(x) = x^2y^2 + 4x^2y + 3x^2 - 4y^2 - 16y - 12$

1. Détermine son gradient.
2. Détermine ses points critiques.
3. Ecris sa formule de Taylor à l'ordre deux.
4. Détermine la nature de chacun de ses points critiques.

Exercice n° 3 : Etudie la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = y^4 + x^2 - 2y^2 + z^2 + 4x + 5$.

Exercice n° 4 : On considère $f(x,y,z) = z^4 + x^2 + 2y^2 - 7z^2 - 2xy - 2yz + 2x - 2y$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

4. Méthode de Lagrange.

On ajoute la contrainte $g(x, y) = 0$ à notre recherche d'extremum. Autrement dit, on recherche le ou les extremums de f qui vérifient l'équation $g(x, y) = 0$.

Exemple n° 8 : $\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$,

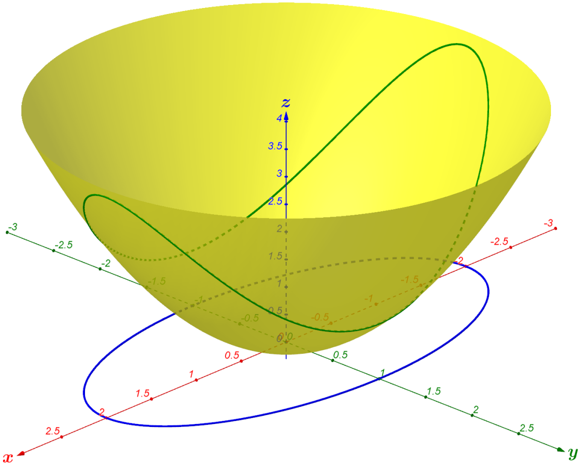


figure en 3D

Exemple n° 8 : $\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$, la contrainte $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ est

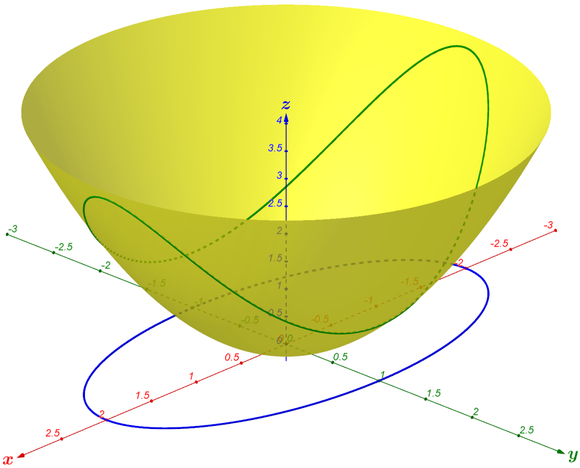


figure en 3D

Exemple n° 8 : $\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$, la contrainte $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ est représentée en **bleu**, dans le plan (xOy), c'est une **ellipse**.

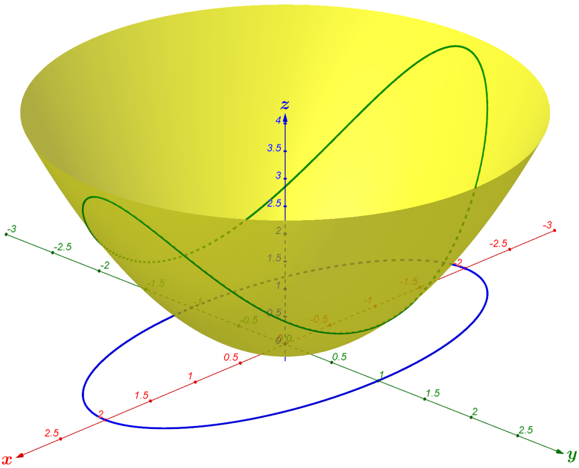


figure en 3D

Exemple n° 8 : $\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$, la contrainte $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ est représentée en **bleu**, dans le plan (xOy), c'est une **ellipse**. L'image de cette ellipse par f est la courbe **verte** tracée sur la surface jaune représentant f.

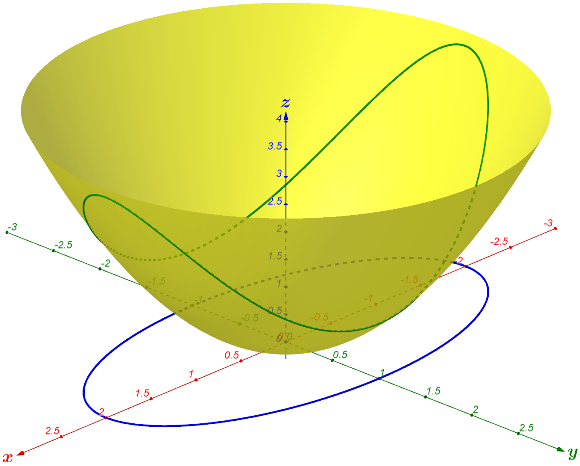


figure en 3D

Exemple n° 8 : $\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$, la contrainte $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ est représentée en **bleu**, dans le plan (xOy), c'est une **ellipse**. L'image de cette ellipse par f est la courbe **verte** tracée sur la surface jaune représentant f. On voit que cette courbe a deux maximums : A et B, et deux minimums : C et D.

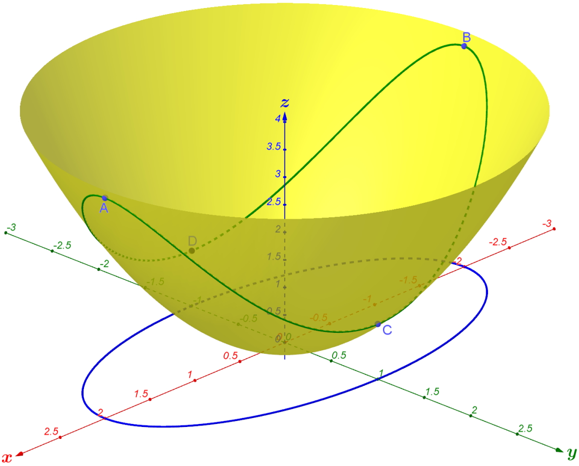


figure en 3D

I. Différentielle d'ordre 2.

Exemple n° 8 : $\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$, la contrainte $g(x,y) = \boldsymbol{x^2 + 4y^2 - 4 = 0}$ est représentée en **bleu**, dans le plan (xOy), c'est une **ellipse**. L'image de cette ellipse par f est la courbe **verte** tracée sur la surface jaune représentant f. On voit que cette courbe a deux maximums : $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, et deux minimums : $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$.

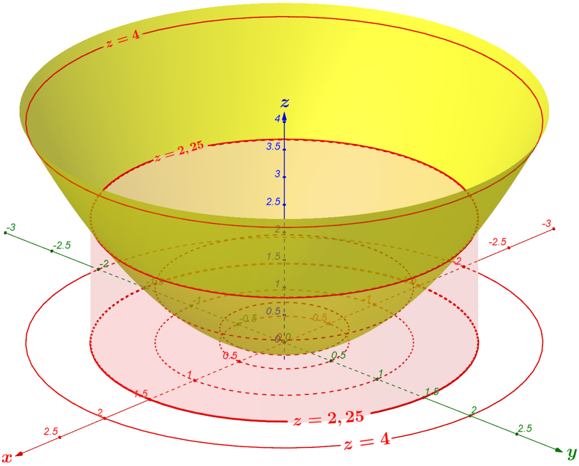


figure en 3D

Exemple n° 8 : $\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$, la contrainte $g(x,y) = \boldsymbol{x^2 + 4y^2 - 4 = 0}$ est représentée en **bleu**, dans le plan (xOy), c'est une **ellipse**. L'image de cette ellipse par f est la courbe **verte** tracée sur la surface jaune représentant f. On voit que cette courbe a deux maximums : $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, et deux minimums : $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$.

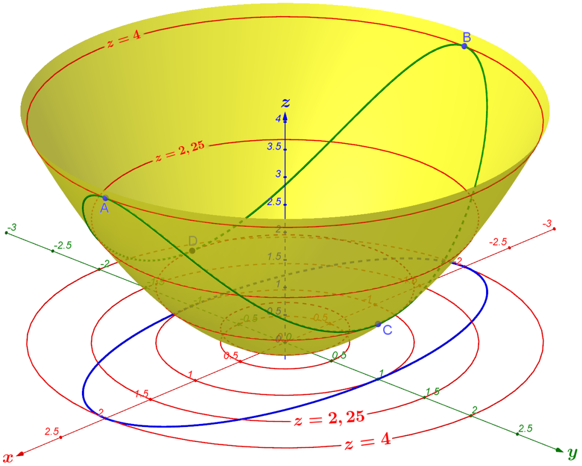


figure en 3D

Exemple n° 8 : $\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$, la contrainte $g(x,y) = \mathbf{x^2 + 4y^2 - 4 = 0}$ est représentée en **bleu**, dans le plan (xOy), c'est une **ellipse**. L'image de cette ellipse par f est la courbe **verte** tracée sur la surface jaune représentant f. On voit que cette courbe a deux maximums : $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, et deux minimums : $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$.

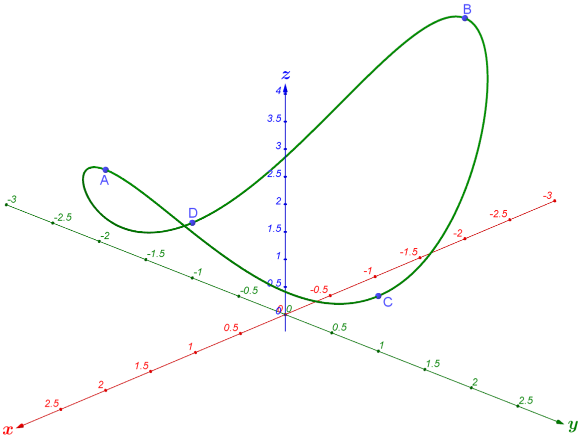
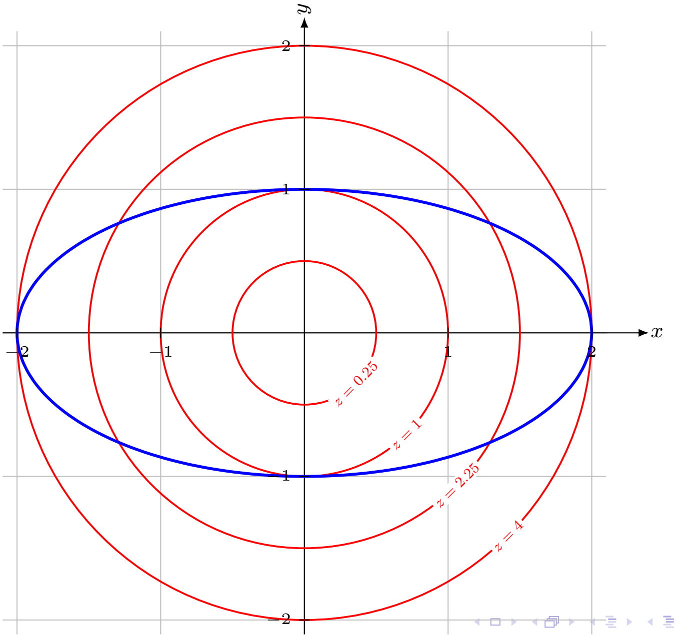
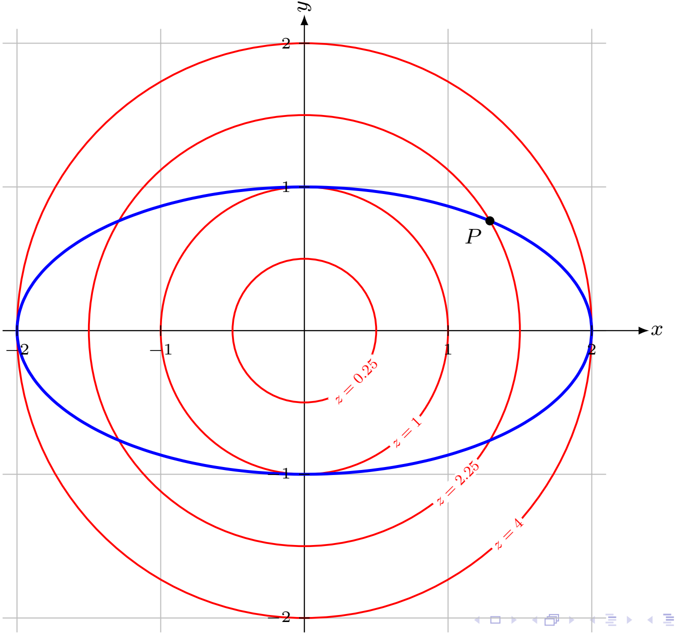


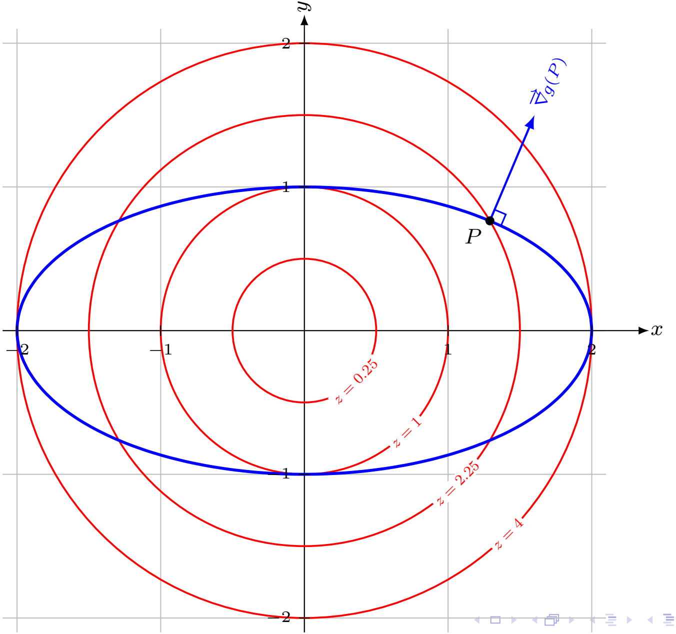
figure en 3D

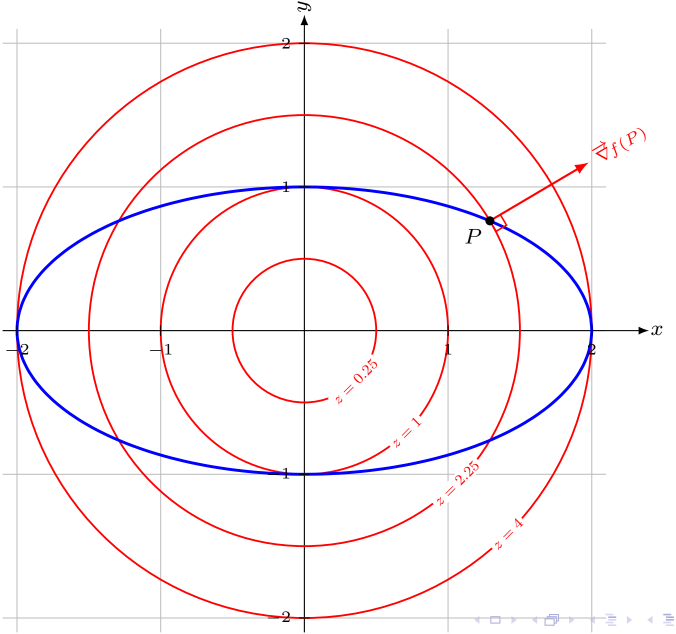

y
x
2
1
-1
-2
-2
-1
1
2
$z = 0.25$
$z = 1$
$z = 2.25$
$z = 4$



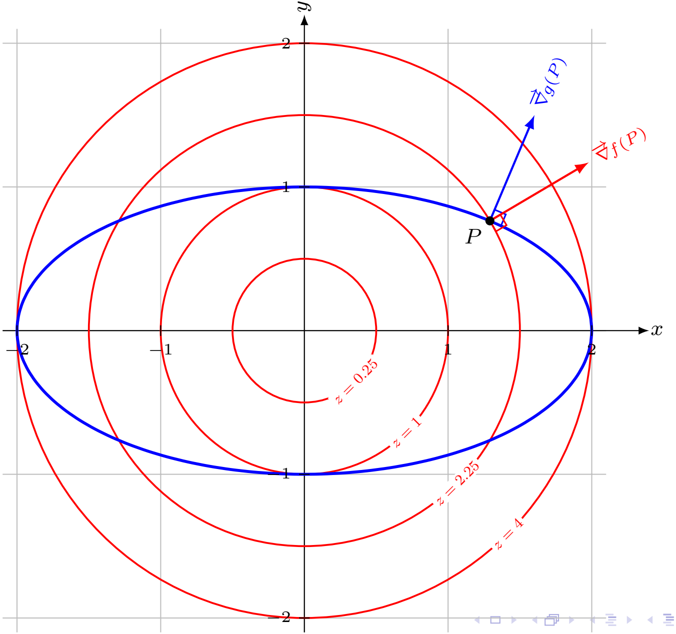
y
x
2
1
−1
−2
−2
−1
1
2
P
z = 0.25
z = 1
z = 2.25
z = 4

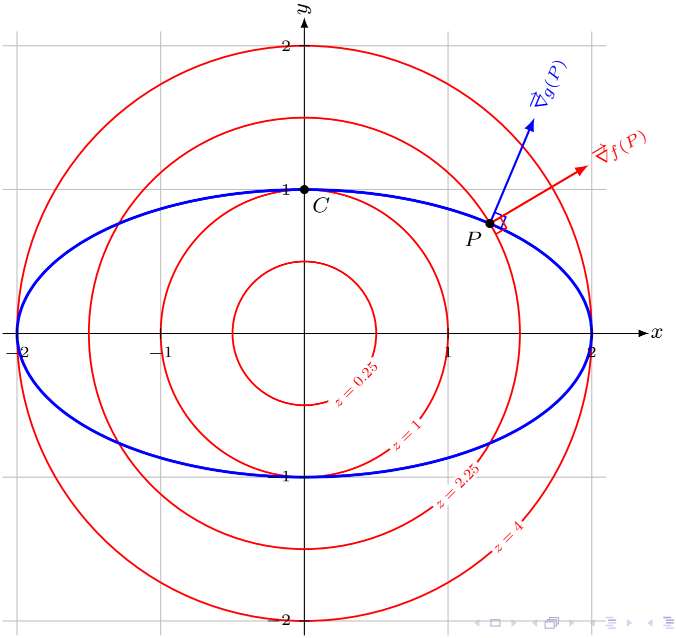
I. Différentielle d'ordre 2.

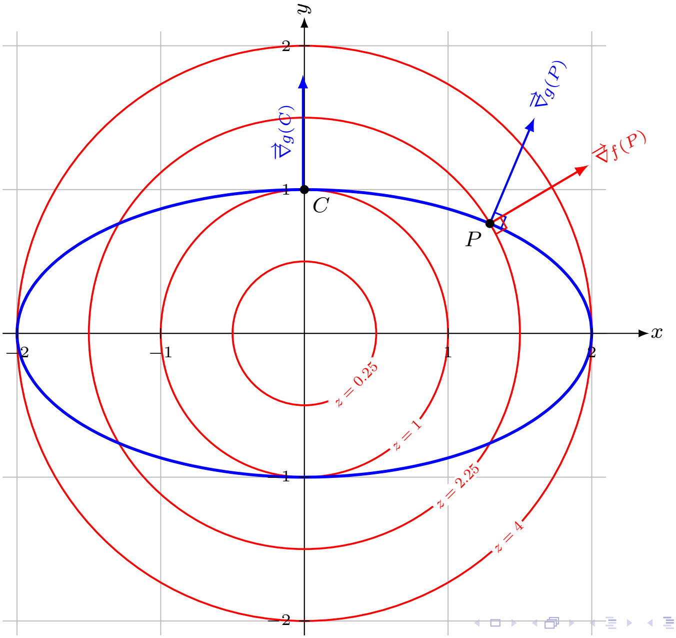




y
x
2
1
-1
-2
-2
-1
1
2
$\vec{\nabla} f(P)$
P
$z = 0.25$
$z = 1$
$z = 2.25$
$z = 4$

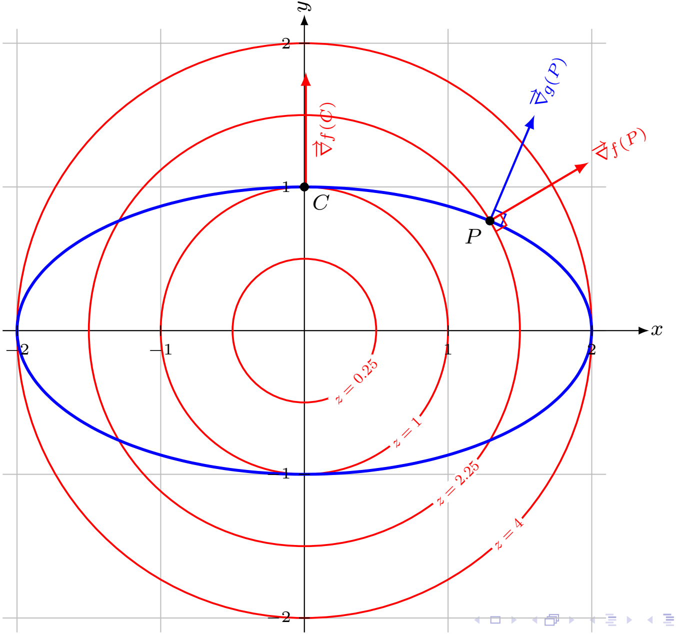

y
x
2
1
−1
−2
−2
−1
1
2
$\vec{\nabla} g(P)$
$\vec{\nabla} f(P)$
P
z = 0.25
z = 1
z = 2.25
z = 4

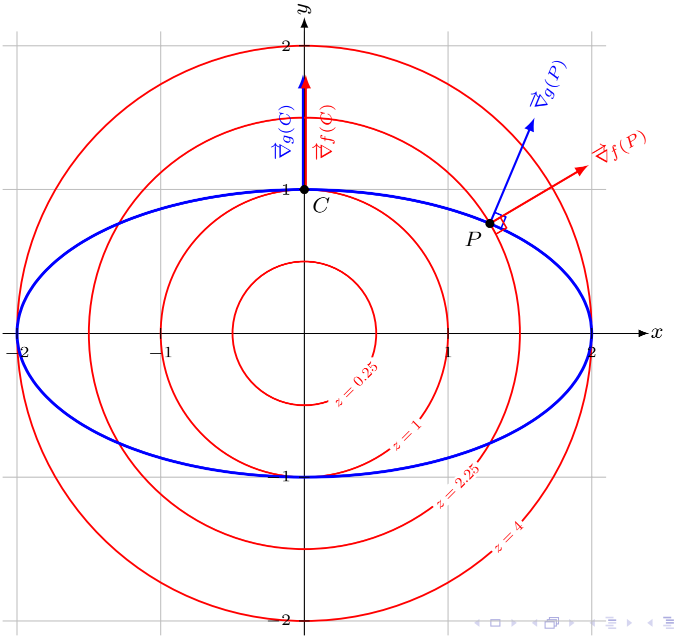

y
x
2
1
-1
-2
C
P
$\vec{\nabla} g(P)$
$\vec{\nabla} f(P)$
$z = 0.25$
$z = 1$
$z = 2.25$
$z = 4$



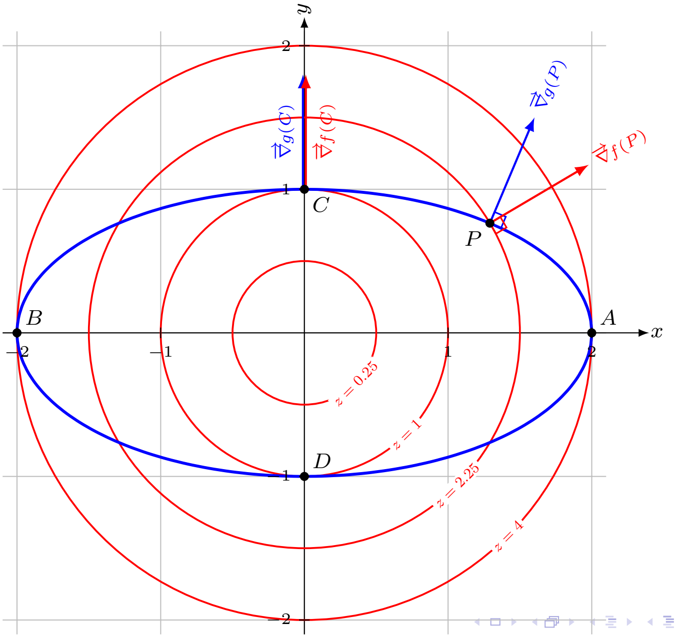
y
x
2
1
−1
−2
−2
−1
1
2
C
P
$\vec{\nabla} g(C)$
$\vec{\nabla} g(P)$
$\vec{\nabla} f(P)$
$z = 0.25$
$z = 1$
$z = 2.25$
$z = 4$

I. Différentielle d'ordre 2.





y
x
2
1
−1
−2
−2
−1
1
2
C
P
$\vec{\nabla} g(C)$
$\vec{\nabla} f(C)$
$\vec{\nabla} g(P)$
$\vec{\nabla} f(P)$
$z = 0.25$
$z = 1$
$z = 2.25$
$z = 4$



y
x
2
1
-1
-2
A
B
C
D
P
$\vec{\nabla} g(C)$
$\vec{\nabla} f(C)$
$\vec{\nabla} g(P)$
$\vec{\nabla} f(P)$
$z = 0.25$
$z = 1$
$z = 2.25$
$z = 4$

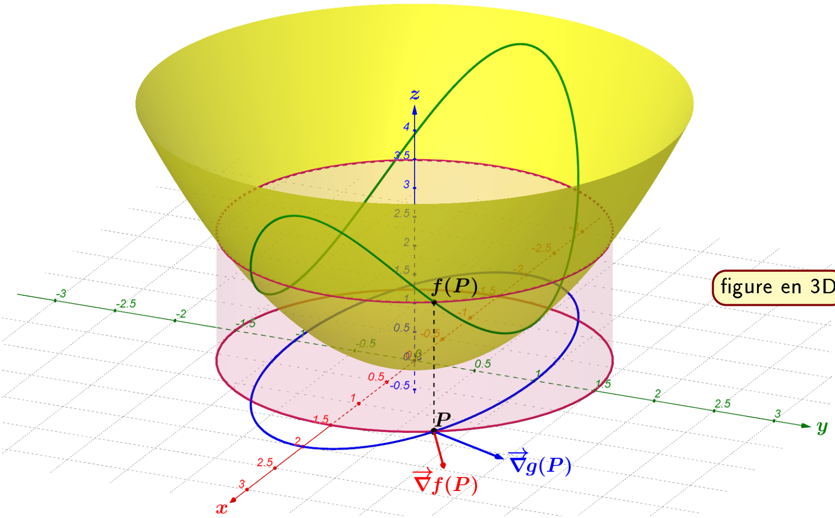


figure en 3D

Théorème : des Multiplicateurs de Lagrange

Soient f et g deux fonctions différentiables définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

Théorème : des Multiplicateurs de Lagrange

Soient f et g deux fonctions différentiables définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
Si la fonction f admet un extremum local au point $M_0(x_0, y_0)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$ tel que :

- Le point M_0 vérifie la contrainte : $g(x_0, y_0) = 0$;

Théorème : des Multiplicateurs de Lagrange

Soient f et g deux fonctions différentiables définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
Si la fonction f admet un extremum local au point $M_0(x_0, y_0)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$ tel que :

- Le point M_0 vérifie la contrainte : $g(x_0, y_0) = 0$;
- Le gradient de la contrainte en ce point n'est pas nul : $\vec{\nabla} g(x_0, y_0) \neq \vec{0}$;

Théorème : des Multiplicateurs de Lagrange

Soient f et g deux fonctions différentiables définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
Si la fonction f admet un extremum local au point $M_0(x_0, y_0)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$ tel que :

- Le point M_0 vérifie la contrainte : $g(x_0, y_0) = 0$;
- Le gradient de la contrainte en ce point n'est pas nul : $\vec{\nabla} g(x_0, y_0) \neq \vec{0}$;

Alors, il existe un nombre réel λ, appelé **multiplicateur de Lagrange**, tel que :

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \lambda \vec{\nabla} g(x_0, y_0)$$

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y)=x^2+y^2$ et $g(x,y)=x^2+4y^2-4$.

1. **Résolution du système :** $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\nabla} g(x,y)=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

1. **Résolution du système :** $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ \ \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}$

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

1. **Résolution du système :** $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

1 **Résolution du système :** $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ \end{pmatrix}$

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

1. **Résolution du système :** $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

1. **Résolution du système :** $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$

   donc $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \lambda \overrightarrow{\nabla} g(x,y)$ s'écrit $\left\{ \qquad\qquad , \right.$

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

1 **Résolution du système :** $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$

donc $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$ s'écrit $\begin{cases} 2x = \lambda \times 2x \\ \end{cases}$,

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

1 **Résolution du système :** $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \lambda \overrightarrow{\nabla} g(x,y)$ s'écrit $\begin{cases} 2x = \lambda \times 2x \\ 2y = \lambda \times 8y \end{cases}$,

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y)=x^2+y^2$ et $g(x,y)=x^2+4y^2-4$.

1. **Résolution du système :** $\vec{\nabla} f(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} g(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\8y\end{pmatrix}$

   donc $\vec{\nabla} f(x,y)=\lambda\vec{\nabla} g(x,y)$ s'écrit $\begin{cases}2x=\lambda\times 2x\\2y=\lambda\times 8y\end{cases}$,

   On doit donc résoudre le système $\begin{cases}2x(\qquad)=0\\2y(\qquad\quad)=0\\x^2+4y^2=4\end{cases}$

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y)=x^2+y^2$ et $g(x,y)=x^2+4y^2-4$.

1. **Résolution du système :** $\vec{\nabla}f(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla}g(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\8y\end{pmatrix}$

donc $\vec{\nabla}f(x,y)=\lambda\vec{\nabla}g(x,y)$ s'écrit $\begin{cases}2x=\lambda\times 2x\\2y=\lambda\times 8y\end{cases}$,

On doit donc résoudre le système $\begin{cases}2x(1-\lambda)=0\\2y(\qquad)=0\\x^2+4y^2=4\end{cases}$

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

1 **Résolution du système :** $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$

donc $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$ s'écrit $\begin{cases} 2x = \lambda \times 2x \\ 2y = \lambda \times 8y \end{cases}$,

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(1-4\lambda) = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

1. **Résolution du système :** $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$

donc $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$ s'écrit $\begin{cases} 2x = \lambda \times 2x \\ 2y = \lambda \times 8y \end{cases}$,

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(1-4\lambda) = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$

Méthode

En pratique, on écrit le **lagrangien** $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x)$ et on cherche les points où le gradient du lagrangien s'annule sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

1 **Résolution du système** : $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$

donc $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$ s'écrit $\begin{cases} 2x = \lambda \times 2x \\ 2y = \lambda \times 8y \end{cases}$,

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(1-4\lambda) = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$

Méthode

En pratique, on écrit le **lagrangien** $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x)$ et on cherche les points où le gradient du lagrangien s'annule sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

$L(x,y,\lambda) =$

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y)=x^2+y^2$ et $g(x,y)=x^2+4y^2-4$.

1 **Résolution du système :** $\vec{\nabla}f(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla}g(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\8y\end{pmatrix}$

donc $\vec{\nabla}f(x,y)=\lambda\vec{\nabla}g(x,y)$ s'écrit $\begin{cases}2x=\lambda\times 2x\\2y=\lambda\times 8y\end{cases}$,

On doit donc résoudre le système $\begin{cases}2x(1-\lambda)=0\\2y(1-4\lambda)=0\\x^2+4y^2=4\end{cases}$

Méthode

En pratique, on écrit le **lagrangien** $L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x)$ et on cherche les points où le gradient du lagrangien s'annule sous la contrainte $g(x,y)=0$.

$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda\left(x^2+4y^2-4\right)$

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

① **Résolution du système :** $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$

donc $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$ s'écrit $\begin{cases} 2x = \lambda \times 2x \\ 2y = \lambda \times 8y \end{cases}$,

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(1-4\lambda) = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$

Méthode

En pratique, on écrit le **lagrangien** $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x)$ et on cherche les points où le gradient du lagrangien s'annule sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda\big(x^2 + 4y^2 - 4\big)$

d'où $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \end{cases}$,

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

1 **Résolution du système :** $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$

donc $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$ s'écrit $\begin{cases} 2x = \lambda \times 2x \\ 2y = \lambda \times 8y \end{cases}$,

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(1-4\lambda) = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$

Méthode

En pratique, on écrit le **lagrangien** $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x)$ et on cherche les points où le gradient du lagrangien s'annule sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda\left(x^2 + 4y^2 - 4\right)$

d'où $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x = 0 \implies \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \end{cases}$,

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

1. **Résolution du système :** $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$

donc $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$ s'écrit $\begin{cases} 2x = \lambda \times 2x \\ 2y = \lambda \times 8y \end{cases}$,

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(1-4\lambda) = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$

Méthode

En pratique, on écrit le **lagrangien** $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x)$ et on cherche les points où le gradient du lagrangien s'annule sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda\left(x^2 + 4y^2 - 4\right)$

d'où $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x = 0 \implies 2x(1-\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \end{cases}$,

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

1 **Résolution du système :** $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$

donc $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$ s'écrit $\begin{cases} 2x = \lambda \times 2x \\ 2y = \lambda \times 8y \end{cases}$,

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(1-4\lambda) = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$

Méthode

En pratique, on écrit le **lagrangien** $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x)$ et on cherche les points où le gradient du lagrangien s'annule sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda\left(x^2 + 4y^2 - 4\right)$

d'où $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x = 0 \implies 2x(1-\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - 8\lambda y = 0 \implies \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \end{cases}$,

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

1 **Résolution du système :** $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$

donc $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$ s'écrit $\begin{cases} 2x = \lambda \times 2x \\ 2y = \lambda \times 8y \end{cases}$,

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(1-4\lambda) = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$

Méthode

En pratique, on écrit le **lagrangien** $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x)$ et on cherche les points où le gradient du lagrangien s'annule sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda\left(x^2 + 4y^2 - 4\right)$$

d'où $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x = 0 \implies 2x(1-\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - 8\lambda y = 0 \implies 2y(1-4\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \end{cases}$,

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y)=x^2+y^2$ et $g(x,y)=x^2+4y^2-4$.

1. **Résolution du système :** $\vec{\nabla}f(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla}g(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\8y\end{pmatrix}$

donc $\vec{\nabla}f(x,y)=\lambda\vec{\nabla}g(x,y)$ s'écrit $\begin{cases}2x=\lambda\times 2x\\2y=\lambda\times 8y\end{cases}$,

On doit donc résoudre le système $\begin{cases}2x(1-\lambda)=0\\2y(1-4\lambda)=0\\x^2+4y^2=4\end{cases}$

Méthode

En pratique, on écrit le **lagrangien** $L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x)$ et on cherche les points où le gradient du lagrangien s'annule sous la contrainte $g(x,y)=0$.

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda\left(x^2+4y^2-4\right)$$

d'où $\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x-2\lambda x=0\implies 2x(1-\lambda)=0\\\dfrac{\partial L}{\partial y}=2y-8\lambda y=0\implies 2y(1-4\lambda)=0\\\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+4y^2-4=0\end{cases}$,

Exemple n° 9 : Reprenons l'exemple précédent où $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

1. **Résolution du système :** $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$

donc $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$ s'écrit $\begin{cases} 2x = \lambda \times 2x \\ 2y = \lambda \times 8y \end{cases}$,

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(1-4\lambda) = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$

Méthode

En pratique, on écrit le **lagrangien** $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x)$ et on cherche les points où le gradient du lagrangien s'annule sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda\left(x^2 + 4y^2 - 4\right)$

d'où $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x = 0 \implies 2x(1-\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - 8\lambda y = 0 \implies 2y(1-4\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$, on retrouve le même système.

2. **Etude des cas :**

- **Cas n$^\circ$1 : $x = 0$** : La contrainte s'écrit

2 Etude des cas :

- **Cas n° 1 : $x = 0$** : La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$

2 **Etude des cas :**

- **Cas n° 1 : $x = 0$** : La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y =$

2 Etude des cas :

- **Cas n° 1 : $x = 0$** : La contrainte s'écrit $\mathbf{4y^2 = 4}$ donc $y = \pm\mathbf{1}$.

2 Etude des cas :

- **Cas n° 1 : $x = 0$** : La contrainte s'écrit $\mathbf{4y^2 = 4}$ donc $y = \pm\mathbf{1}$.

  La deuxième équation s'écrit :

2 Etude des cas :

- **Cas n^o 1 : $x = 0$** : La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda =$

2 Etude des cas :

- Cas n° 1 : $x = 0$: La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \dfrac{1}{4}$.

2 Etude des cas :

- <u>Cas n° 1 : $x = 0$</u> : La contrainte s'écrit $\mathbf{4y^2 = 4}$ donc $y = \pm\mathbf{1}$.

  La deuxième équation s'écrit : $\mathbf{(1 - 4\lambda) = 0}$ donc $\lambda = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$. On trouve $\left(\quad \right)$ et $\left(\right)$.

2 Etude des cas :

- <u>Cas n° 1 : $x = 0$</u> : La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{4}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ \\ \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$.

2 Etude des cas :

- Cas n° 1 : $x = 0$: La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{4}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$.

2 **Etude des cas :**

- **Cas n° 1 : $x = 0$** : La contrainte s'écrit $\mathbf{4y^2 = 4}$ donc $y = \pm\mathbf{1}$.

  La deuxième équation s'écrit : $\mathbf{(1 - 4\lambda) = 0}$ donc $\lambda = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \end{pmatrix}$.

2 Etude des cas :

- Cas n° 1 : $x = 0$: La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{4}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 Etude des cas :

- <u>Cas n° 1 : $x = 0$</u> : La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{4}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- <u>Cas n° 2 : $x \neq 0$</u>. D'après l'équation (1), $\lambda =$

② Etude des cas :

- Cas n° 1 : $x = 0$: La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{4}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Cas n° 2 : $x \neq 0$. D'après l'équation (1), $\lambda = 1$.

2 Etude des cas :

- Cas n° 1 : $x = 0$: La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{4}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Cas n° 2 : $x \neq 0$. D'après l'équation (1), $\lambda = 1$.

  La deuxième équation s'écrit :

2 Etude des cas :

- Cas n° 1 : $x = 0$: La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{4}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Cas n° 2 : $x \neq 0$. D'après l'équation (1), $\lambda = 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $2y \times (-3) = 0$ donc $y =$

2 Etude des cas :

- Cas n° 1 : $x = 0$: La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{4}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Cas n° 2 : $x \neq 0$. D'après l'équation (1), $\lambda = 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $2y \times (-3) = 0$ donc $y = 0$.

2 Etude des cas :

- Cas n° 1 : $x = 0$: La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{4}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Cas n° 2 : $x \neq 0$. D'après l'équation (1), $\lambda = 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $2y \times (-3) = 0$ donc $y = 0$.

  La contrainte s'écrit :

2 Etude des cas :

- Cas n° 1 : $\boldsymbol{x = 0}$: La contrainte s'écrit $\boldsymbol{4y^2 = 4}$ donc $y = \boldsymbol{\pm 1}$.

  La deuxième équation s'écrit : $\boldsymbol{(1 - 4\lambda) = 0}$ donc $\lambda = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Cas n° 2 : $\boldsymbol{x \neq 0}$. D'après l'équation (1), $\lambda = \boldsymbol{1}$.

  La deuxième équation s'écrit : $\boldsymbol{2y \times (-3) = 0}$ donc $y = \boldsymbol{0}$.

  La contrainte s'écrit : $\boldsymbol{x^2 = 4}$ donc $x =$

2 Etude des cas :

- <u>Cas n° 1 : $x = 0$</u> : La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{4}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- <u>Cas n° 2 : $x \neq 0$</u>. D'après l'équation (1), $\lambda = 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $2y \times (-3) = 0$ donc $y = 0$.

  La contrainte s'écrit : $x^2 = 4$ donc $x = \pm 2$.

2 Etude des cas :

- Cas n° 1 : $x = 0$: La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{4}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Cas n° 2 : $x \neq 0$. D'après l'équation (1), $\lambda = 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $2y \times (-3) = 0$ donc $y = 0$.

  La contrainte s'écrit : $x^2 = 4$ donc $x = \pm 2$. On trouve $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$.

2 Etude des cas :

- Cas n° 1 : $x = 0$: La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{4}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Cas n° 2 : $x \neq 0$. D'après l'équation (1), $\lambda = 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $2y \times (-3) = 0$ donc $y = 0$.

  La contrainte s'écrit : $x^2 = 4$ donc $x = \pm 2$. On trouve $\begin{pmatrix} -2 \\ \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$.

2 Etude des cas :

- Cas n° 1 : $x = 0$: La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{4}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Cas n° 2 : $x \neq 0$. D'après l'équation (1), $\lambda = 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $2y \times (-3) = 0$ donc $y = 0$.

  La contrainte s'écrit : $x^2 = 4$ donc $x = \pm 2$. On trouve $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}$.

2 Etude des cas :

- Cas n° 1 : $x = 0$: La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{4}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Cas n° 2 : $x \neq 0$. D'après l'équation (1), $\lambda = 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $2y \times (-3) = 0$ donc $y = 0$.

  La contrainte s'écrit : $x^2 = 4$ donc $x = \pm 2$. On trouve $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ \end{pmatrix}$.

2 Etude des cas :

- **Cas n° 1 : $x = 0$** : La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{4}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **Cas n° 2 : $x \neq 0$**. D'après l'équation (1), $\lambda = 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $2y \times (-3) = 0$ donc $y = 0$.

  La contrainte s'écrit : $x^2 = 4$ donc $x = \pm 2$. On trouve $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2 Etude des cas :

- **Cas n° 1 : $x = 0$** : La contrainte s'écrit $4y^2 = 4$ donc $y = \pm 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $(1 - 4\lambda) = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{4}$. On trouve $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **Cas n° 2 : $x \neq 0$**. D'après l'équation (1), $\lambda = 1$.

  La deuxième équation s'écrit : $2y \times (-3) = 0$ donc $y = 0$.

  La contrainte s'écrit : $x^2 = 4$ donc $x = \pm 2$. On trouve $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On vient de trouver 4 extremums potentiels (points **critiques**) :

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Définition:

On appelle **matrice Hessienne bordée** : $\overline{H}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

Définition:

On appelle **matrice Hessienne bordée** : $\overline{H}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

Théorème

On calcule le déterminant de la matrice Hessienne bordée, noté $|\bar{H}|$, au point critique :

- Si $|\overline{H}| > 0$, alors le point (x_0, y_0) est un maximum local lié.
- Si $|\overline{H}| < 0$, alors le point (x_0, y_0) est un minimum local lié.
- Si $|\overline{H}| = 0$, alors on ne peut pas conclure (cas dégénéré).

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x) =$$

4. **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

• $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \ldots\ldots$	• $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \ldots\ldots$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \ldots$	• $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \ldots\ldots$
• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \ldots\ldots$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \ldots\ldots$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \ldots$	• $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \ldots\ldots$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

$\dfrac{\partial L}{\partial x} = \boldsymbol{2x - 2\lambda x}$	$\dfrac{\partial L}{\partial y} = \ldots\ldots$	$\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \ldots$	$\dfrac{\partial g}{\partial x} = \ldots\ldots$
$\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \ldots\ldots$	$\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \ldots\ldots$	$\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \ldots$	$\dfrac{\partial g}{\partial y} = \ldots\ldots$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

• $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \boldsymbol{2x - 2\lambda x}$	• $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \ldots\ldots$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \ldots$	• $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \ldots\ldots$
• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \boldsymbol{2 - 2\lambda}$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \ldots\ldots$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \ldots$	• $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \ldots\ldots$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \boldsymbol{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \boldsymbol{2 - 2\lambda}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \boldsymbol{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \ldots\ldots$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \ldots$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \ldots$
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \ldots\ldots$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \ldots\ldots$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

• $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \boldsymbol{2x - 2\lambda x}$	• $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \boldsymbol{2y - 8\lambda y}$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \ldots$	• $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \ldots\ldots$
• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \boldsymbol{2 - 2\lambda}$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \boldsymbol{2 - 8\lambda}$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \ldots$	• $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \ldots\ldots$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \ldots$
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \ldots\ldots$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \ldots\ldots$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$

- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$

- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$

- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \ldots\ldots$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \ldots\ldots$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$

- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$

- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$

- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \ldots\ldots$

4. **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$

- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$

- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$

- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$

- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$

- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$

- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

• $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \boldsymbol{2x - 2\lambda x}$	• $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \boldsymbol{2y - 8\lambda y}$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \boldsymbol{0}$	• $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \boldsymbol{2x}$
• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \boldsymbol{2 - 2\lambda}$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \boldsymbol{2 - 8\lambda}$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \boldsymbol{0}$	• $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \boldsymbol{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

$\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$	$\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$	$\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$	$\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
$\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$	$\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$	$\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$	$\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & & \\ & & \end{pmatrix}$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \boldsymbol{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \boldsymbol{2 - 2\lambda}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \boldsymbol{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \boldsymbol{2 - 8\lambda}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \boldsymbol{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \boldsymbol{0}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \boldsymbol{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \boldsymbol{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & \\ & & \end{pmatrix}$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2 - 2\lambda & 0 \\ & & \end{pmatrix}$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$

- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$

- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$

- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & & \end{pmatrix}$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2 - 2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & \end{pmatrix}$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

$\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$	$\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$	$\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$	$\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
$\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$	$\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$	$\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$	$\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \boldsymbol{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \boldsymbol{2 - 2\lambda}$

- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \boldsymbol{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \boldsymbol{2 - 8\lambda}$

- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \boldsymbol{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \boldsymbol{0}$

- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \boldsymbol{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \boldsymbol{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$\left|\overline{H}\right| =$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$

- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$

- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$

- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$\left|\overline{H}\right| =$ (développement suivant la première ligne)

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2 - 2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2 - 8\lambda \end{pmatrix}$

$$\left|\overline{H}\right| = -2x \left| \qquad \qquad \right| +$$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\frac{\partial L}{\partial x} = \boldsymbol{2x - 2\lambda x}$
- $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \boldsymbol{2 - 2\lambda}$
- $\frac{\partial L}{\partial y} = \boldsymbol{2y - 8\lambda y}$
- $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \boldsymbol{2 - 8\lambda}$
- $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \boldsymbol{0}$
- $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \boldsymbol{0}$
- $\frac{\partial g}{\partial x} = \boldsymbol{2x}$
- $\frac{\partial g}{\partial y} = \boldsymbol{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$$\left|\overline{H}\right| = -2x \begin{vmatrix} 2x & \\ & \end{vmatrix} +$$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$$\left|\overline{H}\right| = -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \end{vmatrix} +$$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \boldsymbol{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \boldsymbol{2 - 2\lambda}$

- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \boldsymbol{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \boldsymbol{2 - 8\lambda}$

- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \boldsymbol{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \boldsymbol{0}$

- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \boldsymbol{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \boldsymbol{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$$\left|\overline{H}\right| = -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 8y & \end{vmatrix} +$$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

$\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$	$\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$	$\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$	$\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
$\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$	$\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$	$\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$	$\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$$\left|\overline{H}\right| = -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 8y & 2-8\lambda \end{vmatrix} +$$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \boldsymbol{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \boldsymbol{2 - 2\lambda}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \boldsymbol{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \boldsymbol{2 - 8\lambda}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \boldsymbol{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \boldsymbol{0}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \boldsymbol{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \boldsymbol{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2 - 2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2 - 8\lambda \end{pmatrix}$

$$\left|\overline{H}\right| = -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 8y & 2 - 8\lambda \end{vmatrix} + 8y \left| \phantom{\begin{matrix} 2x & 2-2\lambda \\ 8y & 0 \end{matrix}} \right|$$

$$=$$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

• $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$	• $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$	• $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$	• $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2 - 2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2 - 8\lambda \end{pmatrix}$

$$\left|\overline{H}\right| = -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 8y & 2 - 8\lambda \end{vmatrix} + 8y \begin{vmatrix} 2x & \\ & \end{vmatrix}$$

$$=$$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$

- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$

- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$

- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$$\left|\overline{H}\right| = -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 8y & 2-8\lambda \end{vmatrix} + 8y \begin{vmatrix} 2x & 2-2\lambda \\ & \end{vmatrix}$$

$$=$$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$

- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$

- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$

- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$$\left|\overline{H}\right| = -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 8y & 2-8\lambda \end{vmatrix} + 8y \begin{vmatrix} 2x & 2-2\lambda \\ 8y & \end{vmatrix}$$

$$=$$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$$|\overline{H}| = -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 8y & 2-8\lambda \end{vmatrix} + 8y \begin{vmatrix} 2x & 2-2\lambda \\ 8y & 0 \end{vmatrix}$$

$$=$$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda\left(x^2 + 4y^2 - 4\right)}$$

$\frac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$	$\frac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$	$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$	$\frac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$	$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$	$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$	$\frac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \left|\overline{H}\right| &= -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 8y & 2-8\lambda \end{vmatrix} + 8y \begin{vmatrix} 2x & 2-2\lambda \\ 8y & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2x\left(4x - 16\lambda x\right) + \end{aligned}$$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda\big(x^2 + 4y^2 - 4\big)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$

- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$

- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$

- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \left|\overline{H}\right| &= -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 8y & 2-8\lambda \end{vmatrix} + 8y \begin{vmatrix} 2x & 2-2\lambda \\ 8y & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2x\big(4x - 16\lambda x\big) + 8y\big(-16y + 16\lambda y\big) \\ &= \end{aligned}$$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2 - 2\lambda$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - 8\lambda y$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2 - 8\lambda$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 0$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 8y$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 8y & 2-8\lambda \end{vmatrix} + 8y \begin{vmatrix} 2x & 2-2\lambda \\ 8y & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2x\big(4x - 16\lambda x\big) + 8y\big(-16y + 16\lambda y\big) \\ &= -8x^2 \end{aligned}$$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

• $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$	• $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$	• $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$	• $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 8y & 2-8\lambda \end{vmatrix} + 8y \begin{vmatrix} 2x & 2-2\lambda \\ 8y & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2x\big(4x - 16\lambda x\big) + 8y\big(-16y + 16\lambda y\big) \\ &= -8x^2 - 128y^2 + \end{aligned}$$

4 **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

• $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$	• $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$	• $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$	• $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$	• $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 8y & 2-8\lambda \end{vmatrix} + 8y \begin{vmatrix} 2x & 2-2\lambda \\ 8y & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2x\big(4x - 16\lambda x\big) + 8y\big(-16y + 16\lambda y\big) \\ &= -8x^2 - 128y^2 + 32\lambda x^2 + \end{aligned}$$

4. **Calcul des dérivées secondes :**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \boldsymbol{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \boldsymbol{2 - 2\lambda}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \boldsymbol{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \boldsymbol{2 - 8\lambda}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \boldsymbol{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \boldsymbol{0}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \boldsymbol{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \boldsymbol{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 8y & 2-8\lambda \end{vmatrix} + 8y \begin{vmatrix} 2x & 2-2\lambda \\ 8y & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2x\big(4x - 16\lambda x\big) + 8y\big(-16y + 16\lambda y\big) \\ &= -8x^2 - 128y^2 + 32\lambda x^2 + 128\lambda y^2 \\ &= \end{aligned}$$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \boldsymbol{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \boldsymbol{2 - 2\lambda}$

- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \boldsymbol{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \boldsymbol{2 - 8\lambda}$

- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \boldsymbol{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \boldsymbol{0}$

- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \boldsymbol{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \boldsymbol{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 8y & 2-8\lambda \end{vmatrix} + 8y \begin{vmatrix} 2x & 2-2\lambda \\ 8y & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2x\big(4x - 16\lambda x\big) + 8y\big(-16y + 16\lambda y\big) \\ &= -8x^2 - 128y^2 + 32\lambda x^2 + 128\lambda y^2 \\ &= 8x^2\big(\qquad \big) + 128y^2\big(\qquad \big) \end{aligned}$$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
|\overline{H}| &= -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 8y & 2-8\lambda \end{vmatrix} + 8y \begin{vmatrix} 2x & 2-2\lambda \\ 8y & 0 \end{vmatrix} \\
&= -2x\big(4x - 16\lambda x\big) + 8y\big(-16y + 16\lambda y\big) \\
&= -8x^2 - 128y^2 + 32\lambda x^2 + 128\lambda y^2 \\
&= 8x^2\big(4\lambda - 1\big) + 128y^2(\qquad)
\end{aligned}$$

4 Calcul des dérivées secondes :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{2x - 2\lambda x}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \mathbf{2 - 2\lambda}$
- $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{2y - 8\lambda y}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \mathbf{2 - 8\lambda}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \mathbf{0}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{2x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{8y}$

La hessienne bordée est donc : $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
|\overline{H}| &= -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 8y & 2-8\lambda \end{vmatrix} + 8y \begin{vmatrix} 2x & 2-2\lambda \\ 8y & 0 \end{vmatrix} \\
&= -2x\big(4x - 16\lambda x\big) + 8y\big(-16y + 16\lambda y\big) \\
&= -8x^2 - 128y^2 + 32\lambda x^2 + 128\lambda y^2 \\
&= 8x^2\big(4\lambda - 1\big) + 128y^2(\lambda - 1)
\end{aligned}$$

3 $\left|\overline{H}\right| = 8x^2\left(4\lambda - 1\right) + 128y^2(\lambda - 1)$

3. $\left|\overline{H}\right| = 8x^2\left(4\lambda - 1\right) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

   - Le point $A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda =$

3. $\left|\overline{H}\right| = 8x^2(4\lambda - 1) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

   - Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $|\bar{H}| =$

3. $\left|\overline{H}\right| = 8x^2\left(4\lambda - 1\right) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

   - Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 2^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) =$

3. $\left|\overline{H}\right| = 8x^2\left(4\lambda - 1\right) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

   - Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 2^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

     Donc le point A est un

3. $\left|\overline{H}\right| = 8x^2\left(4\lambda - 1\right) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

- Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 2^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point A est un **maximum**.

3 $|\overline{H}| = 8x^2(4\lambda - 1) + 128y^2(\lambda - 1)$

4 **Etude des points critiques :**

- Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $|\bar{H}| = 8 \times 2^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point A est un **maximum**.

- Le point $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda =$

3. $\left|\overline{H}\right| = 8x^2\left(4\lambda - 1\right) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

- Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 2^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point A est un **maximum**.

- Le point $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| =$

3. $\left|\overline{H}\right| = 8x^2\left(4\lambda - 1\right) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

- Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $|\bar{H}| = 8 \times 2^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point A est un **maximum**.

- Le point $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $|\bar{H}| = 8 \times (-2)^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) =$

3. $\left|\overline{H}\right| = 8x^2\left(4\lambda - 1\right) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

- Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 2^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point A est un **maximum**.

- Le point $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times (-2)^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point b est un

3. $\left|\overline{H}\right| = 8x^2\left(4\lambda - 1\right) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

- Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 2^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point A est un **maximum**.

- Le point $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times (-2)^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point b est un **maximum**.

3. $|\overline{H}| = 8x^2(4\lambda - 1) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

- Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $|\bar{H}| = 8 \times 2^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point A est un **maximum**.

- Le point $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $|\bar{H}| = 8 \times (-2)^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point b est un **maximum**.

- Le point $C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\lambda =$

3. $\left|\overline{H}\right| = 8x^2\left(4\lambda - 1\right) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

- Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 2^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point A est un **maximum**.

- Le point $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times (-2)^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point b est un **maximum**.

- Le point $C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{1}{4}$, $\left|\bar{H}\right| =$

3. $\left|\overline{H}\right| = 8x^2\left(4\lambda - 1\right) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

- Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 2^2\left(4 \times 1 - 1\right) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point A est un **maximum**.

- Le point $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times (-2)^2\left(4 \times 1 - 1\right) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point b est un **maximum**.

- Le point $C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{1}{4}$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 0^2\left(4 \times \frac{1}{4} - 1\right) + 128 \times 1^2 \times \left(\frac{1}{4} - 1\right) =$

3. $\left|\overline{H}\right| = 8x^2\left(4\lambda - 1\right) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

- Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 2^2\left(4 \times 1 - 1\right) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point A est un **maximum**.

- Le point $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times (-2)^2\left(4 \times 1 - 1\right) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point b est un **maximum**.

- Le point $C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{1}{4}$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 0^2\left(4 \times \frac{1}{4} - 1\right) + 128 \times 1^2 \times \left(\frac{1}{4} - 1\right) = -96 < 0$

  Donc le point A est un

3. $|\overline{H}| = 8x^2(4\lambda - 1) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

- Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $|\bar{H}| = 8 \times 2^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point A est un **maximum**.

- Le point $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $|\bar{H}| = 8 \times (-2)^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point b est un **maximum**.

- Le point $C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{1}{4}$, $|\bar{H}| = 8 \times 0^2\left(4 \times \frac{1}{4} - 1\right) + 128 \times 1^2 \times \left(\frac{1}{4} - 1\right) = -96 < 0$

  Donc le point A est un **minimum**.

3. $\left|\overline{H}\right| = 8x^2(4\lambda - 1) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

- Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 2^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point A est un **maximum**.

- Le point $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times (-2)^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point b est un **maximum**.

- Le point $C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{1}{4}$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 0^2\left(4 \times \frac{1}{4} - 1\right) + 128 \times 1^2 \times \left(\frac{1}{4} - 1\right) = -96 < 0$

  Donc le point A est un **minimum**.

- Le point $D\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ et $\lambda =$

3. $\left|\overline{H}\right| = 8x^2\left(4\lambda - 1\right) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

- Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 2^2\left(4 \times 1 - 1\right) + 128 \times 0^2 \times \left(1 - 1\right) = 96 > 0$

  Donc le point A est un **maximum**.

- Le point $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times (-2)^2\left(4 \times 1 - 1\right) + 128 \times 0^2 \times \left(1 - 1\right) = 96 > 0$

  Donc le point b est un **maximum**.

- Le point $C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{1}{4}$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 0^2\left(4 \times \frac{1}{4} - 1\right) + 128 \times 1^2 \times \left(\frac{1}{4} - 1\right) = -96 < 0$

  Donc le point A est un **minimum**.

- Le point $D\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{1}{4}$, $\left|\bar{H}\right| =$

3. $\left|\overline{H}\right| = 8x^2\left(4\lambda - 1\right) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

- Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 2^2\left(4 \times 1 - 1\right) + 128 \times 0^2 \times (1-1) = 96 > 0$

  Donc le point A est un **maximum**.

- Le point $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times (-2)^2\left(4 \times 1 - 1\right) + 128 \times 0^2 \times (1-1) = 96 > 0$

  Donc le point b est un **maximum**.

- Le point $C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{1}{4}$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 0^2\left(4 \times \frac{1}{4} - 1\right) + 128 \times 1^2 \times \left(\frac{1}{4} - 1\right) = -96 < 0$

  Donc le point A est un **minimum**.

- Le point $D\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{1}{4}$, $\left|\bar{H}\right| =$
  $8 \times 0^2\left(4 \times \frac{1}{4} - 1\right) + 128 \times (-1)^2 \times \left(\frac{1}{4} - 1\right) =$

3. $|\overline{H}| = 8x^2(4\lambda - 1) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

- Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $|\bar{H}| = 8 \times 2^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point A est un **maximum**.

- Le point $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $|\bar{H}| = 8 \times (-2)^2\,(4 \times 1 - 1) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point b est un **maximum**.

- Le point $C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{1}{4}$, $|\bar{H}| = 8 \times 0^2\left(4 \times \frac{1}{4} - 1\right) + 128 \times 1^2 \times \left(\frac{1}{4} - 1\right) = -96 < 0$

  Donc le point A est un **minimum**.

- Le point $D\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{1}{4}$, $|\bar{H}| =$
  $8 \times 0^2\left(4 \times \frac{1}{4} - 1\right) + 128 \times (-1)^2 \times \left(\frac{1}{4} - 1\right) = -96 < 0$

  Donc le point A est un

3. $\left|\overline{H}\right| = 8x^2\left(4\lambda - 1\right) + 128y^2(\lambda - 1)$

4. **Etude des points critiques :**

- Le point $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 2^2\left(4 \times 1 - 1\right) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point A est un **maximum**.

- Le point $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times (-2)^2\left(4 \times 1 - 1\right) + 128 \times 0^2 \times (1 - 1) = 96 > 0$

  Donc le point b est un **maximum**.

- Le point $C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{1}{4}$, $\left|\bar{H}\right| = 8 \times 0^2\left(4 \times \frac{1}{4} - 1\right) + 128 \times 1^2 \times \left(\frac{1}{4} - 1\right) = -96 < 0$

  Donc le point A est un **minimum**.

- Le point $D\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{1}{4}$, $\left|\bar{H}\right| =$
  $8 \times 0^2\left(4 \times \frac{1}{4} - 1\right) + 128 \times (-1)^2 \times \left(\frac{1}{4} - 1\right) = -96 < 0$

  Donc le point A est un **minimum**

Exercice n° 5 : Détermine l'aire maximal d'un rectangle de périmètre 20.

Exercice n° 6 : Trouve les extrema de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $x + 2y = 5$.

Exercice n° 7 : Trouve les extrema de $f(x,y) = x - y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 2$.