

Exercice n° 1 : Dans $\mathbb{R}^5$, on considère la famille $\mathcal{V}$ des cinq vecteurs $\vec{a} = (1, 2, 0, -1, 1)$, $\vec{b} = (2, 3, -1, 0, 3)$, $\vec{c} = (-1, -1, 2, 1, 0)$, $\vec{d} = (3, 5, -1, -1, 4)$, et $\vec{e} = (5, 7, -4, -1, 6)$. Déterminer le rang de $\mathcal{V}$.

On utilise l'algorithme de Gauss sur l'espace ligne en plaçant les coordonnées des vecteurs dans une matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & -4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

On échelonne la matrice en utilisant la première ligne (L_1) pour annuler les premiers coefficients des autres lignes :

$$\begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \\ L_3 + L_1 \\ L_4 - 3L_1 \\ L_5 - 5L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

On utilise ensuite la deuxième ligne (L_2) pour annuler les coefficients en dessous d'elle dans la deuxième colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_3 + L_2 \\ L_4 - L_2 \\ L_5 - 3L_2 \end{array}$$

Enfin, on utilise la troisième ligne (L_3) pour annuler le coefficient de la dernière ligne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_5 + L_3 \\ \end{array}$$

La matrice échelonnée comporte exactement trois lignes non nulles. La famille est donc de rang 3 : $\langle \mathcal{V} \rangle$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3.