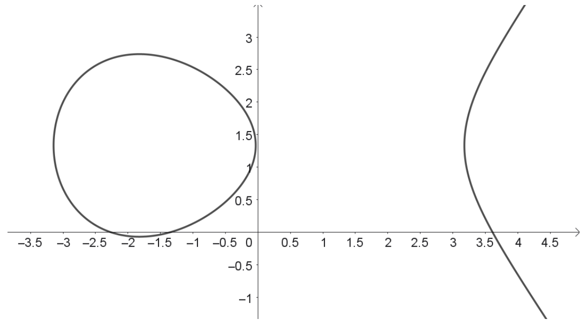
CORRIGÉ DU DEVOIR

Exercice n° 1 : On va étudier la courbe $\mathcal{C}$ du plan (Oxy) définie par l'équation $x^3 - 10x - 6y^2 + 16y = 11$ tracée ci-dessous :



Pour l'étudier, on va considérer la surface $\mathcal{S}$ définie par $f(x,y) = x^3 - 10x - 6y^2 + 16y$.

1. Calcule $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)$.

   $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 10 \\ -12y + 16 \end{pmatrix}$

2. Ecris la différentielle de f en (x,y) en utilisant $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)$.

   $\mathrm{d}f(x,y) = \overrightarrow{\nabla} f(x,y) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} = (3x^2 - 10)dx + (-12y + 16)dy$

3. Que peut-on dire de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la surface $\mathcal{S}$?

   $\mathcal{C}$ est la ligne de niveau $f(x,y) = 11$.

4. Détermine l'ordonnée de chacun des deux points de la courbe qui ont une abscisse égale à -3. On notera A le point ayant la plus grande ordonnée, et B l'autre.

   En substituant x par -3 : on obtient $(-3)^3 - 10 \times (-3) - 6y^2 + 16y = 11$

   Soit $3 - 6y^2 + 16y = 11 \iff 3y^2 - 8y + 4 = 0$.

   $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 4 = 64 - 48 = 16$ d'où $\begin{cases} y_1 = \frac{8-4}{2\times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ y_2 = \frac{8+4}{6} = 2 \end{cases}$

   On $A\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} -3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

5. Détermine un vecteur orthogonal à $\mathcal{C}$ en A. Justifie ta réponse.

   A est un point de la ligne de niveau $f(x,y) = 11$, donc le gradient $\overrightarrow{\nabla} f(-3,2)$ est à cette ligne de niveau qui est la courbe $\mathcal{C}$.

   $\overrightarrow{\nabla} f(-3,2) = \begin{pmatrix} 3 \times (-3)^2 - 10 \\ -12 \times 2 + 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -8 \end{pmatrix}$

6. Détermine un vecteur $\overrightarrow{\tau}$ unitaire (de norme 1) tangent à $\mathcal{C}$ en A.

   $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \end{pmatrix}$ est orthogonal au $\overrightarrow{\nabla} f(-3,2)$ donc tangent à $\mathcal{C}$ en A.

   $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{8^2 + 17^2} = \sqrt{353}$ donc $\overrightarrow{\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{353}} \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \end{pmatrix}$

7. Détermine les coordonnées du point M de la surface $\mathcal{S}$ situé à la verticale du point A.

   $f(A) = 11$ donc $M\begin{pmatrix}-3\\2\\11\end{pmatrix}$

8. Détermine un vecteur orthogonal à la surface $\mathcal{S}$ en M ?

   un point de de coordonnées $P(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si $z = f(x, y)$. Donc, en considérant $g(x, y, z) = f(x, y) - z = x^3 - 10x - 6y^2 + 16y - z$.

   La surface $\mathcal{S}$ apparaît comme la surface de niveau de $g(x, y, z) = 0$.

   $\overrightarrow{\nabla} g(x, y, z) = \begin{pmatrix}3x^2 - 10\\-12y + 16\\-1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{\nabla} g(-3, 2, -1) = \begin{pmatrix}17\\-8\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\mathcal{S}$ en M.