

Exercice n° 1 : Soit la fonction de deux variables W définie par :

$$W(x, y) = x \sin(y)$$

On suppose que les variables x et y sont des fonctions dépendant d'un paramètre t , définies implicitement par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \cos(x) + y^2 = t \\ 3x + \sin(y) = t^2 \end{cases}$$

1. **Dérivation en chaîne :** En utilisant la règle de composition des dérivées, exprime la dérivée totale $\frac{dW}{dt}$ en fonction de $x, y, \frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$.

On applique la formule de la dérivée totale :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \sin(y) \frac{dx}{dt} + x \cos(y) \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

2. **Différentiation implicite :** En dérivant les deux équations du système par rapport à t , démontre que $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ sont les solutions d'un système d'équations linéaires.

On dérive chaque équation du système par rapport à t :

- Pour $\cos(x) + y^2 = t \implies -\sin(x) \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 1$
- Pour $3x + \sin(y) = t^2 \implies 3 \frac{dx}{dt} + \cos(y) \frac{dy}{dt} = 2t$

3. **Méthode de Cramer :**

- (a) Calcule le déterminant du système.

$$\Delta = -\sin(x) \times \cos(y) - 3 \times 2y = -\sin(x) \cos(y) - 6y.$$

- (b) À quelle condition sur x et y ce système admet-il une solution unique pour $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$?

D'après le théorème de Cramer (ou des fonctions implicites), le système admet une solution unique si et seulement si $\Delta \neq 0$, c'est-à-dire $\sin(x) \cos(y) \neq -6y$.

- (c) Détermine les expressions de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$.

$$\begin{aligned} \bullet \Delta_x &= \begin{vmatrix} 1 & 2y \\ 2t & \cos(y) \end{vmatrix} = \cos(y) - 4ty \text{ donc } \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\cos(y) - 4ty}{-\sin(x) \cos(y) - 6y} \\ \bullet \Delta_y &= \begin{vmatrix} -\sin(x) & 1 \\ 3 & 2t \end{vmatrix} = -2t \sin(x) - 3 \text{ donc } \frac{dy}{dt} = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2t \sin(x) - 3}{-\sin(x) \cos(y) - 6y} \end{aligned}$$

4. **Conclusion :** Déduis-en l'expression finale de $\frac{dW}{dt}$ en fonction de x, y et t .

On remplace ces expressions dans la formule trouvée à la question 1 :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \sin(y) \left(\frac{\cos(y) - 4ty}{-\sin(x) \cos(y) - 6y} \right) + x \cos(y) \left(\frac{-2t \sin(x) - 3}{-\sin(x) \cos(y) - 6y} \right) \\ &= \frac{\sin(y) \cos(y) - 4ty \sin(y) - 2tx \sin(x) \cos(y) - 3x \cos(y)}{-\sin(x) \cos(y) - 6y} \end{aligned}$$