

Exercice n° 1 : Soit la fonction de deux variables W définie par :

$$W(x, y) = xe^y$$

On suppose que les variables x et y sont des fonctions dépendant d'un paramètre t , définies implicitement par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} e^x + y^2 = t \\ 2x + e^y = t^2 \end{cases}$$

1. **Dérivation en chaîne :** En utilisant la règle de composition des dérivées, exprime la dérivée totale $\frac{dW}{dt}$ en fonction de $x, y, \frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$.

On applique la formule de la dérivée totale :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= e^y \frac{dx}{dt} + xe^y \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

2. **Différentiation implicite :** En dérivant les deux équations du système par rapport à t , démontre que $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ sont les solutions d'un système d'équations linéaires.

On dérive chaque équation du système par rapport à t :

- Pour $e^x + y^2 = t \implies e^x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 1$
- Pour $2x + e^y = t^2 \implies 2 \frac{dx}{dt} + e^y \frac{dy}{dt} = 2t$

3. **Méthode de Cramer :**

- (a) Calcule le déterminant du système.

$$\Delta = (e^x)(e^y) - (2)(2y) = e^{x+y} - 4y.$$

- (b) À quelle condition sur x et y ce système admet-il une solution unique pour $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$?

D'après le théorème de Cramer (ou des fonctions implicites), le système admet une solution unique si et seulement si $\Delta \neq 0$, c'est-à-dire $e^{x+y} \neq 4y$.

- (c) Détermine les expressions de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$.

$$\begin{aligned} \bullet \Delta_x &= \begin{vmatrix} 1 & 2y \\ 2t & e^y \end{vmatrix} = e^y - 4ty \text{ donc } \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{e^y - 4ty}{e^{x+y} - 4y} \\ \bullet \Delta_y &= \begin{vmatrix} e^x & 1 \\ 2 & 2t \end{vmatrix} = 2te^x - 2 \text{ donc } \frac{dy}{dt} = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2te^x - 2}{e^{x+y} - 4y} \end{aligned}$$

4. **Conclusion :** Dédus-en l'expression finale de $\frac{dW}{dt}$ en fonction de x, y et t .

On remplace ces expressions dans la formule trouvée à la question 1 :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= e^y \left(\frac{e^y - 4ty}{e^{x+y} - 4y} \right) + xe^y \left(\frac{2te^x - 2}{e^{x+y} - 4y} \right) \\ &= \frac{e^{2y} - 4tye^y + 2txe^{x+y} - 2xe^y}{e^{x+y} - 4y} \end{aligned}$$