Corrigé du devoir

Exercice n° 1 : Le plan étant muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on note $\mathcal{S}_f$ la surface définie par la fonction $f(x) = y^2 - x^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Un point A d'abscisse 1 et d'ordonnée 2 appartient à $\mathcal{S}_f$. Détermine sa cote.

   $z_A = f(1,2) = 2^2 - 1^2 = 3$

2. Quelle est la différentielle de f en (x,y) ? $\mathrm{d}f = -2x\,dx + 2y\,dy$

3. Quelle est la différentielle de f en A ? $\mathrm{d}f = -2\,dx + 4\,dy$

4. Détermine une équation du plan tangent à $\mathcal{S}_f$ au point A.

   $z = 3 - 2(x-1) + 4(y-2)$ soit $z = -2x + 4y - 3$

5. On considère le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

   (a) Quel est la dérivée directionnelle de f en A suivant la direction $\overrightarrow{u}$?

   $\mathrm{d}f(1,2) \cdot \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = -2 \times (-1) + 4 \times 1 = 6$

   (b) La fonction est-elle croissante en A dans cette direction ? oui, car $6 > 0$

   (c) Quelle est la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$? $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

   (d) Quelle est la pente de la tangente à $\mathcal{S}_f$ en A dirigée par $\overrightarrow{u}$?

   Si l'on veut la pente réelle (le taux de variation par unité de distance), il faudrait diviser ce résultat par la norme de $\overrightarrow{u}$: $\dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.