Corrigé du devoir

Exercice n° 1 : On considère la surface définie par $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2xy - 4x - 8y + 22$.

1. Détermine le gradient de f. $\overrightarrow{\nabla}(f) = \begin{pmatrix} 2x - 2y - 4 \\ 6y - 2x - 8 \end{pmatrix}$

2. Détermine l'abscisse et l'ordonnée du point critique A.

   $$\overrightarrow{\nabla}(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - y = 2 \\ 3y - x = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} L_1 + L_2 : 2y = 6 \\ 3L_1 + L_2 : 2x = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3 \\ x = 5 \end{cases}$$

3. Détermine la Hessienne de f. $\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

4. Détermine la forme quadratique q associée à la Hessienne de f en A. $q(x,y) = 2x^2 + 6y^2 - 4xy$

5. En étudiant la signature de la forme quadratique q détermine la nature du point A.

   $q(x,y) = 2\left[x^2 + 3y^2 - 2xy\right] = 2\left[(x-y)^2 - y^2 + 3y^2\right] = 2\left[(x-y)^2 + 2y^2\right] = 2\,(x-y)^2 + 4y^2$

   la signature de q est $(2,0)$ donc A est un minimum.