

Exercice n° 1 : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$g(x, y, z) = x^2z + 2x^2 + xy + 2xz - y^2 + yz + 12y - z^2 - 9z - 39$$

1. Détermine son gradient. $\vec{\nabla}(g) = \begin{pmatrix} 2xz + 4x + y + 2z \\ x - 2y + z + 12 \\ x^2 + 2x + y - 2z - 9 \end{pmatrix}$

2. Détermine sa matrice hessienne. $\nabla^2(g)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2z + 4 & 1 & 2x + 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2x + 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. Le point $A(-1, 4, -3)$ est un point critique de g .

(a) Calcule la matrice hessienne de g en A $\nabla^2(g)(-1, 4, -3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(b) Quelle est la forme quadratique q_A associée à $\nabla^2(g)(-1, 4, -3)$.

$$q_A(x, y, z) = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + 2yz$$

(c) Détermine la décomposition de Gauss de q_A .

$$\begin{aligned} q_A(x, y, z) &= -2x^2 + 2xy - 2y^2 - 2z^2 + 2yz \\ &= -2 \left[x^2 - xy \right] - 2y^2 - 2z^2 + 2yz \\ &= -2 \left[\left(x - \frac{y}{2} \right)^2 - \frac{y^2}{4} \right] - 2y^2 - 2z^2 + 2yz \\ &= -2 \left(x - \frac{y}{2} \right)^2 - \frac{3y^2}{2} - 2z^2 + 2yz \\ &= -2 \left(x - \frac{y}{2} \right)^2 - \frac{3y^2}{2} + 2yz - 2z^2 \\ &= -2 \left(x - \frac{y}{2} \right)^2 - \frac{3}{2} \left[y^2 - \frac{4}{3}yz \right] - 2z^2 \\ &= -2 \left(x - \frac{y}{2} \right)^2 - \frac{3}{2} \left[\left(y - \frac{2}{3}z \right)^2 - \frac{4}{9}z^2 \right] - 2z^2 \\ &= -2 \left(x - \frac{y}{2} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(y - \frac{2}{3}z \right)^2 - \frac{4}{3}z^2 \end{aligned}$$

(d) Détermine la nature du point A .

La signature est $(0, 3)$, car il y a 3 coefficients négatifs. Le point A est un maximum local.