le cnam

2024 - 2025

Décomposition en éléments simples

Transformée de Laplace

Application à la résolution des équations différentielles

I. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

1. Fractions rationnelles

Définition:

- Une .... est une expression formelle de la forme $\dfrac{P}{Q}$, où P et Q sont deux ....
- On appelle .... d'une fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$, la quantité ....
- On appelle .... d'une fraction rationnelle R toute écriture de la forme $\dfrac{P}{Q}$ où les polynômes P et Q n'admettent aucun facteur en commun.

Exemple n° 1 :

i. La fraction rationnelle $\dfrac{(x^2-4x)(x-3)}{x(x-3)^2}$ est de degré .... Elle n'est pas irréductible, car elle a deux facteurs communs : .... et ...... Sa forme irréductible est ....

ii. La fraction rationnelle $\dfrac{\left(2x^2-5x-12\right)^2}{6x^2+13x+6}$ est de degré .... Elle n'est pas irréductible, car :

$$2x^2-5x-12=0$$

$$\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ et } x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2x^2-5x-12 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou

$$6x^2+13x+6=0$$

$$\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ et } x_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$6x^2+13x+6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, $\dfrac{\left(2x^2-5x-12\right)^2}{6x^2+13x+6} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Définition:

Soient $F=\dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que α est un ..... ou une .... de F si α est une racine de P.
- On dit que α est un ..... de F si α est une racine de Q.
- On dit que l' ..... d'un pôle de F est de .... p, s'il est une racine d'ordre de multiplicité p de Q. Un pôle d'ordre 1 est dit ....

Exemple n° 2 : Dans $\mathbb{R}$, la fraction rationnelle $\dfrac{x(x^2+5)(x-3)^2}{(x-7)(x^2+1)(x+2)^4}$ admet

- pour zéros : $\dots$ et $\dots$
- pour pôles : $\dots$ de multiplicité $\dots$, et $\dots$ de multiplicité $\dots$.

Exemple n° 3 : Dans $\mathbb{R}$, la fraction rationnelle $\dfrac{(x^2-5)(x-3)^4}{(x+7)(x^2-1)x^6}$ admet

- pour zéros : ....
- trois pôles simples : $\dots$, $\dots$, et $\dots$, et le pôle $\dots$ de multiplicité $\dots$.

Exemple n° 4 : Dans $\mathbb{C}$, la fraction rationnelle $g(x) = \dfrac{7}{(2x^2-2x-12)^2(x^2-4x+13)^3}$ admet

- pour zéros : ....
- Etude des pôles :
  - les racines de $2x^2-2x-12$ sont $\dots$ et $\dots$, donc $2x^2-2x-12 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
  - les racines de $x^2-4x+13$ sont .... et ...., donc $x^2-4x+13 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

  Ainsi, $g(x) = \dfrac{7}{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

  La fraction rationnelle g a deux pôles d'ordre ... : $\dots$ et $\dots$ et deux pôles d'ordre ... : ...... et ......

Exercice n° 1 : Etudie dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$, les pôles de la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2+25)(x^2-8x+16)^3}$.

2. Partie entière

Théorème

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. Il existe un unique polynôme E et une unique fraction rationnelle G tels que :

$$F = E + G \text{ et } \deg(G) < 0$$

Le polynôme E est appelé la .... de F. Elle est égale à la division euclidienne de P par Q.

Exemple n° 5 : Le degré de $f(x) = \dfrac{x^4+x^3+6x^2+5x+18}{x^2-x+3}$ est $\dots$, donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 \quad +x^3 \quad +6x^2 \quad +5x \quad +18 & x^2 - x + 3 \\ - \qquad\qquad & \end{array}$$

$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

La partie entière de f est ....

Exemple n° 6 : Le degré de $g(x) = \dfrac{2x^5 - x^4 - 14x^2 + 7x + 4}{2x - 1}$ est ....., donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 \quad -x^4 \qquad\qquad -14x^2 \quad +7x \quad +4 & 2x - 1 \\ - \qquad\qquad & \end{array}$$

$g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

La partie entière de g est ....

Exemple n° 7 : Le degré de $h(x) = \dfrac{x^5 + 1}{x(x-1)^2}$ est ...., donc on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} & \\ - \qquad\qquad & \end{array}$$

....

$h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

La partie entière de h est ....

Exemple n° 8 : Le degré de $j(x) = \dfrac{x}{x^2-5}$ est .... La fraction rationnelle j a pour partie entière ....

3. Décomposition en éléments simples

Théorème

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle irréductible de partie entière E. On considère la décomposition de Q en le produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$:

$$Q(x) = \lambda \prod_{k=1}^{r} (x-\alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} (a_\ell x^2 + b_\ell x + c_\ell)^{n_\ell} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Alors, il existe des familles uniques de réels $\left(A_{k,i}\right)_{\substack{1\leqslant k\leqslant r\\ 1\leqslant i\leqslant m_k}}$, $\left(B_{\ell,j}\right)_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant s\\ 1\leqslant j\leqslant n_\ell}}$, et $\left(C_{\ell,j}\right)_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant s\\ 1\leqslant j\leqslant n_\ell}}$ telles que :

$$F = \underbrace{E}_{\text{partie entière}} + \sum_{k=1}^{r} \underbrace{\sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_{k,i}}{(x-\alpha_k)^i}}_{\substack{\text{partie polaire}\\ \text{associée au pôle } \alpha}} + \sum_{\ell=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_\ell} \frac{B_{\ell,j}x + C_{\ell,j}}{(a_\ell x^2 + b_\ell x + c_\ell)^j}$$

On appelle cette écriture la .... (DES) de F sur $\mathbb{R}$. Elle est unique.

Remarque

Dire que le polynôme $a_\ell x^2 + b_\ell x + c_\ell$ est irréductible dans $\mathbb{R}$ revient à dire que son discriminant est strictement négatif : $\Delta_\ell = b_\ell^2 - 4a_\ell c_\ell < 0$.

Exemple n° 9 :

i. $f(x) = \dfrac{x}{(x-4)(x+1)}$ a une partie entière .... et une DES de la forme $f(x) =$ ....

ii. $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4} =$ .... a une partie entière .... et une DES de la forme $g(x) =$.

iii. $h(x) = \dfrac{x^2}{(x-4)^3}$ a une partie entière .... et une DES de la forme $h(x) =$ ....

iv. $j(x) = \dfrac{x^2}{(x-4)^2}$ ....

$j(x) =$ ....

Donc, $j(x) =$ ....

v. $k(x) = \dfrac{x^2+x-1}{(x+1)^3(2x+3)^2}$ ....

$k(x) =$ ....

vi. $\ell(x) = \dfrac{x^3+x^2-x+7}{(x^2-1)(x^2+5)^3}$ ....

$\ell(x) =$ ....

Exercice n° 2 : Détermine la DES de $f(x) = \dfrac{x^3+1}{(x^2-7x+10)^2(x^2-2x+2)^2}$

4. Calcul des coefficients.

Par .... : on remet les différentes fractions du DES au même dénominateur et in identifie les coefficients.

Exemple n° 10 : $f(x) = \dfrac{2x^3-x^2}{(x^2+x+3)^2}$ sa partie entière est nulle donc son degré est strictement ....

Son DES est $f(x) =$ ....

On remet les différentes fractions du DES au même dénominateur :

$$f(x) = \frac{2x^3-x^2}{(x^2+x+3)^2} = \frac{ax+b}{x^2+x+3} + \frac{cx+d}{(x^2+x+3)^2} = \frac{(ax+b)\times(\qquad\qquad\qquad)}{(x^2+x+3)^2} + \frac{cx+d}{(x^2+x+3)^2}$$

$$= \frac{\ldots x^3 + x^2(\ldots\ldots\ldots) + x(\ldots\ldots\ldots\ldots) + \ldots\ldots}{(x^2+x+3)^2}$$

On identifie : $\begin{cases} a = \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ $\begin{cases} a = \ldots \\ b = \ldots \\ c = \ldots \\ d = \ldots \end{cases}$ d'où ....

Exemple n° 11 : Détermine la Décomposition en Elements Simple de $g(x) = \dfrac{4x^2+1}{(2x-3)^2}$

Soit α un pôle d'ordre m d'une fraction rationnelle F. Pour déterminer le coefficient A de $\dfrac{A}{(x-\alpha)^m}$ dans la DES de F, on multiplie F d'une part, et sa DES d'autre part, par $(x-\alpha)^m$, et on évalue l'égalité obtenue en remplaçant x par α.

Exemple n° 12 :

i. $f(x) = \dfrac{x-3}{(x+2)(x-5)}$ a une DES de la forme $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- Pour déterminer A : le pôle $\alpha = \ldots$ est $\ldots\ldots$ $\big(m = \ldots\big)$. On multiplie donc de part et d'autre de l'égalité ci-dessus par $\ldots\ldots$:

$$\frac{x-3}{(x+2)(x-5)} \times \ldots\ldots\ldots = \frac{A}{x+2} \times \ldots\ldots\ldots + \frac{B}{x-5} \times \ldots\ldots\ldots$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Et, on évalue en $\ldots$ la nouvelle égalité : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ d'où $A = \ldots$

- Pour déterminer B : le pôle $\alpha = \ldots$ est $\ldots\ldots$ $\big(m = \ldots\big)$. On multiplie donc de part et d'autre de l'égalité ci-dessus par $\ldots\ldots$:

$$\frac{x-3}{(x+2)(x-5)} \times \ldots\ldots\ldots = \frac{A}{x+2} \times \ldots\ldots\ldots + \frac{B}{x-5} \times \ldots\ldots\ldots$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Et, on évalue en $\ldots$ la nouvelle égalité : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ d'où $B = \ldots$

On obtient $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ii. $g(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ a une DES de la forme $g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- Pour déterminer A : le pôle $\alpha = \ldots$ est $\ldots\ldots$ $\big(m = \ldots\big)$. On multiplie donc de part et d'autre de l'égalité ci-dessus par $\ldots\ldots$:

$$\frac{x}{x^2-4} \times \ldots\ldots\ldots = \frac{A}{x-2} \times \ldots\ldots\ldots + \frac{B}{x+2} \times \ldots\ldots\ldots$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Et, on évalue en $\ldots$ la nouvelle égalité : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ d'où $A = \ldots$

- Pour déterminer B : le pôle $\alpha = \ldots$ est $\ldots\ldots$ $\big(m = \ldots\big)$. On multiplie donc de part et d'autre de l'égalité ci-dessus par $\ldots\ldots$:

$$\frac{x}{x^2-4} \times \ldots\ldots\ldots = \frac{A}{x-2} \times \ldots\ldots\ldots + \frac{B}{x+2} \times \ldots\ldots\ldots$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Et, on évalue en $\ldots$ la nouvelle égalité : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ d'où $B = \ldots$

On obtient $g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

En se plaçant dans $\mathbb{C}$, on peut factoriser les polynômes du second degré qui deviennent des pôles complexes.

Exemple n° 13 : $h(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)}$ son degré est ... , donc sa partie entière est ....

Son DES est $h(x) =$ ....

- Pour trouver A : on multiplie donc de part et d'autre de l'égalité ci-dessus par .... :

  ....

  Et, on évalue en ... la nouvelle égalité : ....

- Pour trouver B et C : on multiplie de part et d'autre de l'égalité ci-dessus par .... :

  ....

  Et, on évalue en l'une des deux racines conjuguées de x^2+1, par exemple ... .

  On obtient la nouvelle égalité : .... B est la partie imaginaire de $\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+1}$, et C sa partie réelle.

  $\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+1} =$ .... donc $B =$ ..... et $C =$ .....

  Le DES de h est ....

Exercice n° 3 :

1. Détermine les deux racines du polynôme $x^2-4x+13$.
2. Déduis-en, le DES de $f(x) = \dfrac{36x}{(x+1)(x^2-4x+13)}$

Exemple n° 14 : $g(x) = \dfrac{x^5-1}{x(x+1)^2}$ ....

x^5 $\quad\quad\quad\quad$ -1	
$-$	

$g(x) =$ ....

$=$ ....

La partie polaire de g est $g_1(x) = \dfrac{-4x^2-3x-1}{x(x+1)^2}$. Elle a une DES de la forme $f(x) =$........................

- Le pôle $\alpha = 0$ est ......$(m = \dots)$. On multiplie donc de part et d'autre de l'égalité ci-dessus par $\dots$:

  $$\frac{-4x^2-3x-1}{x(x+1)^2}\times\dots = \frac{A}{x}\times\dots + \frac{B}{x+1}\times\dots + \frac{C}{(x+1)^2}\times\dots$$

  ....

  Et, on évalue en $\dots$ la nouvelle égalité : .... donc $A = \dots$

- Le pôle $\alpha = \dots\dots$ est de multiplicité $\dots$ On multiplie donc de part et d'autre de l'égalité ci-dessus par .... :

  $$\frac{-4x^2-3x-1}{x(x+1)^2}\times\dots\dots\dots = \frac{A}{x}\times\dots\dots\dots + \frac{B}{x+1}\times\dots\dots\dots + \frac{C}{(x+1)^2}\times\dots\dots\dots$$

  ....

  Et, on évalue en ...... la nouvelle égalité : $\dots\dots\dots = C$ donc $C = \dots$

  <u>Pour déterminer B, on retire le pôle d'ordre 2 à g_1 :</u>

  $$g_2(x) = g_1(x) - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{-4x^2-3x-1}{x(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{\qquad\qquad}{x(x+1)^2} = \frac{\qquad\qquad}{x(x+1)^2}$$

  Le pôle $\alpha = -1$ de g_2 est de multiplicité .... On multiplie donc de part et d'autre de l'égalité ci-dessus par .... :

  $$\frac{-4x^2-5x-1}{x(x+1)^2}\times\dots\dots\dots = \frac{A}{x}\times\dots\dots\dots + \frac{B}{x+1}\times\dots\dots\dots$$

  ....

  Et, on évalue en $\dots$ la nouvelle égalité. Mais, le numérateur et le dénominateur .... Donc, il y a un facteur $(x+1)$ au numérateur :

  $$\begin{array}{r|l} -4x^2 \quad -5x \quad -1 & \\ - & \end{array}$$

  $-4x^2-5x-1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

  Donc, $\dfrac{-4x^2-5x-1}{x(x+1)} = \dots\dots\dots\dots = \dfrac{A}{x}\times(x+1)+B$

  Et, on évalue en $\dots$ la nouvelle égalité : .... donc $B = \dots$

  Ainsi, $g(x) = x^2-2x+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Remarque : Lorsqu'on a ôté le pôle d'ordre 2, $\dfrac{-4x^2-5x-1}{x(x+1)^2}$ n'était plus irréductible, car le $(x+1)^2$ est un pôle d'ordre 2 ce qui est contradictoire. Il devait donc se simplifier avec le numérateur.
On va voir que dans l'exemple précédent, il y a une technique plus rapide pour trouver le coefficient B :

> Lorsqu'on a un pôle α non simple, on peut retrouver la valeur du coefficient A de $\dfrac{A}{(x-\alpha)}$, en multipliant par $(x-\alpha)$ et en faisant tendre x vers l'infini.

Exemple n° 15 : Dans l'exemple précédent, on avait trouvé facilement A et C, et il restait B :

$$\frac{-4x^2-3x-1}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}$$

On multiplie l'égalité par .... : $\dfrac{-4x^2-3x-1}{x(x+1)} =$ ....

On ne peut pas évaluer en -1 car ....

Par contre, on peut passer à la limite en faisant tendre $x \longrightarrow +\infty$: ...., donc $B =$ ....

Remarque : Les deux méthodes précédentes permettent de déterminer A_1 et A_m dans le développement suivant d'un pôle α d'ordre m :

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(x-\alpha)^m}$$

Pour déterminer les autres coefficients, on peut utiliser la méthode suivantes :

> S'il reste n coefficients, on évalue avec n valeurs, et on obtient un systèmes de n équations à n inconnues.

Exemple n° 16 : $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-2)^3}$. Son DES est $f(x) =$ ....

Il y a un seul pôle $\alpha = 2$ est d'ordre ... :

- Pour trouver C : on multiplie donc de part et d'autre de l'égalité ci-dessus par .... :

  ....

  Et, on évalue en ... la nouvelle égalité : $3 = C$

- Pour trouver A : on multiplie donc de part et d'autre de l'égalité ci-dessus par .... :

  ....

  On passe à la limite en faisant tendre $x \longrightarrow +\infty$: ....

- Pour trouver B : on évalue en ... :

  ....

Ainsi, $f(x) =$..

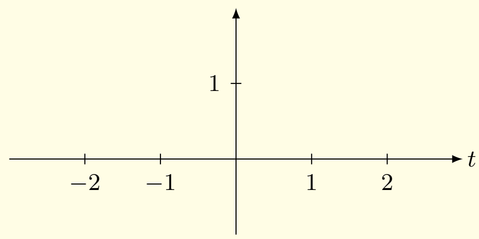
Exercice n° 4 : Détermine le DES des fonctions suivantes :

i. $f(x) = \dfrac{30x^2}{(x^2-25)(x^2-2x+10)}$ ii. $g(x) = \dfrac{2x}{(2x-4)^3}$

II. Transformée de Laplace

Définition:

- On appelle .... toute fonction nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- La fonction .... est la fonction causale, notée ... , définie par $\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$.



Cette fonction aussi appelée fonction de ....

Remarque : En 0, sa valeur n'a généralement aucune importance, souvent elle vaut $\dfrac{1}{2}$.

Exemple n° 17 : La fonction sinus n'est pas causale, car .... On la rend causale, en lui associant la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f} \colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Définition:

Pierre-Simon de Laplace
1749-1827

Si f est une fonction causale, la .... de f est la fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{L}(f) \colon & A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

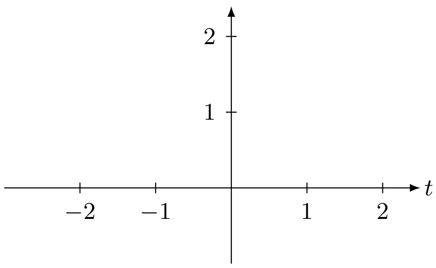
où A est l'ensemble des valeurs de $\mathbb{R}$ pour lesquelles cette intégrale converge. Les questions de convergence concernant surtout les mathématiciens, nous nous limiterons au cas $A \cap]0, +\infty[$, soit généralement ....

Exemple n° 18 : Calculons la transformée de Laplace de la fonction échelon-unité : $\begin{array}{rcl}\mathcal{U} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathcal{U}(t)\end{array}$

....

Exercice n° 5 : La transformée de Laplace de la fonction $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ k \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}\end{array}$

Exemple n° 19 : Calculons la transformée de Laplace de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t \times \mathcal{U}(t)$.



$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\begin{cases} u'(t) = \ldots\ldots \\ v(t) = \ldots\ldots \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t) = \ldots\ldots \\ v'(t) = \ldots\ldots \end{cases}$

$F(s) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice n° 6 : Détermine $\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{at}\right)(s)$ pour quelles valeurs de s est-elle définie ?

1. Transformée de Laplace de fonctions usuelles

Le calcul de la transformation de Laplace à partir des définitions des fonctions usuelles n'est pas à savoir. En revanche, les transformées les plus courantes doivent être connues. Dans d'autres cas, le tableau des transformées vous sera donné. Vous devez donc connaître les transformées de Laplace suivantes :

Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(s)$	Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(s)$
$f(t) = k \times \mathcal{U}(t)$		$f(t) = t \times \mathcal{U}(t)$	
$f(t) = t^n \times \mathcal{U}(t)$		$f(t) = \mathrm{e}^{at} \times \mathcal{U}(t)$	
$f(t) = \sin(at) \times \mathcal{U}(t)$		$f(t) = \cos(at) \times \mathcal{U}(t)$	
$f(t) = \mathrm{sh}(at) \times \mathcal{U}(t)$		$f(t) = \mathrm{ch}(at) \times \mathcal{U}(t)$	

Remarque

Dans la suite, on omettra la fonction échelon-unité $\mathcal{U}$. Autrement dit, on écrira $\mathcal{L}\big(f(t)\big)$ au lieu de $\mathcal{L}\big[f(t)\mathcal{U}(t)\big]$

Rappel:

$\mathrm{ch}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$ et $\mathrm{sh}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}$

Exemple n° 20 :

i. $\mathcal{L}\big(\mathrm{e}^{3t}\big)(s) =$ ....

ii. $\mathcal{L}\big(\cos(\pi t)\big)(s) =$ ....

iii. $\mathcal{L}\big(\sin(\pi t)\big)(s) =$ ....

iv. $\mathcal{L}\big(t^4\big)(s) =$ ....

v. $\mathcal{L}\big(t^5\big)(s) =$ ....

vi. $\mathcal{L}\big(3\big)(s) =$ ....

Exercice n° 7 : Démontre que $\mathcal{L}(\sin(t))(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$

2. Propriétés de la transformée de Laplace

Propriété

La transformée de Laplace est linéaire : pour tous nombres réels a et b, on a :

$$\mathcal{L}(a \times f + b \times g) = a \times \mathcal{L}(f) + b \times \mathcal{L}(g)$$

Exemple n° 21 :

i. $\mathcal{L}\big(4\sin(3t)\big)(s) =$ ....

ii. $\mathcal{L}\big(4t^2 - 3\cos(2t) + 5\mathrm{e}^{-t}\big)(s) =$ ....

$=$ ....

iii. $\mathcal{L}\big(2t^2 - 1\big)(s) =$ ....

iv. $\mathcal{L}\left[\dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{t}{4}\right)\right](s) =$ ....

Exercice n° 8 : Démontre que $\mathcal{L}\big[\mathrm{ch}(at)\big](s) = \dfrac{s}{s^2 - a^2}$.

Théorème de l'amortissement

$\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right](s)=\mathcal{L}(f)(s-a)$

Démonstration

$\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right](s)=$ ....

Exemple n° 22 :

i. $\mathcal{L}\left[\sin(2t)\,e^{t}\right](s)=$ .... car ....

ii. $\mathcal{L}\left[\sin(2t)\,e^{-t}\right](s)=$ ....

iii. $\mathcal{L}\left[\cos\left(\frac{2}{3}t\right)e^{2t}\right](s)=$ .... car ....

iv. $\mathcal{L}\left[\cos\left(\frac{2}{3}t\right)e^{-2t}\right](s)=$ ....

v. $\mathcal{L}\left[te^{4t}\right](s)=$ .... car ....

Exercice n° 9 : Trouve

1. $\mathcal{L}\left(t^2e^{3t}\right)$
2. $\mathcal{L}\left(e^{-2t}\sin(4t)\right)$
3. $\mathcal{L}\left(e^{4t}\cos(5t)\right)$
4. $\mathcal{L}\left[\left[3\cos(6t)-5\sin(6t)\right]e^{-2t}\right]$

Exercice n° 10 :

1. Démontre que $\mathcal{L}\left[\cos^2(t)\right](s)=\dfrac{s^2+2}{s^3+4s}$
2. Déduis-en $\mathcal{L}\left[\cos^2(t)e^{-t}\right](s)$

Exercice n° 11 : Détermine $\mathcal{L}\left[\cos\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)\right](s)$.

Théorème du changement d'échelle

Pour tout ....., si $\mathcal{L}(f(t))=F(s)$ alors $\mathcal{L}[f(at)]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$

Démonstration

$$\mathcal{L}[f(at)]=\int_0^{+\infty}f(at)e^{-st}\,dt\underset{u=at}{=}\int_0^{+\infty}f(u)e^{-s\left(\frac{u}{a}\right)}d\left(\frac{u}{a}\right)=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(u)e^{-\left(\frac{s}{a}\right)u}\,du$$

Exemple n° 23 : Sachant que $\mathcal{L}(\cos)(s)=\dfrac{s}{s^2+1}$ démontre que $\mathcal{L}[\cos(at)](s)=\dfrac{s}{s^2+a^2}$

$\mathcal{L}[\cos(at)](s)=$ ....

3. La fonction Γ

Définition:

Pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction ...., notée ... est définie par : $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

Propriété

Pour tout réel $\alpha > 1$, et tout entier naturel n non nul :

- $\Gamma(\alpha) =$ .....
- $\Gamma(1) =$ .....

Démonstration

- $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \underset{\text{IPP}}{=} \underbrace{\Big[t^{\alpha-1}\big(-\mathrm{e}^{-t}\big)\Big]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty}(\alpha-1)t^{\alpha-2}\big(-\mathrm{e}^{-t}\big)\,\mathrm{d}t = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$
- $\Gamma(1) =$ ....

Exemple n° 24 : Calcule :

- $\Gamma(2) =$ ....
- $\Gamma(5) =$ ....
- $\Gamma(8) =$ ....

Propriété

Pour tout tout entier naturel n non nul :

- $\Gamma(n+1) =$ .....
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$ .....

Exemple n° 25 : Calcule :

- $\Gamma(5) =$ ....
- $\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right) =$ ....

  $=$ ....
- $\Gamma\left(4+\dfrac{1}{2}\right) =$ ....
- $\Gamma\left(\dfrac{13}{2}\right) =$ ....
- $\Gamma(1,5) =$ ....

Propriété

Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exemple n° 26 : $\Gamma(5,5) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Propriété

Pour tout $\dots\dots\dots$, $\mathcal{L}(t^{\alpha}) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha+1}}$

Exemple n° 27 :

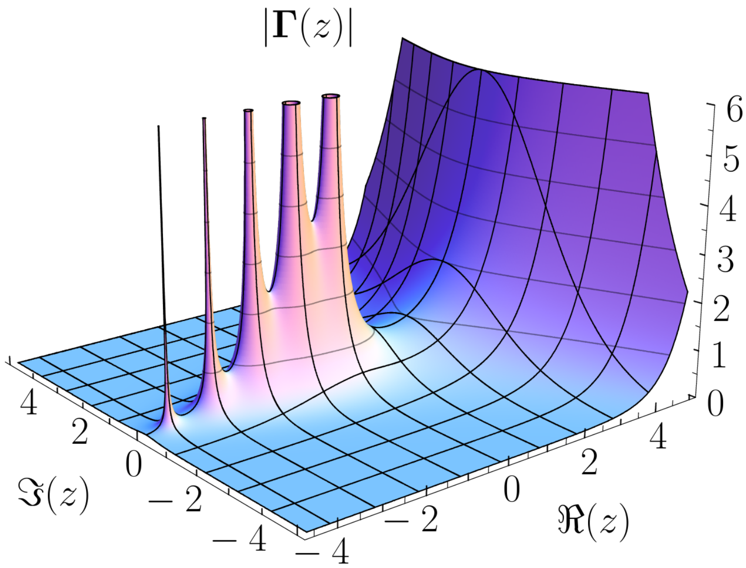
- $\mathcal{L}(t^3) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- $\mathcal{L}(t^5) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- $\mathcal{L}(t^{3,5}) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- $\mathcal{L}(\sqrt{t}) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- $\mathcal{L}(t\sqrt{t}) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- $\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Maintenant, prolongeons le domaine de validité de nos calculs en utilisant la formule $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$, c'est-à-dire : $\Gamma(\alpha-1) = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{\alpha-1}$ soit $\Gamma(\alpha) = \dots\dots\dots$

- $\Gamma\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- $\Gamma\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- $\Gamma\left(-\dfrac{5}{2}\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Par contre,

- $\Gamma(1) = \Gamma(0) \times 0$ et il en résulte que $\Gamma(0)$ doit être $\dots\dots\dots\dots$
- $\Gamma(0) = \Gamma(-1) \times (-1)$ et il en résulte que $\Gamma(-1)$ doit être $\dots\dots\dots\dots$
- $\Gamma(-1) = \Gamma(-2) \times (-2)$ et il en résulte que $\Gamma(-1)$ doit être $\dots\dots\dots\dots$



En fait, en prolongeant la fonction Γ au nombres complexes, en reprenant $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $\Re(z) > 0$, elle peut être prolongée analytiquement en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0; -1; -2; -3; \dots\}$, dont le module est représenté ci-contre.

Il s'en suit la propriété suivantes :

Propriété

Pour tout entier naturel $n > 0$, $\Gamma\left(-n+\dfrac{1}{2}\right) = (-1)^n \times \dfrac{2\times 2\times 2\times \dots \times 2}{1\times 3\times 5\times \dots \times (2n-1)}\sqrt{\pi}$ (n facteurs)

Théorème de dérivation

Soit f une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$.

- $\mathcal{L}\big(f'\big)(s) = s\mathcal{L}\big(f\big)(s) - f(0)$
- $\mathcal{L}\big(f''\big)(s) = s^2\mathcal{L}\big(f\big)(s) - sf(0) - f'(0)$
- $\mathcal{L}\big(f'''\big)(s) = s^3\mathcal{L}\big(f\big)(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$
- $\mathcal{L}\Big(f^{(k+1)}\Big)(s) = s^{k+1}\mathcal{L}\big(f\big)(s) - \displaystyle\sum_{i=0}^{k} s^i f^{(k-i)}(0)$

Exercice n° 12 : Démontre que

1. $\mathcal{L}\big(f'\big)(s) = s\mathcal{L}\big(f\big)(s) - f(0)$
2. Déduis-en $\mathcal{L}\big(f''\big)(s) = s^2\mathcal{L}\big(f\big)(s) - sf(0) - f'(0)$

Exercice n° 13 : Retrouve la transformée de Laplace du cosinus à partir de celle du sinus.

Considérons l'**E**quation **D**ifférentielle $\begin{cases} y' + y = \mathrm{e}^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$

On a $\mathcal{L}[y'] =$ .... et $\mathcal{L}\big[\mathrm{e}^t\big] =$ .... donc, la transformée de Laplace de l'**ED** est :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad = \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad = \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathcal{L}[y]\,(s) \quad = \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Donc, il faut retrouver la fonction y qui dans le domaine de Laplace s'écrit .... Pour ce faire, il faut savoir revenir au domaine temporel en inversant la transformée de Laplace.

III. Transformée inverse de Laplace.

Si l'on se restreint aux fonctions causales continues sur $[0, +\infty[$, le théorème de Lerch affirme que la transformée de Laplace est injective. Ainsi, la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-3t}\mathcal{U}(t)$ est la seule fonction causale continue sur $[0, +\infty[$ dont la transformée de Laplace est $\dfrac{1}{s+3}$, on écrit :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) = \mathrm{e}^{-3t}$$

A partir de maintenant, nous supposerons toujours cette unicité.

Propriété

- $\mathcal{L}^{-1}$ est linéaire : $\mathcal{L}^{-1}\big[a \times F(s) + b \times G(s)\big] =$ ....
- $\mathcal{L}^{-1}\big[F(s-a)\big] =$ ....
- Pour tout ..... , $\mathcal{L}^{-1}\big[F(as)\big](t) =$ ....

Pour inverser une transformée de Laplace, on procède à une lecture inversée des transformées usuelles en utilisant les propriétés ci-dessus.

Exercice n° 14 : Trouve chacune des transformées inverses de Laplace suivantes :

a. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2+9}\right) =$ ....

b. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{4}{s-2}\right) =$ ....

c. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^4}\right) =$ ....

d. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2+2}\right) =$ ....

e. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3}{s}\right) =$ ....

f. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{6s}{s^2-16}\right) =$ ....

g. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2-3}\right) =$ ....

h. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{5}{s^3}\right) =$ ....

i. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2}{s+1}\right) =$ ....

j. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3}{s^2+7}\right) =$ ....

k. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{5}{s^2-5}\right) =$ ....

l. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3}{s^2}\right) =$ ....

m. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2s}{s^2+4}\right) =$ ....

1. Tableau des transformées inverses de Laplace

$f(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\big[f(s)\big]$	$f(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\big[f(s)\big]$
$\dfrac{1}{s}$		$\dfrac{1}{s^2}$	
$\dfrac{1}{s^\alpha}, \alpha > -1$		$\dfrac{1}{s-a}$	
$\dfrac{1}{s^2+a^2}$		$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	
$\dfrac{1}{s^2-a^2}$		$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	

Remarque

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^n}\right) = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ car $\Gamma(n) = (n-1)!$

Exercice n° 15 : Trouve

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{5s+4}{s^3}-\dfrac{2s-18}{s^2+9}+\dfrac{24-30\sqrt{s}}{s^4}\right]$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{6}{2s-3}-\dfrac{3+4s}{9s^2-16}+\dfrac{8-6s}{16s^2+9}\right]$

2. Amortissement inversé.

Transformée inverse d'amortissement

$\mathcal{L}^{-1}\big[F(s-a)\big]=\mathrm{e}^{at}\mathcal{L}^{-1}\big[F(s)\big]$

Exemple n° 28 :

- $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^3}\right]=$ ...., et d'après la formule d'amortissement : $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-5)^3}\right]=$ ....
- $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{-3}{(s+2)^2}\right]=$ .... car $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right]=$ .....
- $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+4^2}\right]=$ ...., et d'après la formule d'amortissement : $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{(s-2)}{(s-2)^2+4^2}\right]=$ ....
- $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}\right]=$ ....

  $=$ ....

Exercice n° 16 : Calcule

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}\right]$ (b) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}\right]$

IV. Application aux équations différentielles

1. Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Considérons l'**E**quation **D**ifférentielle $\begin{cases} y'+y=\mathrm{e}^t \\ y(0)=1 \end{cases}$

On a $\mathcal{L}[y']=s\mathcal{L}[y]\,(s)-y(0)=s\mathcal{L}[y]\,(s)-1$ et $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^t\right]=\dfrac{1}{s-1}$ donc, la transformée de Laplace de l'**ED** est :

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}[y]\,(s)-1+\mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s-1} \\ (s+1)\mathcal{L}[y]\,(s) &= \frac{1}{s-1}+1=\frac{s}{s-1} \\ \mathcal{L}[y]\,(s) &= \frac{s}{(s-1)(s+1)} \end{aligned}$$

On décompose en éléments simples : $\dfrac{s}{(s-1)(s+1)} = \dfrac{\quad}{s-1} + \dfrac{\quad}{s+1}$

Il s'en suit que $y(t) =$ ....

2. Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Considérons l'**E**quation **D**ifférentielle $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{3t} \\ y(0) = 2 \text{ et } y'(0) = 1 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} \mathcal{L}[y'](s) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{L}[y''](s) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{3t}\right](s) = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$

La transformée de Laplace de l'**ED** est : ....

$\mathcal{L}[y](s) =$ ....

$=$ .... comme $s^2 - 3s + 2$ a deux racines : ... et ... , on a :

$\mathcal{L}[y](s) =$ .... dont la **DES** est : $\mathcal{L}[y](s) = \dfrac{\quad}{s-1} + \dfrac{\quad}{s-2} + \dfrac{\quad}{s-3}$

Il s'en suit que $y(t) =$ ....

Exercice n° 17 : Résous l'équation différentielle linéaire du second ordre : $\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = \mathrm{e}^{4t} \\ y'(0) = 0 \text{ et } y(0) = 1 \end{cases}$

Exercice n° 18 : Résous l'équation différentielle linéaire du second ordre : $\begin{cases} y'' + 9y = \cos(2t) \\ y'(0) = c \text{ et } y(0) = 1 \end{cases}$

Exercice n° 19 : Résous l'équation différentielle linéaire du troisième ordre : $\begin{cases} y''' - y'' + 3y' + 5y = 0 \\ y''(0) = -9, y'(0) = -1 \text{ et } y(0) = 3 \end{cases}$

<u>Indication :</u> $s^3 - s^2 + 3s + 5$ s'annule en -1.

Exercice n° 20 : Résous l'équation différentielle linéaire du troisième ordre : $\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2\mathrm{e}^t \\ y''(0) = -2, y'(0) = 0 \text{ et } y(0) = 1 \end{cases}$

<u>Indication :</u> $s^3 - s^2 + 3s + 5$ s'annule en -1.

3. Systèmes différentielles

Exemple n° 29 : On va résoudre $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = y(t) - 2x(t) \end{cases}$ où $x(0) = 8$ et $y(0) = 3$.

En posant $X(s) = \mathcal{L}[x](s)$ et $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$, on a : $\begin{cases} \mathcal{L}[x'](s) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{L}[y'](s) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

Le système devient $\begin{cases} \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots \end{cases}$ soit $\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots = \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots = \dots \end{cases}$

- $X(s) = \dfrac{\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \dfrac{\qquad}{(s+1)} = \dfrac{\quad}{s+1} + \dfrac{\quad}{\quad}$

- $Y(s) = \dfrac{\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \dfrac{\qquad}{(s+1)} = \dfrac{\quad}{s+1} - \dfrac{\quad}{\quad}$

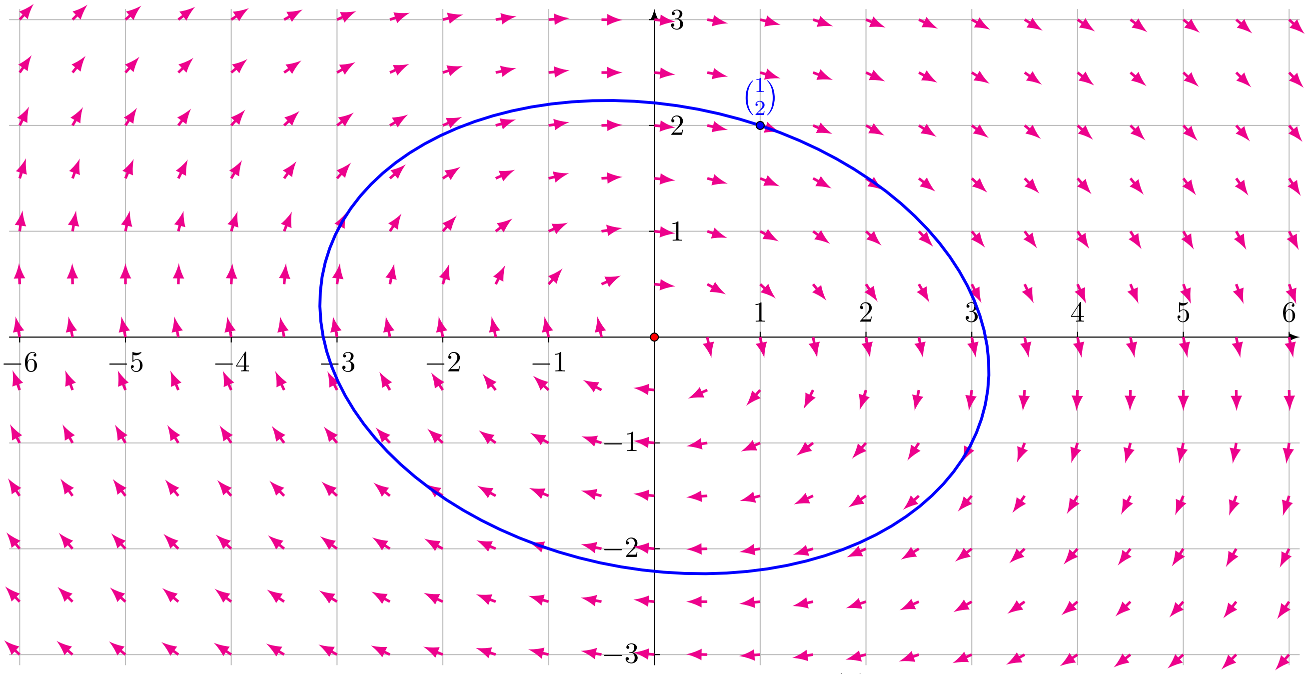
D'où $\begin{cases} x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)](t) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$

Exercice n° 21 : On considère le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 10y(t) \\ y'(t) = -5x(t) - y(t) \end{cases}$.

(a) Résous ce système avec les conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = 2$.

(b) Résous ce système avec les conditions initiales $x(0) = a$ et $y(0) = b$.

(c) Pourquoi deux courbes solutions qui se touchent sont confondues ?



Courbe solution de la question (a)

Exercice n° 22 : (long et difficile) Résous $\begin{cases} x''(t) + y'(t) + 3x(t) = 15\mathrm{e}^{-t} \\ y''(t) - 4x'(t) + 3y(t) = 15\sin(2t) \end{cases}$ où $\begin{cases} x(0) = 35 \\ y(0) = 27 \end{cases}$ et $\begin{cases} x'(0) = -48 \\ y'(0) = -55 \end{cases}$

Indication : $(s^2+3)^2 + 4s^2 = (s^2+1)(s^2+9)$

Annexe

Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(s)$	Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(s)$
$f(t) = k$	$F(s) = \dfrac{k}{s}$	$f(t) = t$	$F(s) = \dfrac{1}{s^2}$
$f(t) = t^n$	$F(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$f(t) = \mathrm{e}^{at}$	$F(s) = \dfrac{1}{s-a}$
$f(t) = \sin(at)$	$F(s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}$	$f(t) = \cos(at)$	$F(s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}$
$f(t) = \mathrm{sh}(at)$	$F(s) = \dfrac{a}{s^2-a^2}$	$f(t) = \mathrm{ch}(at)$	$F(s) = \dfrac{s}{s^2-a^2}$

Théorème de l'amortissement

$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{at}f(t)\right](s) = \mathcal{L}(f)(s-a)$

Propriété

- Pour tout $\alpha > -1$, $\mathcal{L}\left(t^\alpha\right) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha+1}}$
- Pour tout entier $n \geqslant 1$: $\Gamma(n) = (n-1)!$
- Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n+1)}{2^n}\sqrt{\pi}$ (n facteurs)
- Pour tout entier naturel $n > 0$, $\Gamma\left(-n+\dfrac{1}{2}\right) = (-1)^n \times \dfrac{2^n}{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}\sqrt{\pi}$ (n facteurs)

Tableau des transformées inverses de Laplace

$f(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\left[f(s)\right]$	$f(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\left[f(s)\right]$
$\dfrac{1}{s}$	1	$\dfrac{1}{s^2}$	t
$\dfrac{1}{s^\alpha}, \alpha > -1$	$\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$\mathrm{sh}(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\mathrm{ch}(at)$

Transformée inverse de l'amortissement

$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s-a)\right] = \mathrm{e}^{at}\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$