le cnam

2024 - 2025

Fonctions de plusieurs variables

FA18

Calcul différentiel

Fonctions de plusieurs variables

Un pas vers l'optimisation

I. Fonctions numérique à plusieurs variables ?

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables dans le cadre particulier de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, mais également dans le cadre général de $\mathbb{R}^n$. Ces fonctions seront donc de la forme

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

où $n \geqslant 1$ est un entier naturel.

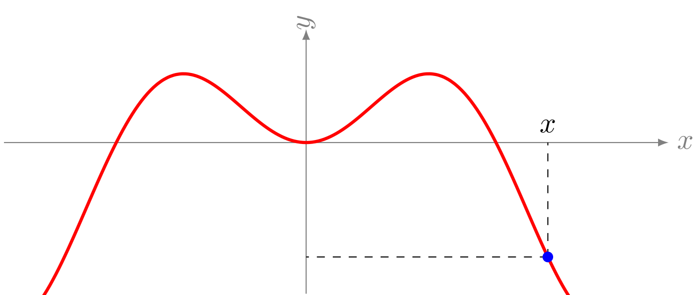
Définition:
D est appelé le .... de la fonction.

Autrement dit, les éléments de l'ensemble de départ D seront des n-uplets du type $(x_1, \ldots, x_n)$ que l'on peut considérer comme des vecteurs, et les éléments de l'ensemble d'arrivée seront des réels.

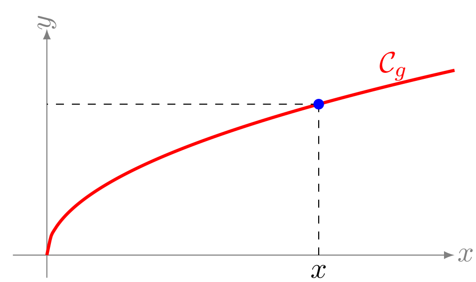
1. Fonction numérique à une variable $n = 1$:

Les fonctions $\begin{array}{rccl} f\colon & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ sont connues depuis le lycée.

Voici les graphes des fonctions $f : x \longmapsto x\sin(x)$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$:



$D = \ldots$



$D = \ldots\ldots\ldots$

La variable x est ...., alors que la variable y $\big(= f(x)\big)$ ne l'est pas puisqu'elle est fonction de x. La courbe obtenue est de dimension .... .

2. Fonction numérique à deux variables $n = 2$.

Les fonctions $\begin{array}{rccl} f\colon & D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & f(x, y) \end{array}$ sont représentées par des surfaces.

Les variables .... sont ...., alors que la variable $z = f(x, y)$ ne l'est pas puisqu'elle est fonction de .... La surface obtenue est de dimension .... .

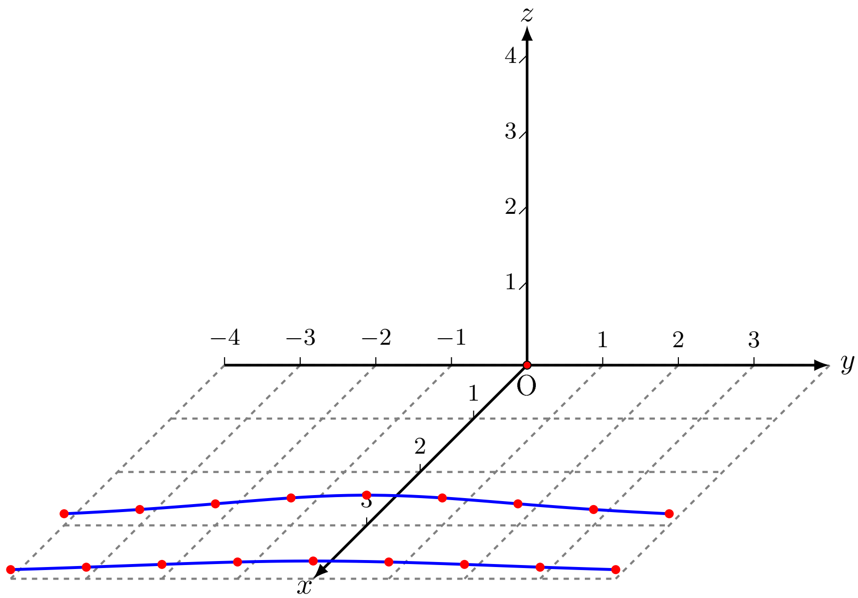
Exemples :

(a) Considérons la fonction $\begin{array}{rccl} f : & [0\,;\,4] \times [-4\,;\,4] & \longrightarrow & [0\,,\,+\infty[\\ & (x\;,\;y) & \longmapsto & \dfrac{4}{1 + x^2 + y^2} \end{array}$

- La variable x prend toutes les valeurs situées dans l'intervalle ....
- La variable y prend toutes les valeurs situées dans l'intervalle ....
- $[0\,;\,4] \times [-4\,;\,4]$ est ....

3. Représentation graphique :

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(0,y)$	0,24								

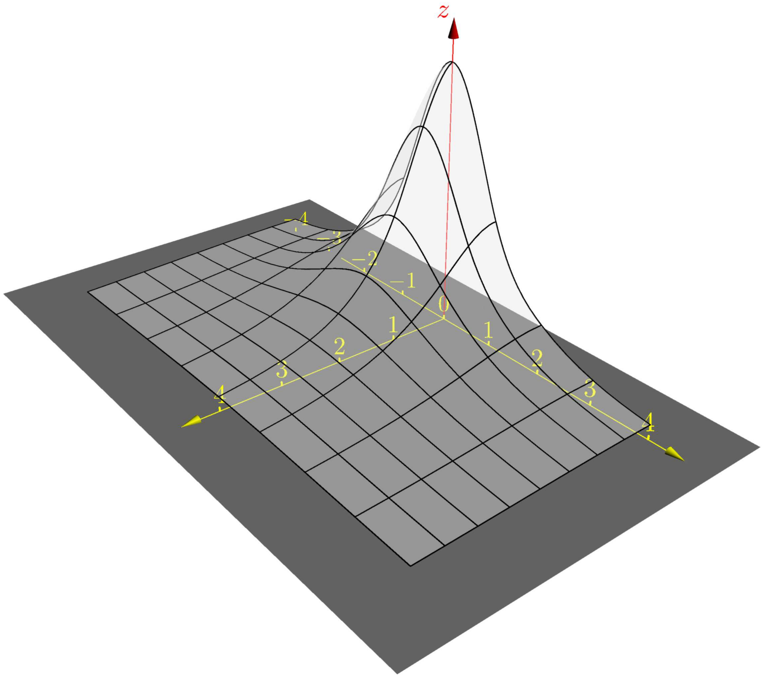


Fixons $x = 1$ on a $f(1,y) = \dots\dots\dots\dots\dots$ et on obtient :

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(1,y)$	0,22								

On complète pour d'autres valeurs de x :

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(2,y)$	0,19								0,19
$f(3,y)$	0,15	0,21	0,29	0,36	0,4	0,36	0,29	0,21	0,15
$f(4,y)$	0,12	0,15	0,19	0,22	0,24	0,22	0,19	0,15	0,12



Définition:

Lorsque (x, y) parcourt le domaine de définition de f, l'ensemble des points de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ forme une ....

II. Dérivées partielles

1. Les formules de dérivation.

Fonctions	Dérivées
$f(ax+b)$	
e^{ax+b}	
$\cos(ax+b)$	
$\sin(ax+b)$	
x^n	
$\frac{1}{x^n}$	
$\ln(x)$	
$\sqrt{x}$	

Opérations	Dérivées
$u+v$	
$u \times v$	
$\dfrac{u}{v}$	
$\dfrac{1}{u}$	
u^n	
$\dfrac{1}{u^n}$	
$\ln(u)$	
$\sqrt{u}$	

2. Dérivée de fonctions composées.

Théorème

Si f est dérivable sur un intervalle I et g l'est sur l'intervalle $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' =$ .... écrit autrement : $\left[g(f(x))\right]' =$ ....

Exemple n° 1 : On considère les deux fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sin(x)$.

- $f(\mathbb{R}) =$ .... et $g(\mathbb{R}) =$ ....

- $$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r] & \cdots\cdots\cdots \arrow[r] & \cdots\cdots\cdots \\ x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \cdots\cdots \arrow[r, mapsto] & \cdots\cdots\cdots \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r] & \cdots\cdots\cdots \arrow[r] & \cdots\cdots\cdots \\ x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & \cdots\cdots \arrow[r, mapsto] & \cdots\cdots\cdots \end{tikzcd}$$

- $f'(x) =$ .... , $g'(x) =$ ....
- $(g \circ f)'(x) =$ ....
- $(f \circ g)'(x) =$ ....

Exercice n° 1 : Dérive les fonctions composées suivantes :

1. si $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$ alors $f'(x) =$ ....
2. si $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}$ alors $f'(x) =$ ....
3. si $f(x) = \sin\left(\mathrm{e}^{x}\right)$ alors $f'(x) =$ ....
4. si $f(x) = \cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)$ alors $f'(x) =$ ....

En appliquant le théorème, on obtient :

Fonction	Dérivée
$\mathrm{e}^{u(x)}$	
$\cos\left(u(x)\right)$	
$\sin\left(u(x)\right)$	

3. Dérivation partielle.

Définition:

On appelle .... d'une fonction de plusieurs variables par rapport à l'une d'elles, la dérivée ordinaire de cette fonction par rapport à cette variable.

Exercice n° 2 : Calcule les dérivées partielles de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^2 - 2y^3 + 1$
2. $g(x, y) = xy^2 - 3x + 7y$
3. $h(x, y) = x^3y^2 - 7x^2y + y - x$
4. $r(x, y) = \mathrm{e}^{2x+3y}$
5. $s(x, y) = \mathrm{e}^{8xy^2}$
6. $i(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$
7. $j(x, y) = x^2\mathrm{e}^{xy}$
8. $k(x, y) = \ln\left(x^2y - y^3 + 1\right)$

9. $\ell(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

10. $m(x,y) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

11. $n(x,y) = xy^2\ln\left(x^2-y\right)$

12. $o(x,y) = \sin\left(3x-y^2\right)$

4. Dérivation partielle de fonctions composées.

Soient $f(x,y)=x^2y$ où $x(t)=\sin(t)$ et $y(t)=\cos(t)$ alors $f(t)=$ ....

La fonction f ne dépendant que de la variable t donc, au lieu de noter $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ on note $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, car il ne s'agit plus d'une dérivation ....

$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f'(t) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

Différentiation des fonctions composées

1. Soit $z=f(x,y)$ où $x=g(r,s)$ et $y=h(r,s)$ alors $z=f\big(g(r,s),h(r,s)\big)$ et

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. En général, si $u=f(x_1,\ldots,x_n)$ où $x_1=g_1(r_1,\ldots,r_p),\ldots,x_n=g_n(r_1,\ldots,r_p)$ on a :

$$\frac{\partial u}{\partial r_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial r_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial r_k} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial r_k}$$

Retrouvons avec cette formule le résultat précédent :

$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

Exercice n° 3 : $z=\mathrm{e}^{xy^2}$ où $x=t\cos(t)$ et $y=t\sin(t)$. Calcule $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ en $t=\frac{\pi}{2}$.

Exercice n° 4 : $T=x^3-xy+y^3$ où $x=r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$. Calcule $\dfrac{\partial T}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial T}{\partial \theta}$

Exercice n° 5 : $U=z\sin\left(\frac{y}{x}\right)$ où $x=3r^2+2s$, $y=4r-2s^3$, et $z=2r^2-3s^2$. Calcule $\dfrac{\partial U}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial U}{\partial s}$

Exercice n° 6 : Si $x=r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$ démontre que : $\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2$.

5. Dérivées partielles d'ordre supérieur.

Si $f(x,y)$ admet des dérives partielles en tout point (x,y) d'un domaine, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont elles-mêmes des fonctions de x et y qui peuvent aussi avoir des dérivées partielles. Ces dérivées secondes se notent :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,,\ \text{et}\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Exemple n° 2 : $f(x,y) = 5x^3 + 3xy^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} =$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$ ....
$\dfrac{\partial f}{\partial y} =$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} =$ ....
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} =$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =$ ....

Exemple n° 3 : $f(x,y,z) = xyz - x^2y^3$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} =$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} =$ ....
$\dfrac{\partial f}{\partial y} =$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =$ ....
$\dfrac{\partial f}{\partial z} =$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} =$ ....
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} =$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} =$ ....
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} =$ ....
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} =$ ....

Théorème Schwarz

Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existent et sont continues, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =$ ....

6. Fonctions implicites.

Exercice n° 7 : Si $\begin{cases} U = x^3 y \\ x^5 + y = t \\ x^2 + y^3 = t^2 \end{cases}$ calcule $\dfrac{\partial U}{\partial t}$

Exercice n° 8 : Si $\begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \\ 1 - 8uv \neq 0 \end{cases}$ calcule $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, et $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Exercice n° 9 : Si $z^3 - xz - y = 0$, montre que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{3z^2 + x}{(3z^2 - x)^3}$

III. Applications linéaires

Définition:

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et f une application de E dans F. Une application f est .... si et seulement si

- $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) =$ ....
- $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall\overrightarrow{u} \in E,\ f(\lambda \cdot \overrightarrow{u}) =$ ....

On note .... l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Cette application linéaire est appelée :

- .... de E dans F lorsque f est bijective ;
- .... sur E si F est de dimension 1, autrement dit, si $F = \ldots$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple n° 4 : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y\,,\, x + z\,,\, 3x + z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f\left(\overrightarrow{i}\right) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} \\ f\left(\overrightarrow{j}\right) & = & \ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f\left(\overrightarrow{k}\right) & = & \ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Considérons la matrice A dont les colonnes sont constituées des images par f des vecteurs de la base :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{i}) & \boldsymbol{f(\overrightarrow{j})} & f(\overrightarrow{k}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ on a : } \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\ldots\ldots} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple n° 5 : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x-z \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} f\left(\overrightarrow{i}\right) & = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots \\ f\left(\overrightarrow{j}\right) & = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots \\ f\left(\overrightarrow{k}\right) & = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots \end{array}$$

Considérons la matrice A dont les colonnes sont constituées des images par f des vecteurs de la base :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{i}) & \boldsymbol{f(\overrightarrow{j})} & f(\overrightarrow{k}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ on a : } \underbrace{\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}}_{\ldots\ldots} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

3. Cas général :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \ldots, \overrightarrow{f_n}\right)$ une base de F. Soit f est une application linéaire de E dans F, i.e. $f \in L(E,F)$.

Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et son image $\overrightarrow{y} \in F$ par f.

- Dans la base $\mathcal{F}$ de F, les $f(\overrightarrow{e_j})$ s'écrivent de manière unique :

$$f(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} \ldots \overrightarrow{f_i}, \text{ pour tout } j = 1, \ldots, p.$$

- Dans la base $\mathcal{E}$: $\overrightarrow{x} = \sum\limits_{j=1}^{p} x_j \overrightarrow{e_j}$

- Dans la base $\mathcal{F}$: $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{f_i}$

$$\left.\begin{array}{rcl} f(\overrightarrow{x}) & = & \sum\limits_{j=1}^{p} x_j f(\overrightarrow{e_j}) = \sum\limits_{j=1}^{p} x_j \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} \overrightarrow{f_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right) \overrightarrow{f_i} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{f_i} \end{array}\right\} \text{donc } y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$$

Cette égalité se traduit matriciellement par :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{1,j}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{2,j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{n,j}x_j \end{pmatrix}.$$

Définition:

La matrice $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est appelée matrice de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, et est notée ....

Exemple n° 6 :

- Si $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \dots & \quad \dots \end{pmatrix}} \end{array}$ où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \dots\dots\dots \text{ et } \overrightarrow{e_2} = \dots\dots\dots \\ f(\overrightarrow{e_1}) \dots\dots\dots \text{ et } f(\overrightarrow{e_2}) \dots\dots\dots \end{array} \right.$

- Si $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\mathrm{mat}}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & f(\overrightarrow{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array}$ car $f(x,y,z) =$

où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \dots\dots\dots\dots \;,\; \overrightarrow{e_2} = \dots\dots\dots\dots \;, \text{ et } \overrightarrow{e_3} = \dots\dots\dots\dots \\ f(\overrightarrow{e_1}) = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \;,\; f(\overrightarrow{e_2}) = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}, \text{ et } f(\overrightarrow{e_3}) = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \end{array} \right.$

4. Propriétés

Propriété

Soient E, F, et G trois espaces vectoriels de dimension fini. E est muni d'une base $\mathcal{E}$, F d'un base $\mathcal{F}$, et G d'une base $\mathcal{G}$.

Pour tout $f \in L(E,F)$, $g \in L(F,G)$, $\underset{\mathcal{E},\mathcal{G}}{\mathrm{mat}}(g \circ f) =$ ....

Autrement dit, composer deux applications linéaires revient à multiplier leurs matrices dans le même ordre.

Exemple n° 7 : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

  $(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

  $$g \circ f : \begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{g} & \\ (x,y,z) & \longmapsto & & \longmapsto & \end{array}$$

  En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

  $$\mathrm{mat}\,(g)\,\mathrm{mat}\,(f) =$$

- **Etude de $f \circ g$:**

  ....

  ....

Exercice n° 10 : Détermine algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ -x \end{pmatrix} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -x \\ 2y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

Propriété

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et f un isomorphisme de E dans F. Si E est muni d'une base $\mathcal{E}$ et F d'un base $\mathcal{F}$ alors :

$$\underset{\mathcal{F},\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}\left(f^{-1}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Autrement dit, la matrice de la bijection réciproque de f est la matrice inverse de f.

IV. Espace affine $\mathbb{R}^n$

1. Structure euclidienne.

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^n$, les coordonnées sont des matrices colonnes de dimension n. Celle du vecteur $\overrightarrow{a}$ est notée $\left[\overrightarrow{a}\right]$.

Définition:

Dans un repère .... :

- Les .... du vecteur $\overrightarrow{AM}$ où $[A] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $[M] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ sont ....

Dans un repère .... :

- le .... usuel de $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\overrightarrow{y} = (y_1, \dots, y_n)$, noté ....., est défini par

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = {}^t\left[\overrightarrow{x}\right]\left[\overrightarrow{y}\right]$$

- La .... sur $\mathbb{R}^n$ est la norme associée à ce produit scalaire.
  Pour $x \in \mathbb{R}^n$, la norme euclidienne de $\overrightarrow{x}$, notée ....., est définie par :

$$\|x\| = \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

- La .... entre le point $A = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ et le point $M = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ est

$$\|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}. \quad (\|M - A\|)$$

Exercice n° 11 : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois points : $A \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $C \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Calcule les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Définition:

Soit $A = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$ l'espace affine de dimension $n \geqslant 1$.

- La .... de centre A et de rayon $r > 0$, notée $B_r(A)$, est l'ensemble suivant :

$$B_r(A) = \{M \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|M - A\| < r\}.$$

- La .... de centre A et de rayon $r > 0$, notée ....., est l'ensemble suivant :

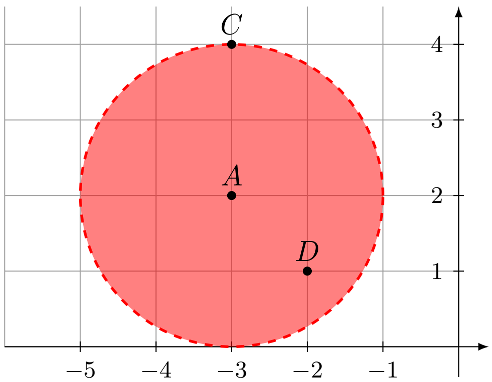
$$\overline{B}_r(A) = \{M \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|M - A\| \leqslant r\}.$$

- La .... de centre A et de rayon $r > 0$, notée $S_r(A)$, est l'ensemble suivant :

$$\overline{B}_r(A) = \{M \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|M - A\| = r\}.$$

Exemple n° 8 :

(a) En dimension 2 : Considérons la boule ouverte $B_2(A)$ où $A(-3, 2)$.



☞ Le cercle en tirets est la sphère $S_2(A)$ (sphère de dimension 1).

☞ La boule est ouverte donc son "bord" est dessiné avec des tirets pour signifier qu'il n'appartient pas à la boule.

Si la boule avait été fermée, le cercle serait tracé en trait plain.

☞ $C \ldots S_2(A)$; $C \ldots B_2(A)$; $C \ldots \overline{B}_2(A)$

☞ $D \ldots S_2(A)$; $D \ldots B_2(A)$; $D \ldots \overline{B}_2(A)$

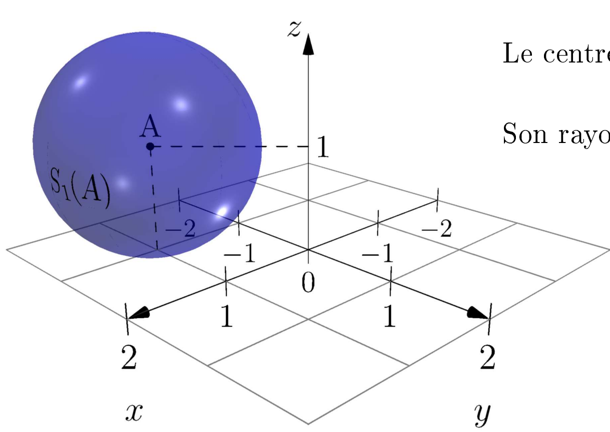
$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B_2(A) &\iff \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix} \right\| < 2 \\ &\iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

☞ .... est l'inéquation cartésienne de la boule ouverte $B_2(A)$.

☞ $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$ est l'équation cartésienne de ....

☞ $(x+3)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4$ est l'inéquation cartésienne de ....

(b) En dimension 3 : Considérons la sphère suivante :

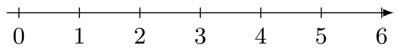


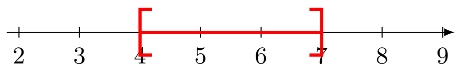
Le centre de cette sphère de dimension ... est le point $A \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right.$

Son rayon est ...

(c) En dimension 1 : L'espace est réduit à une droite !

- $x \in \overline{B}_2(3) \iff$ ....



- $x \in B_3(1) \iff$ ....
- $x \in B_2(-1) \iff$ ....
- 

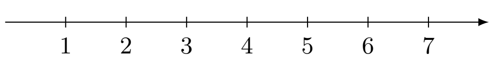
$x \in$ ......

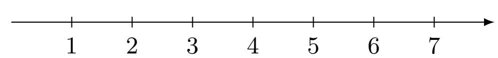
2. Structure topologique.

Définition:
Etant donnée une partie A de $\mathbb{R}^n$, le .... de A, note ..., est l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas dans A.

Exemple n° 9 :

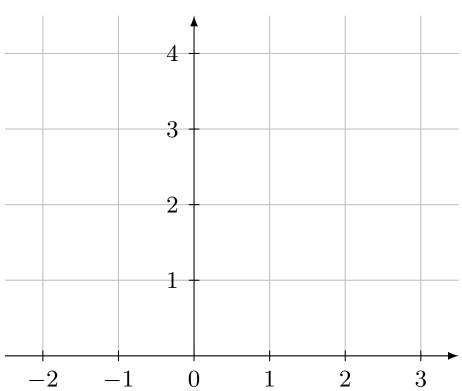
a) En dimension 1 :

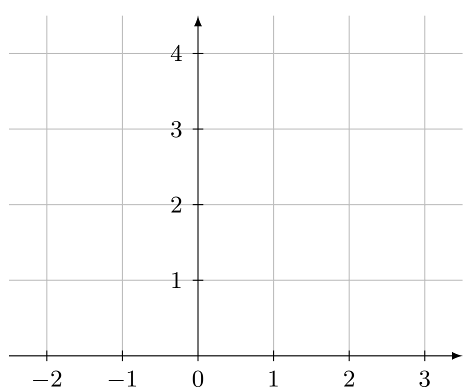
- Le complémentaire de l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\right\}$ est ....
- Le complémentaire de l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\right\}$ est ....
- 

son complémentaire : 

- Le complémentaire de l'intervalle $\left[2\,,\,6\right]$ est la réunion d'intervalles ....
- Le complémentaire de l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 8\right\}$ est ....

b) En dimension 2 : On va construire l'ensemble $\left[-1\,,\,2\right[\times \left]1\,,\,3\right]$ et son complémentaire :





Définition:

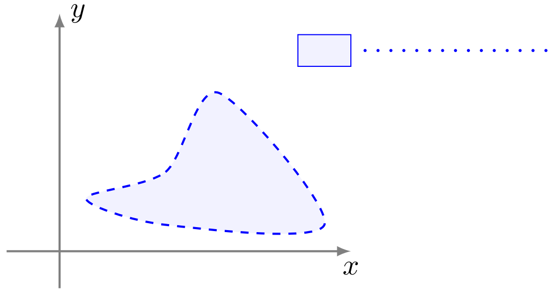
- Soient U une partie de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. On dit que U est un .... de a si U contient une boule ouverte centrée en a.
- On dit que U est un .... de $\mathbb{R}^n$ si, pour tout point $a \in U$, U contient une boule ouverte centrée en a.
- On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}^n$ est un .... si son complémentaire est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

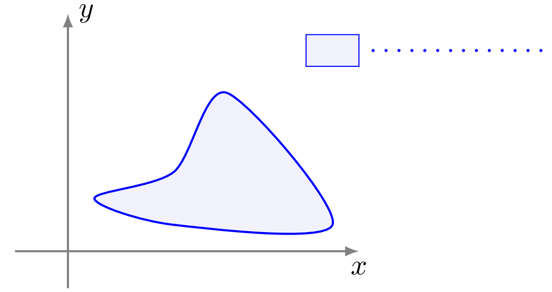
Exemples :

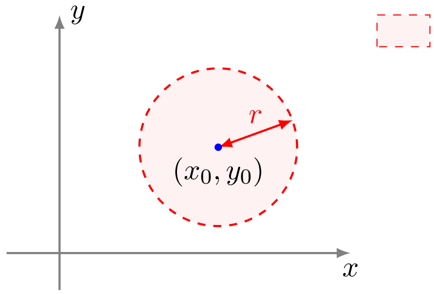
(a) En dimension 1 : L'intervalle :

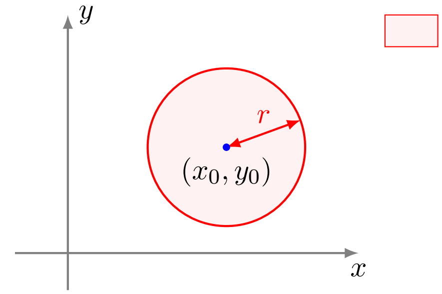
$]a, b[$ est un .... ; $[a, b]$ est un .... ; et $[a, b[$ ....

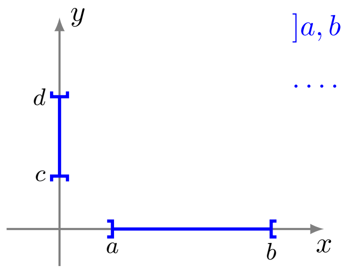
(b) En dimension 2 :





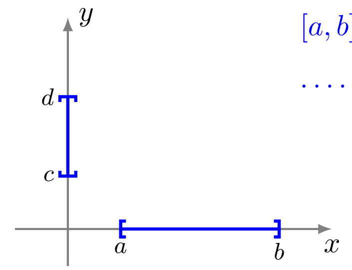






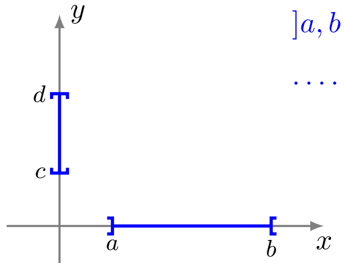
$]a, b[\times]c, d[$

....



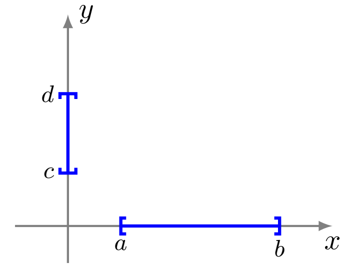
$[a, b] \times [c, d]$

....



$]a, b[\times[c, d]$

....



$\big([a, b] \times [c, d]\big)^c$

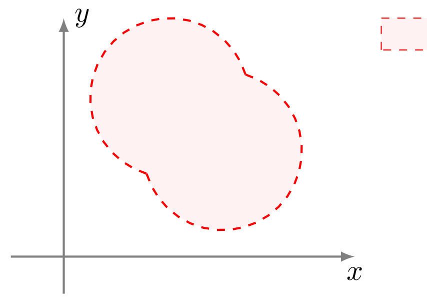
....

Propriété
Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

(a) En dimension 1 :

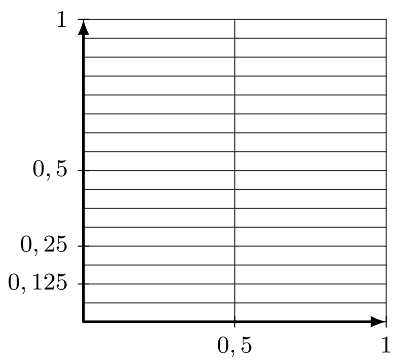
- $]-5,4[\cup]7,+\infty[$ ....
- $]-\infty,4[\cup]7,+\infty[$ ....
- $]5,8[\cup]10,20[$ ....
- $]5,8[\cup[10,20]$ ....

(b) En dimension 2 :



V. Approximation polynomiale d'une fonction.

1. Croissance comparée au voisinage de 0.



x	x^2	x^3	x^4	x^5
1				
0, 5				
0, 1				
0				

Remarque
On voit que x^2 tend vers 0 plus rapidement que x, que x^3 plus rapidement que x^2, donc que x, etc.

2. Fonctions négligeables - Notation de Landau

Définition:
Soit $a \in \mathbb{R}$, et soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I au voisinage de a. On dit que f est .... par rapport à g au voisinage de a, s'il existe une fonction ϵ définie sur I telle que :

$$f = g \times \epsilon \text{ sur } I \text{ et que } \lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$$

On écrit .....

Remarque

lorsque g ne s'annule pas sur I sauf peut-être en a, $f = \underset{a}{o}(g) \iff \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots$

Exemple n° 10 : Dire que $f = \underset{a}{o}(1)$ revient à dire que ....

Exemple n° 11 : $e^x = \underset{1}{o}(x-1)$ car ....

Exercice n° 12 : Barre les égalités qui sont fausses.

- $x = \underset{0}{o}(x^2)$
- $x+1 = \underset{0}{o}(x^2)$
- $x^2 = \underset{0}{o}(x)$
- $\ln(x) = \underset{1}{o}(x)$
- $x^3 = \underset{0}{o}(x)$
- $x^3 = \underset{2}{o}(x)$
- $x^4 = \underset{0}{o}(x^2)$
- $x^4 = \underset{0}{o}(x)$
- $x^4 = \underset{0}{o}(x^3)$
- $x^4 = \underset{0}{o}(x^4)$
- $x^4 = \underset{0}{o}(x^5)$
- $(x-2)^3 = \underset{2}{o}(x-2)$
- $(x-5)^2 = \underset{5}{o}(x-5)$
- $(x-5)^2 = \underset{5}{o}\big((x-5)^3\big)$
- $(5-x)^4 = \underset{5}{o}\big((x-5)^2\big)$

Remarque

On vient de voir que $x^2 = \underset{0}{o}(x)$ et $x^3 = \underset{0}{o}(x)$, or $x^2 \neq x^3$. Le signe égal de ces dernières écritures ne représente pas une égalité. En fait, c'est un raccourci. $\underset{0}{o}(x^2)$ est l'ensemble des fonctions négligeables devant x^2 en 0. Donc, lorsqu'on écrit $x^2 = \underset{0}{o}(x)$ on devrait lire : $x^2 \in \underset{x \to 0}{o}(x)$.

Propriété

- Si $f_1 = \underset{a}{o}(g)$ et $f_2 = \underset{a}{o}(g)$, alors quels que soient les réels λ et μ non nuls, ...
- si $f = \underset{a}{o}(g)$ et $g = \underset{a}{o}(h)$ alors ....
- si $f = \underset{a}{o}(g)$ et u est définie sur un voisinage de a, alors ....

Ainsi, comme $x^3 = \underset{0}{o}(x^2)$ et $x^4 = \underset{0}{o}(x^2)$, $4x^4 - 7x^3 =$ ....

3. Développement limité

Un développement limité (noté DL) d'une fonction en un point est une .... de cette fonction au voisinage de ce point, c'est-à-dire l'écriture de cette fonction sous la forme de la somme :

- d'une fonction polynomiale ;
- d'un .... négligeable au voisinage du point considéré.

En physique, il est fréquent de confondre la fonction avec son développement limité, à condition que l'erreur (le reste) ainsi faite soit inférieure à celle autorisée. Si l'on se contente d'un développement d'ordre un, on parle d'approximation .... ou d'approximation ....

Définition:

Une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite de classe :

- $\mathcal{C}^1$ si f est .... sur I, et si sa dérivée f' est .... sur I.
- $\mathcal{C}^n$, où $n \geqslant 1$ est un entier, si toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre n existent sur I, et si sa énième dérivée $f^{(n)}$ est .... sur I.
- $\mathcal{C}^\infty$, si f est $\mathcal{C}^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Autrement dit, f est .... dérivable sur I.

Théorème Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$ on a :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{a}{o}\big[(x-a)^n\big].$$

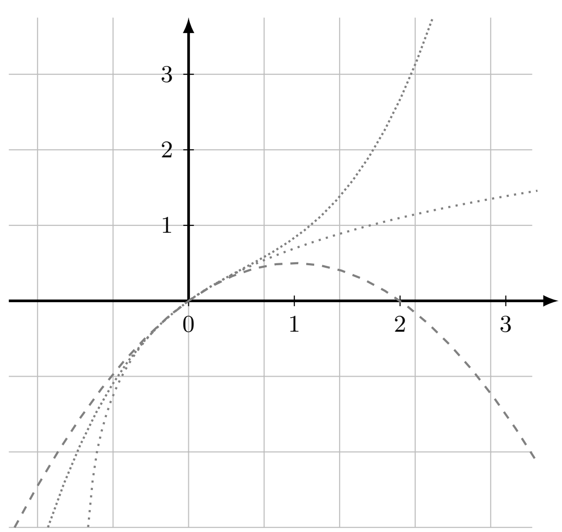
On rappelle que $0! = \ldots$, $1! = \ldots$, $2! =$ ...., $3! =$ ...., et $4! =$ ....

Exemple n° 12 : En utilisant la formule de Taylor-Young le développement limité de f à l'ordre 3 en 0 est :

$f(x) =$ ....

Exemple n° 13 : Considérons la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$. Elle est infiniment dérivable, donc de classe $\mathcal{C}^n$. On va calculer son développement limité à tous les ordres inférieurs ou égale à 3 au point $a = 0$:

- $f(0) = \ldots$ donc $f(x) =$ ....
- $f'(x) =$ .... donc $f'(0) = \ldots$ et $f(x) =$ ....
- $f''(x) =$ .... donc $f''(0) = \ldots$ et $f(x) =$ ....
- $f'''(x) =$ .... donc $f'''(0) = \ldots$ et $f(x) =$ ....



Exercice n° 13 :

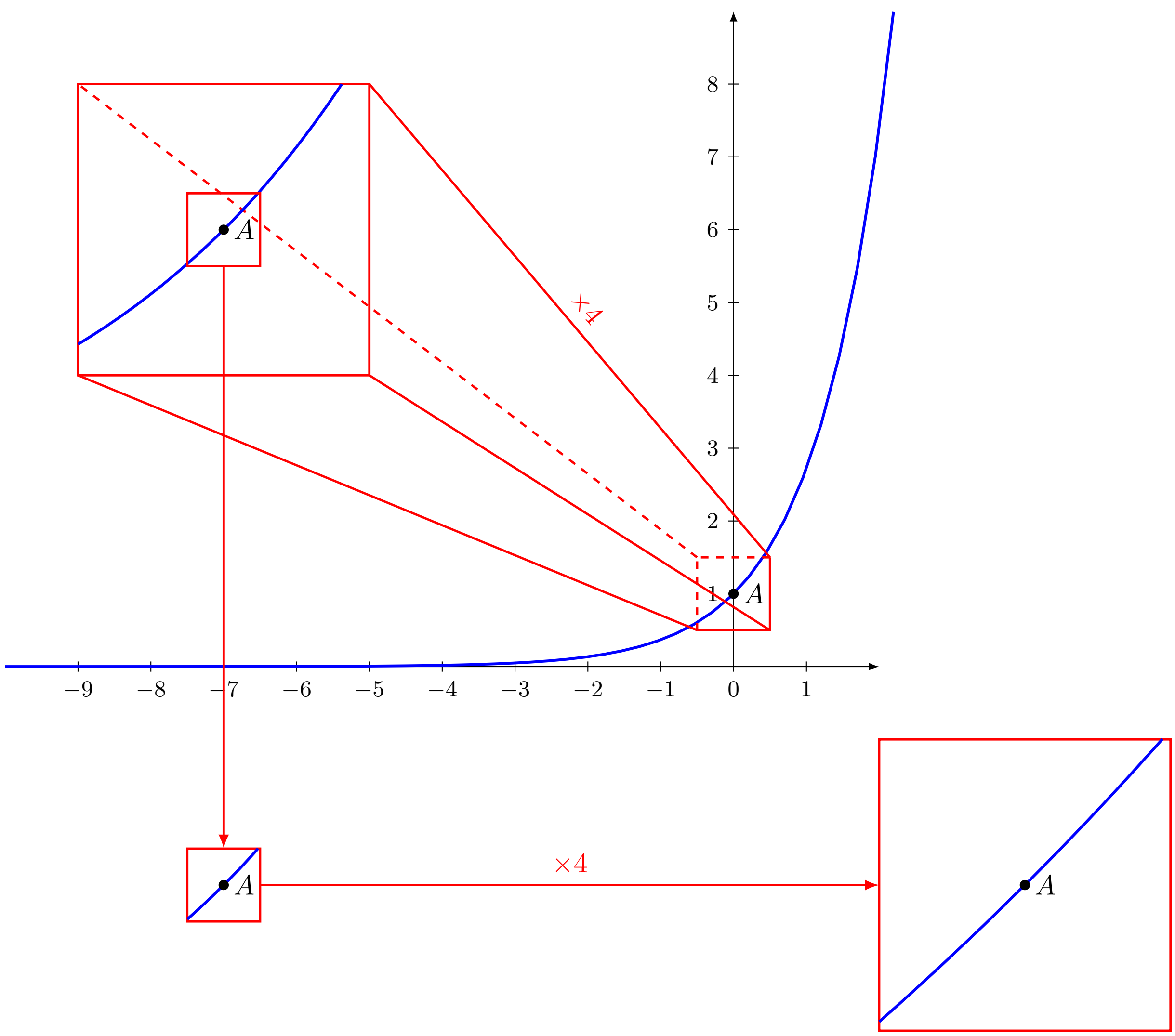
1. Détermine le développement limité de la fonction sin en 0 à l'ordre 3.
2. Déduis-en la limite lorsque x tend vers 0 de $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.
3. On prolonge f en posant $f(0) = 1$. La fonction f atteint-elle un maximum local en 0 ?

VI. Différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

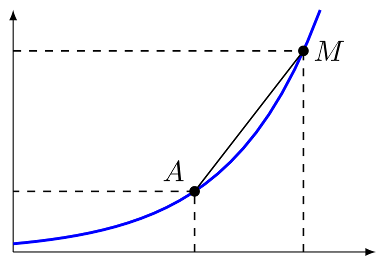
1. De la dérivée à la différentielle.

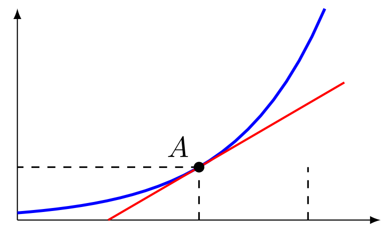
La notion de différentielle nait de l'idée que dans l'infiniment petit, toute fonction devient ....

Illustration :



On observe que plus on se rapproche du point A, moins la courbe est incurvée, autrement plus elle est rectiligne. La droite qui prolonge le petit segment tracé est la .... à la courbe au point A. Le coefficient directeur (la pente) de cette tangente est le nombre .... de f en a :





$f'(a) = \lim_{x \to a} \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $f'(a) = \lim_{h \to 0} \ldots\ldots\ldots\ldots$

Au voisinage de a, la .... d'ordonnées est à peu près .... à la .... d'abscisses, le coefficient de proportionnalité étant le nombre dérivé ... :

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\simeq} (x - a) \times \ldots\ldots$$

Définition:

Etant donnée une application dérivable de en $a \in \mathbb{R}$, la .... de f en a, notée ..., est l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f(a): & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & h & \longmapsto & f'(a) \times h \end{array}$$

Elle est aussi notée ......

En posant $\epsilon(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$ on a $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$.

En multipliant par $(x - a)$, on obtient : $\epsilon(x)(x - a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$,

Soit $f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\epsilon(x) = f(x)$.

En constatant que $(x - a)\epsilon(x) = \underset{0}{\circ}(x - a)$, on retrouve le développement limité à l'ordre 1 de f en a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \underset{0}{\circ}(x - a)$$

Il reste à poser $h = x - a$ pour retrouver la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 :

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \underset{0}{\circ}(h)$$

Propriété

$\mathrm{d}f_a$ est une .... de f en a :

$$f(a+h)-f(a) = \;........\; + \underset{0}{\circ}(h)$$

On a l'approximation .... suivante :

$$f(a+h) = \;.................\; + \underset{0}{\circ}(h)$$

2. Interprétation en termes de vitesses.

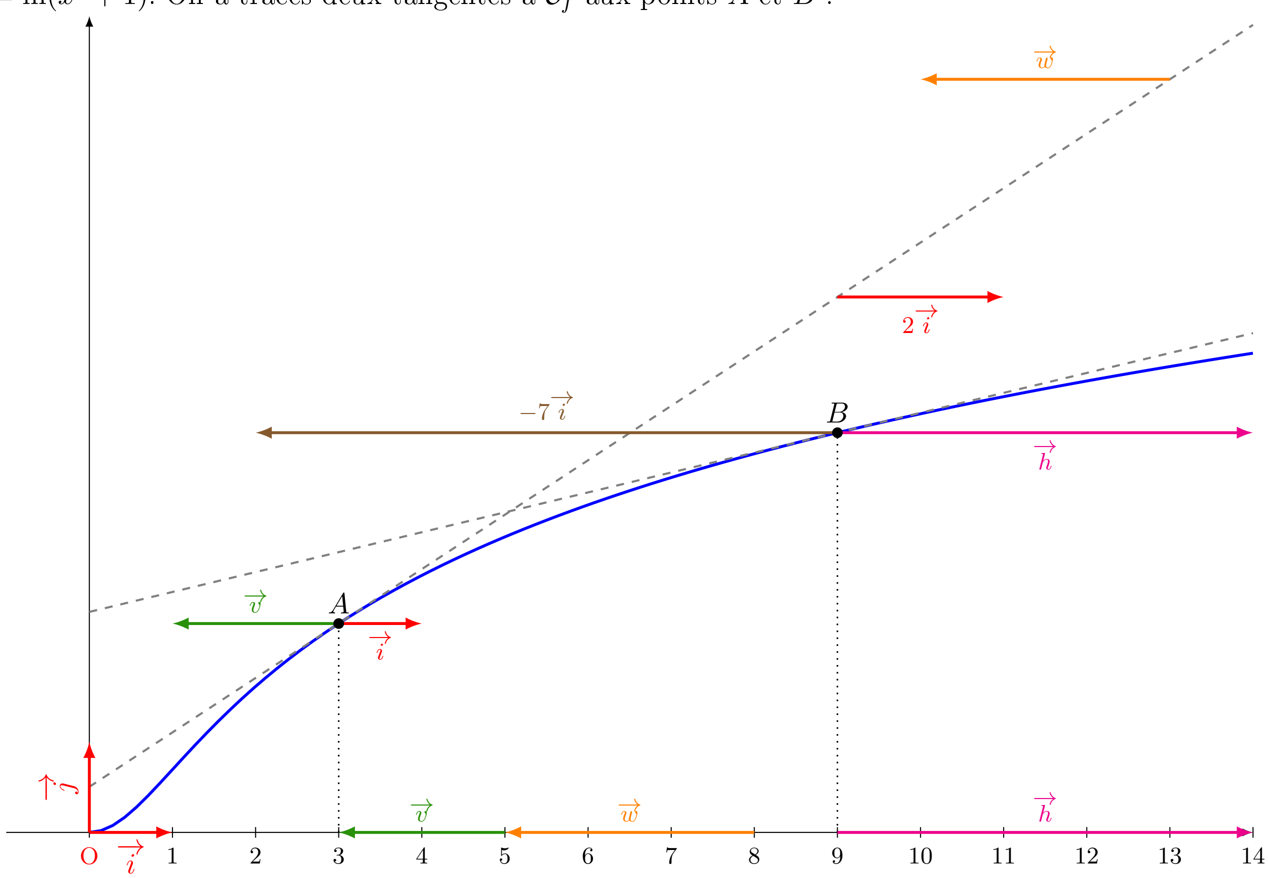
L'axe des abscisses est un sous-espace vectoriel de dimension .... On peut donc confondre chaque vecteur de cet axe avec son abscisse. Ainsi, lorsqu'on écrit $h\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur appartenant à l'axe des abscisses, on écrit en faite $h \times [\overrightarrow{u}]$ où $[\overrightarrow{u}]$ est la coordonnée de $\overrightarrow{u}$ (son ....).

Dérivée directionnelle

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur appartenant à l'axe des abscisses, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en a. On appelle .... de f en a suivant le vecteur $\overrightarrow{u}$, notée ....., la limite suivante :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\overrightarrow{u})-f(a)}{h}$$

Exemple n° 14 : On munit le plan $\mathbb{R}^2$ du repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+1)$. On a tracés deux tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points A et B :



Intuitivement, la dérivée directionnelle $D_{\overrightarrow{u}}f(a)$ est la vitesse verticale instantanée au point A d'un point parcourant la courbe représentative de f avec une vitesse horizontale $\overrightarrow{u}$. Ainsi, si au point A sa vitesse horizontale est de -3 (vecteur $\overrightarrow{w}$), alors, sa vitesse verticale en ce point est $-3f'(3)$.

Propriété

Etant donné une vecteur $\overrightarrow{u}$ appartenant à l'axe des abscisses, a un nombre réel et f une fonction dérivable en a.

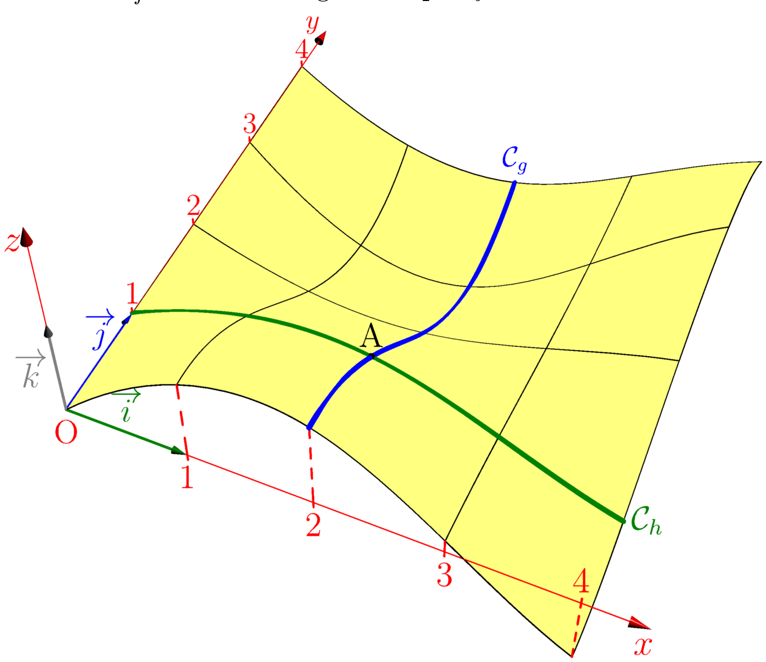
$$D_{\overrightarrow{u}}f(a) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

VII. Différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Si toute courbe suffisamment lisse pour être dérivable ressemble localement à une droite, alors on va voir que toute surface assez lisse ressemble localement à un plan. Pour ce faire, dans l'espace muni d'un repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on va étudier la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} [0,4]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sin(x)\cos(y) \end{array}$$

On rappelle que $(x,y) \in [0,4]^2$ signifie $x \in [0,4]$ **et** $y \in [0,4]$.
On note $\mathcal{S}_f$ la surface engendrée par f.



On pose $a = (2,1)$ un point du plan $\left(\text{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

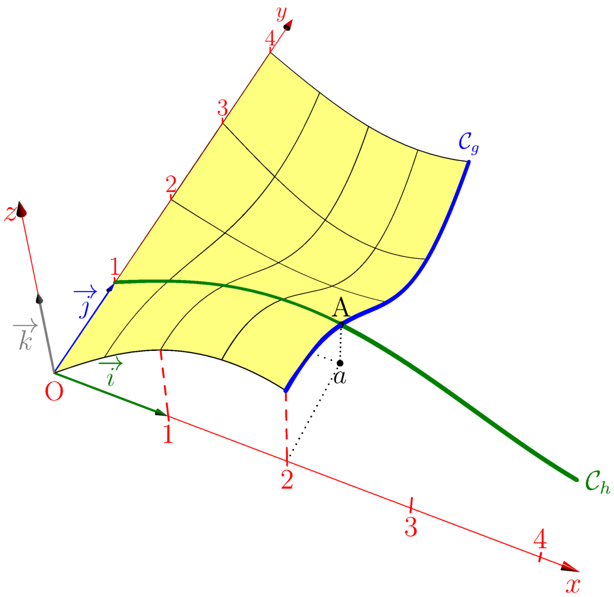
$f(a) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ à 0,1 près.

Le point A a pour coordonnées :

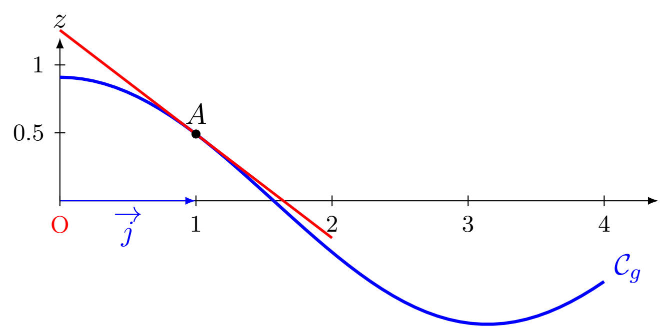
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \ldots \end{pmatrix} \text{ à 0,1 près,}$$

car $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Etude de la courbe bleue :



$$g\colon\ [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\ldots \ \longmapsto \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

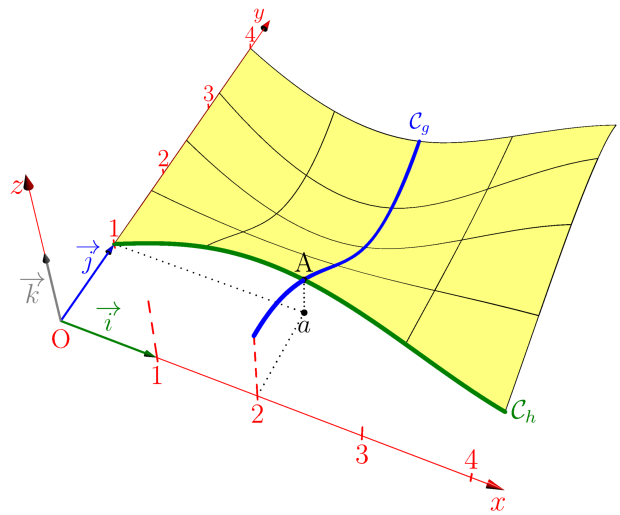


$g'(y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

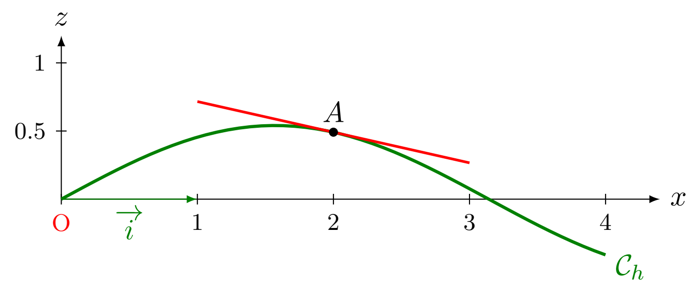
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(a + h\vec{j}\right) - f(a)}{h} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$D_{\vec{j}}f(a)$ est la dérivée directionnelle de f en $a = (2,1)$ suivant le vecteur $\vec{j}$, on l'appelle la $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ de f par rapport à y, et on la note $\ldots\ldots\ldots$

Etude de la courbe verte :



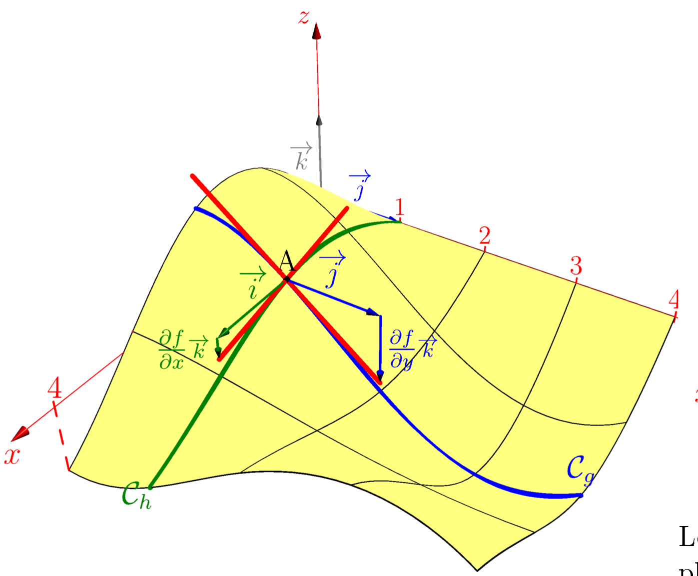
$$h\colon\ [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\ldots \ \longmapsto \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

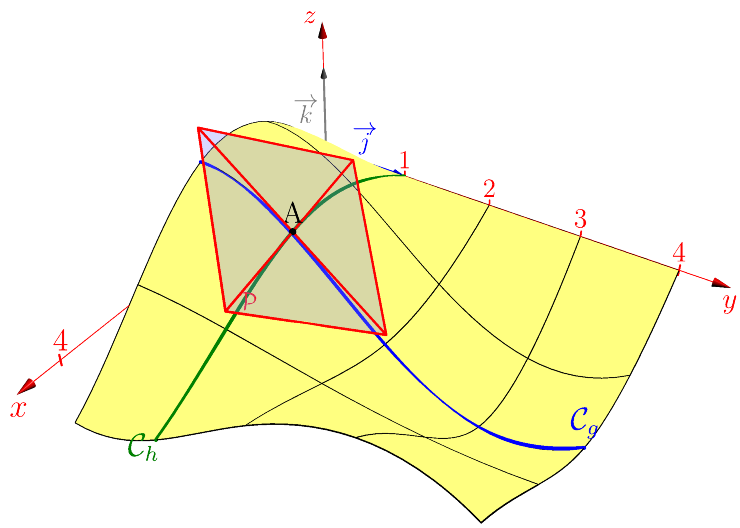


$h'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(a + h\vec{i}\right) - f(a)}{h} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$D_{\vec{i}}f(a)$ est la dérivée directionnelle de f en $a = (2,1)$ suivant le vecteur $\vec{i}$, on l'appelle la $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ de f par rapport à x, et on la note $\ldots\ldots\ldots$





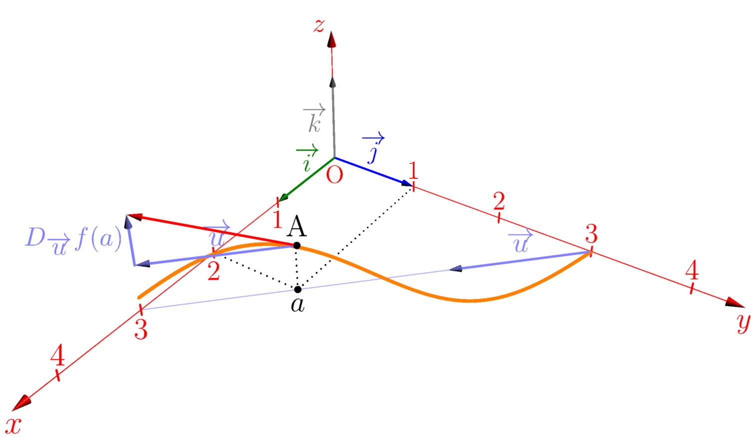
Les deux tangentes se coupant en A forment un plan $\mathcal{P}$.

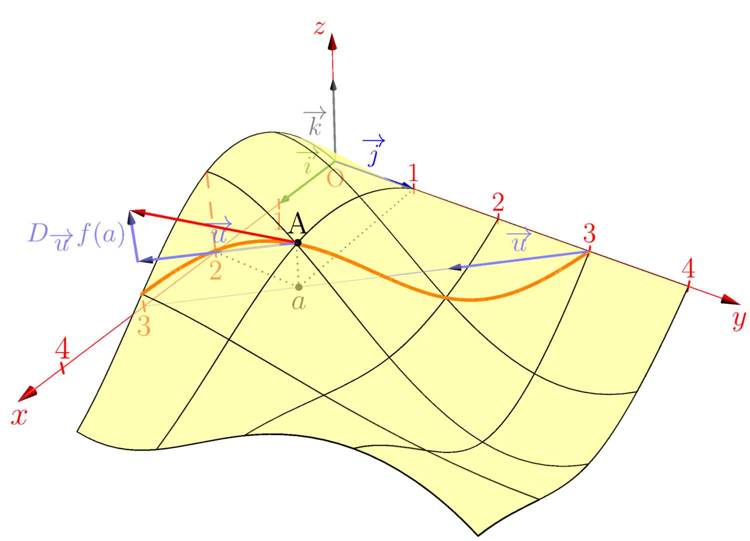
Dérivée directionnelle

Soient $\overrightarrow{u}$ et a un vecteur et un point appartenant au plan $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Soit f une fonction définie sur un voisinage de a à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si la limite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h\overrightarrow{u}) - f(a)}{h}$ existe et est finie, alors on dit que la fonction f est dérivable dans la direction $\overrightarrow{u}$, et sa limite est appelée la .... de f en a suivant le vecteur $\overrightarrow{u}$, et notée ......

$\overrightarrow{u} \notin \mathbb{R}^3$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas un vecteur de l'espace. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ appartient au plan vectoriel $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ car $f : D \subset \left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$.

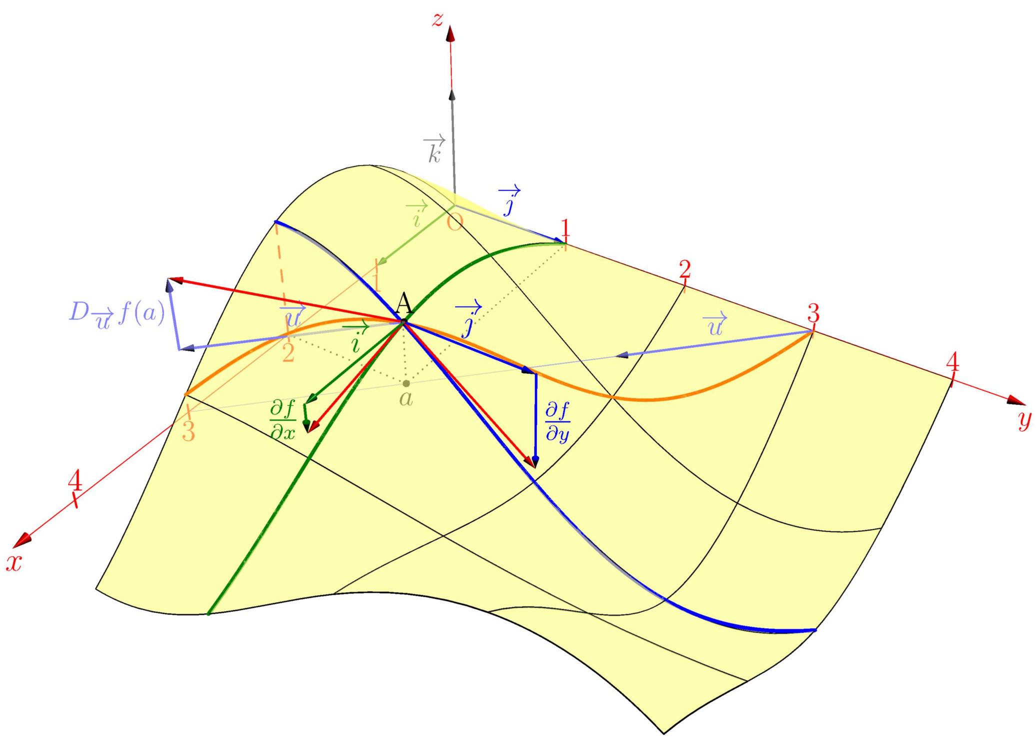




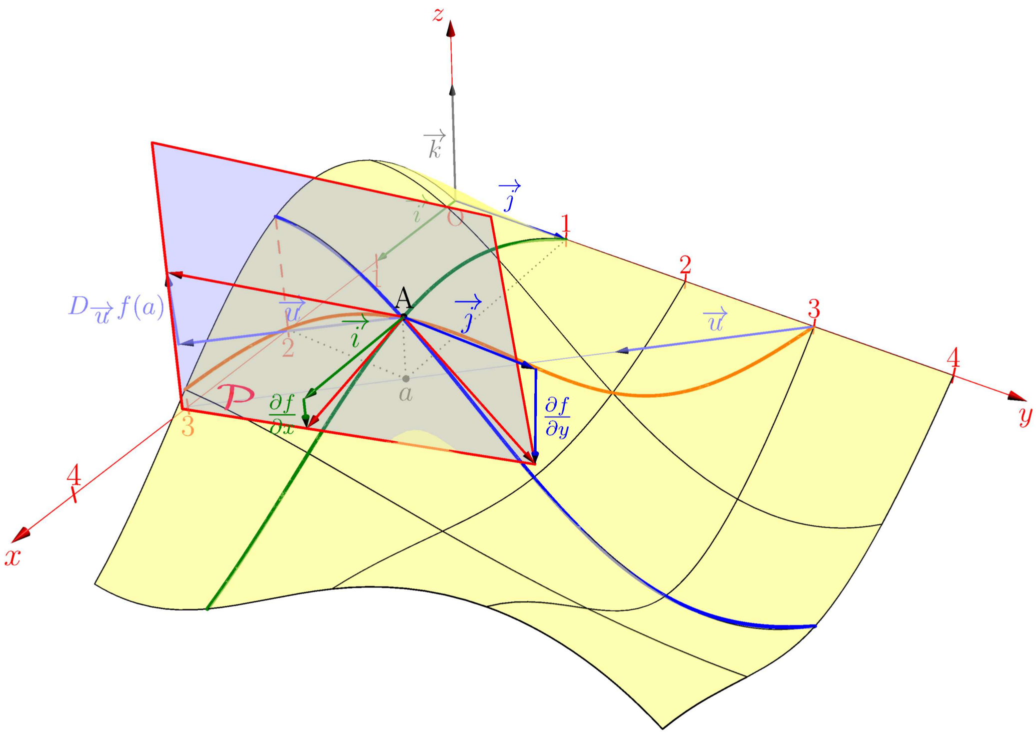
Interprétation : la dérivée directionnelle $D_{\overrightarrow{u}} f(a)$ est la vitesse instantanée sur l'axe Oz au point A d'un point parcourant la surface $\mathcal{S}_f$ avec une vitesse $\overrightarrow{u}$ dans le plan Oxy.

Remarque

Dans un repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \ldots\ldots\ldots\ldots$



Si f est différentiable en a, alors, pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, le vecteur **tangent** $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ est dans le **plan tangent $\mathcal{P}$**. Mais, cette propriété n'est pas suffisante pour prouver que la fonction f est **différentiable** en a.



Définition:

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est .... en a si, et seulement si, il existe une application linéaire, notée ..... telle que pour tout $\overrightarrow{u} \in \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ on a : $f\left(a + \overrightarrow{u}\right) =$ ....

En posant $a =$ .... et $\overrightarrow{u} =$ .... l'égalité précédente s'écrit :

$$f(x+\alpha, y+\beta) = \text{..................................}$$

Pour démontrer qu'une fonction est différentiable, on utilise la condition suffisante suivante :

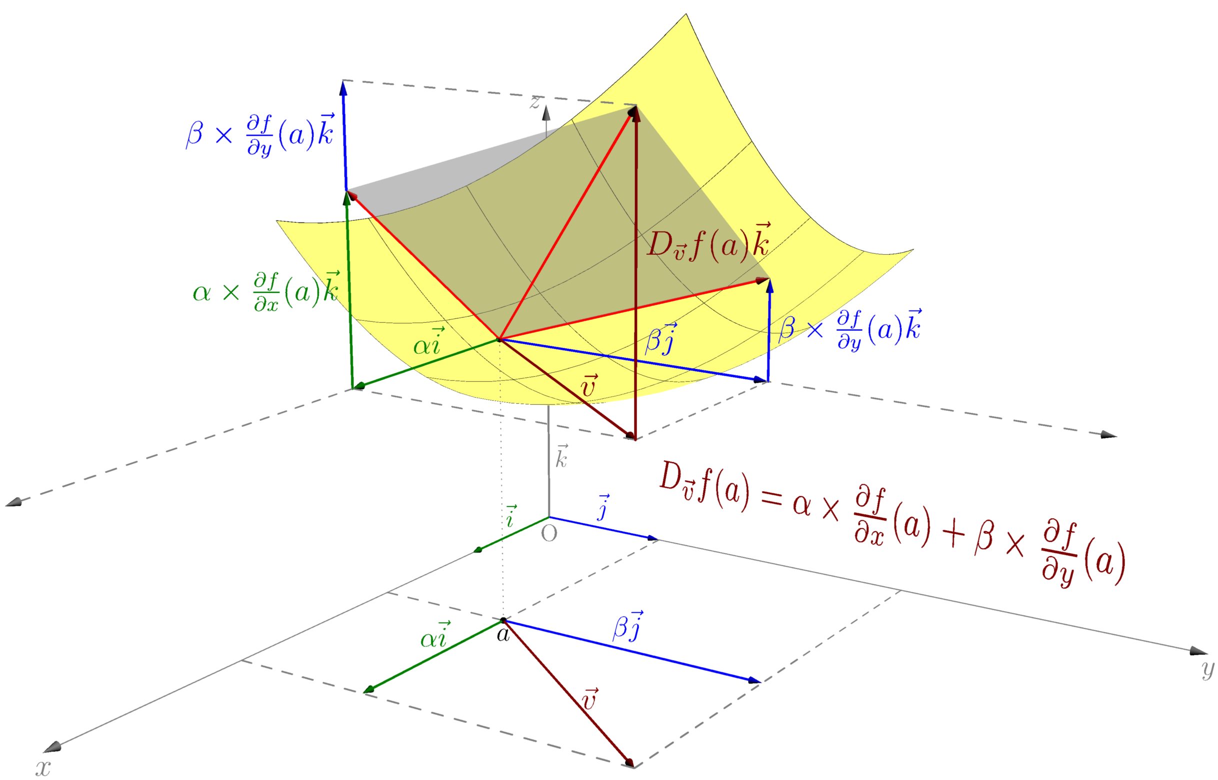
Théorème

Si les dérivées partielles de f, par rapport à x et à y, existent et sont continues en a, alors f est .... en a.

Propriété

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, étant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, différentiable en a, et un vecteur $\overrightarrow{u} \in \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, en notant (x, y) les coordonnées du point a dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ on a :

- $\mathrm{d}f(a).(\alpha, \beta) =$ ....
- $D_{\vec{u}}f(a) =$ ....
- $f(x+\alpha, y+\beta) =$ ....



Exemple n° 15 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\sin(x)\cos(y)$ et $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}=$ ....
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}=$ ....
- $\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}=$ ....
- $D_{\overrightarrow{u}}f(x,y)=$ ....

Exercice n° 14 : Détermine la différentielle des fonctions suivantes :

- $f(x,y)=5x^2-xy^3-1$
- $g(x,y)=y\ln(x+y)$
- $h(x,y)=\ln^2\left(x^4y^2\right)$

Exemple n° 16 : Détermine la différentielle de :

la fonction $f\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x\end{array}$

$\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}=$ ....

Cette différentielle est notée ..... , $\mathrm{d}x\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\ldots$

la fonction $g\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & y\end{array}$

$\mathrm{d}g(x,y).\binom{h}{k}=$ ....

Cette différentielle est notée ..... , $\mathrm{d}y\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\ldots$

Propriété

Etant donné une fonction f définie sur un voisinage de $a\in\mathbb{R}^2$, différentiable en a, on a :

$$\mathrm{d}f(a)=\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple n° 17 : Si $U=x^2\mathrm{e}^{y/x}$ alors $\mathrm{d}U=$ ....

1. Plans tangents.

Exercice n° 15 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+y^2$. On note $\mathcal{S}_f$ la surface associée à f, et A un point de $\mathcal{S}_f$ d'abscisse 2 et d'ordonnée 1.

1. Détermine la cote de A.
2. Détermine une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en A.

Exercice n° 16 : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y)=xy-x^3+y$. On note $\mathcal{S}_g$ la surface associée à g, et A un point de $\mathcal{S}_g$ d'abscisse -1 et d'ordonnée 2.

1. Détermine la cote de A.
2. Détermine une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{S}_g$ en A.
3. Détermine une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{S}_g$ en $B(-3,2,23)$.

2. Approximation linéaire

Exercice n° 17 : On mesure la longueur, la largeur, et la hauteur d'une salle et on obtient les valeurs suivantes : Longueur $L = 10,2 \pm 0,1\text{m}$; Largeur $\ell = 7,70 \pm 0,08\text{m}$; Hauteur $h = 3,17 \pm 0,04\text{m}$.

Calcule les dimensions suivantes en précisant leurs incertitudes absolues et relatives :

1. P : le périmètre de la salle ;
2. S : la superficie de la salle ;
3. V : le volume de la salle.

Exercice n° 18 : Soit $f(x, y) = x^2y - 3y$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calcule $f(5, 7)$.
2. Détermine la différentielle de f en $(5, 7)$.
3. Détermine $f(5.12, 6.85)$, autrement que par un calcul direct.
4. Compare à la valeur trouvée par un calcul direct.

VIII. Le gradient

Définition:

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles. Le .... de f en $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, noté $\text{grad}f(x)$, est le vecteur :

$$\text{grad}f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Les physiciens et les anglo-saxons notent souvent .... pour $\text{grad}f(x)$. Le symbole ... se lit « nabla ».

Si les dérivées partielles sont en plus continues, alors la fonction f est différentiable et on sait que :

$$\text{d}f(x) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}h_n = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Propriété

.... est la matrice de la forme linéaire $\mathrm{d}f(x)$.

Propriété

Etant donnée un fonction différentiable en x et $\overrightarrow{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, la dérivée .... de f suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$ est $\mathrm{d}f(x)\cdot\overrightarrow{h}$ = ... (produit scalaire).

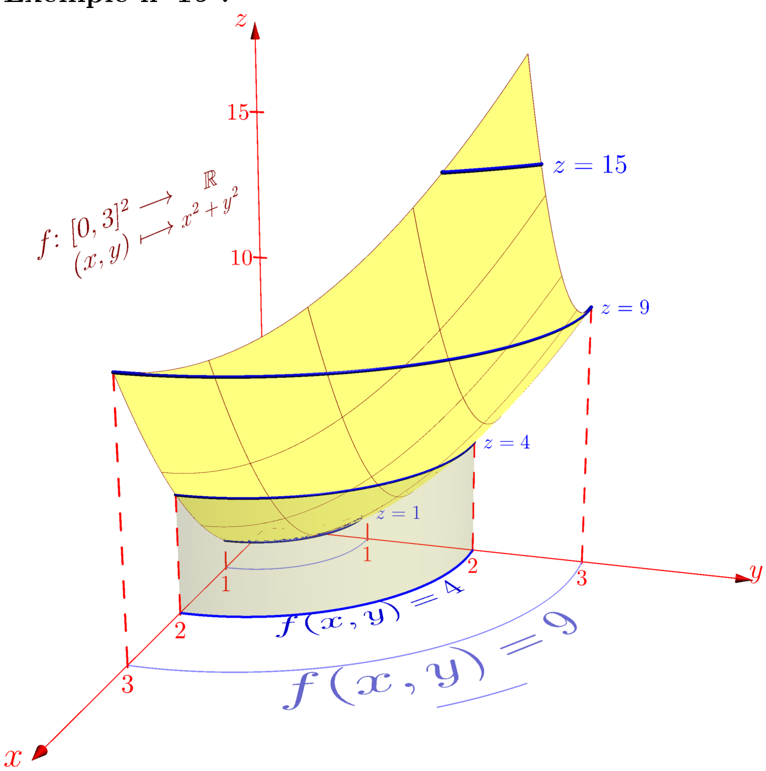
Exemple n° 18 :

- Si $f(x,y)=x^3y^2$ alors $\overrightarrow{\nabla}f(x,y)=$ ....
- Si $g(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-y}$ alors $\overrightarrow{\nabla}g(x,y)=$ ....
- Si $h(x,y,z)=x^2\cos(yz)$ alors $\overrightarrow{\nabla}h(x,y,z)=$ ....
- Si $k(x,y,z)=x^2\sin(y^3z^2)$ alors $\overrightarrow{\nabla}k(x,y,z)=$ ....

1. Tangentes aux lignes de niveau.

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable. On considère les lignes de niveau $f(x,y)=k$.

Exemple n° 19 :



Sur la figure ci-contre, on considère la surface définie par la fonction :

$$f\colon\ [0,3]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x^2+y^2$$

Dans le plan $(\mathrm{O}xy)$ on a dessiner les lignes de niveau de

- $f(x,y)=1$
- $f(x,y)=4$
- $f(x,y)=9$
- $f(x,y)=15$

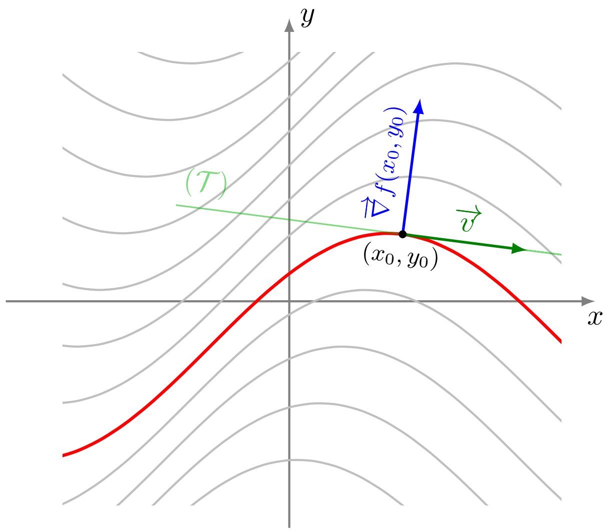
La ligne de niveau de $f(x,y)=9$ correspond aux points dont les coordonnées (x,y) sont solutions de l'équation :

$$x^2+y^2=9$$

Propriété

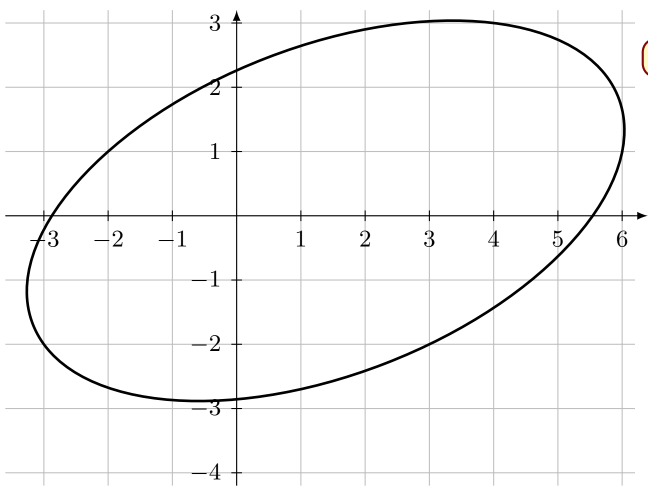
Le vecteur gradient $\mathrm{grad}f(x_0,y_0)$ est orthogonal à la ligne de niveau de f passant au point (x_0,y_0).

Exemple n° 20 : Sur le dessin suivant, la ligne de niveau passant par le point (x_0, y_0) est tracée en rouge. Un vecteur tangent $\overrightarrow{v}$ en ce point et la tangente $(\mathcal{T})$ à la ligne de niveau (en vert). Le vecteur gradient est un vecteur du plan qui est orthogonal à la ligne de niveau en ce point (en bleu).



À chaque point du plan, on peut associer un vecteur gradient. Ce vecteur gradient est orthogonal à la ligne de niveau passant par ce point. Nous verrons juste après comment savoir s'il est orienté « vers le haut » ou « vers le bas ».

Exemple n° 21 : On considère l'ellipse d'équation cartésienne $f(x, y) = 15x^2 - 20xy + 37y^2 - 40x + 22y = 239$.



1 Les deux points d'ordonnées -2 sont

$$A \begin{pmatrix} \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } B \begin{pmatrix} \\ -2 \end{pmatrix}$$

car $f(x, -2) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

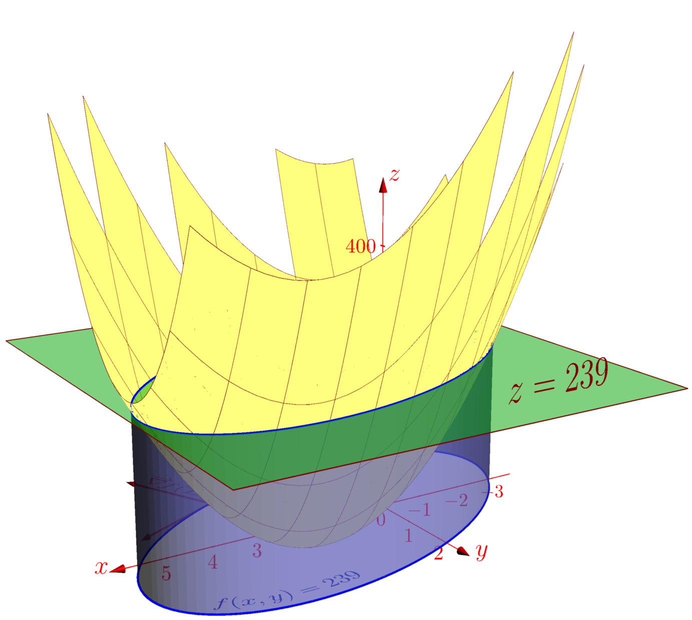
$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

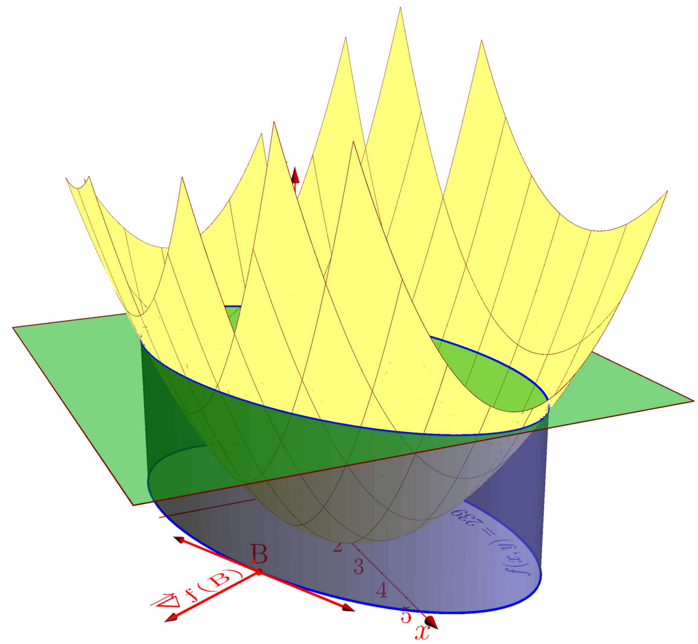
Donc, $f(x, -2) = 239 \iff \dots\dots\dots\dots\dots$

$\iff \dots\dots\dots\dots\dots$

2 $\overrightarrow{\nabla} f(x, y) = \Bigg|$ donc $\overrightarrow{\nabla} f(B) = \begin{pmatrix} \\ -186 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{90} \overrightarrow{\nabla} f(B) \simeq \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

3 Un vecteur $\overrightarrow{t}$ tangent en B a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$



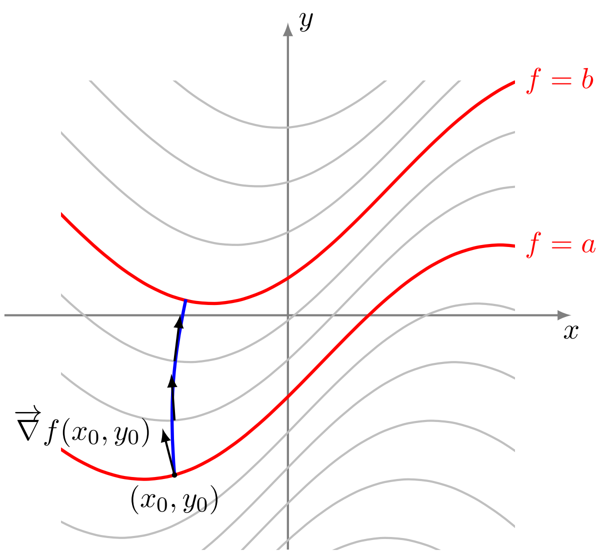


2. Lignes de plus forte pente

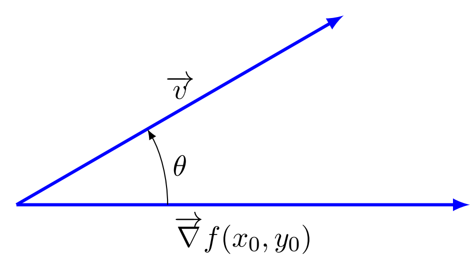
Considérons les lignes de niveau $f(x, y) = k$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On se place en un point (x_0, y_0). On cherche dans quelle direction se déplacer pour augmenter au plus vite la valeur de f.

Propriété
Le vecteur gradient $\text{grad}f(x_0, y_0)$ indique la direction de plus grande pente à partir du point (x_0, y_0).

Autrement dit, si l'on veut, à partir d'un point donné (x_0, y_0) de niveau a, passer au niveau $b > a$ le plus vite possible, alors il faut démarrer en suivant la direction du gradient $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$.



Considérons un vecteur $\overrightarrow{v}$ de norme 1 faisant un angle θ avec le vecteur gradient en (x_0, y_0)



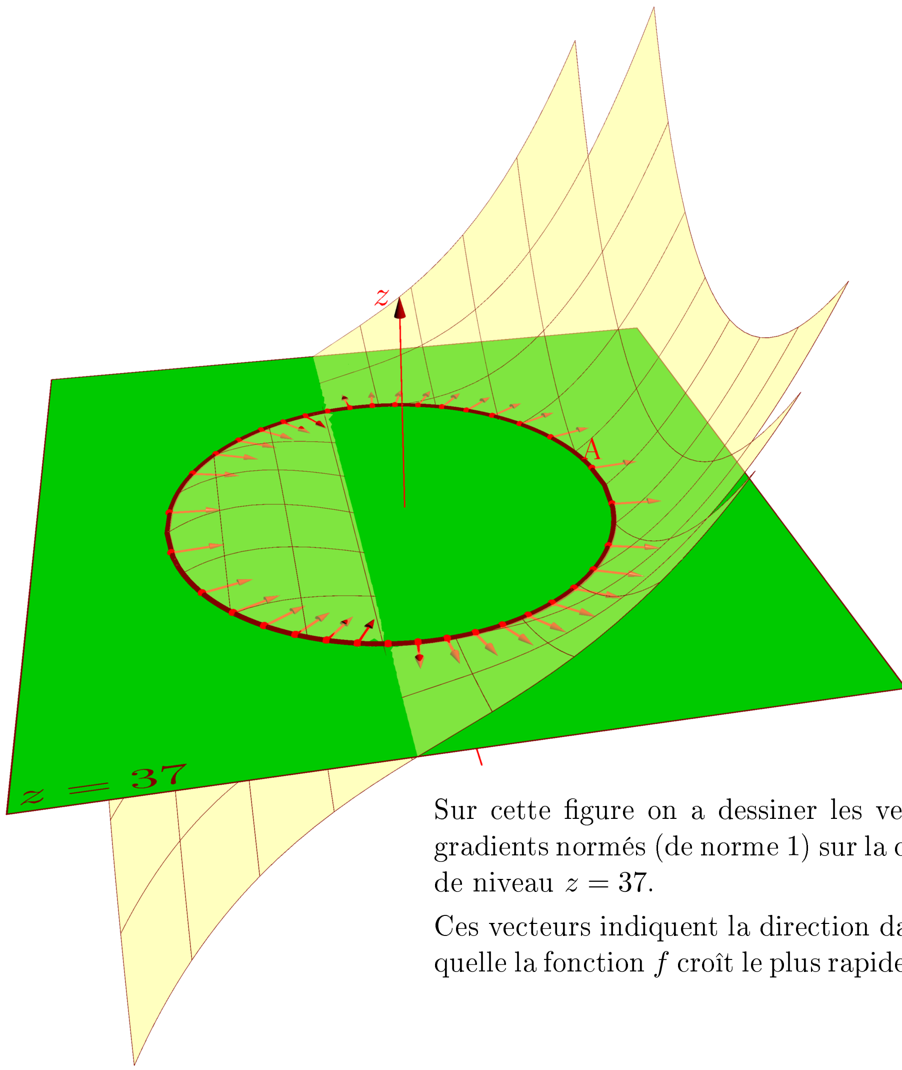
$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{v}} f(x_0, y_0) &= \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)\right\| \times \|v\| \times \cos(\theta) \\ &= \left\|\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)\right\| \cos(\theta) \end{aligned}$$

Donc, la pente $D_{\overrightarrow{v}} f(x_0, y_0)$ est maximale quand $\theta = 0$, donc dans la direction du vecteur gradient.

Exercice n° 19 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$.

1. Quelle est la cote du point A d'abscisse 4 et d'ordonnée 1

2. Détermine la différentielle de f.
3. Détermine la différentielle de f en $(4,1)$.
4. Détermine un vecteur de norme 1 qui indique la pente maximale en $(4,1)$.
5. A quelle courbe ce vecteur est-il orthogonal ?



Sur cette figure on a dessiner les vecteurs gradients normés (de norme 1) sur la courbe de niveau $z = 37$.

Ces vecteurs indiquent la direction dans laquelle la fonction f croît le plus rapidement.

IX. Différentielle d'ordre 2.

1. Formule de Taylor.

Théorème

Si f est une fonction définie sur un voisinage de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dont les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y existent et sont ...., alors :

- f est différentiable en (x,y) et sa différentielle est : $\mathrm{d}f(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$

C'est une forme linéaire : $\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k} = \dfrac{\partial f}{\partial x}h + \dfrac{\partial f}{\partial y}k$

- $\mathrm{d}f$ est différentiable en (x,y) et la différentielle de $\mathrm{d}f$ en (x,y) est sa différentielle d'ordre deux :

$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y$$

C'est une forme bilinéaire : $\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{a}{b},\binom{c}{d}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}ac + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(ad+bc) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}bd$

Et, $\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2$

- **La formule de Taylor à l'ordre 2 :**

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \underbrace{h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}}_{\mathrm{d}f(x,y).\binom{h}{k}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)}_{\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right)} + \circ\left(\left\|\binom{h}{k}\right\|^2\right)$$

Remarque : $\left\|\binom{h}{k}\right\|^2 = h^2 + k^2$

Exemple n° 22 : Ecris la formule de Taylor à l'ordre 2 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$.

On a vu que : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 6x - 36$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y$.

Il reste $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =$ ..... , $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} =$ .... , et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$ ....

$f(x+h,y+k) = f(x,y) +$ ....

$+$ ....

2. Application à la recherche d'extremums.

On se limite à la recherche d'extremums d'une fonction f sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Nous étudierons en particulier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 + y^2 - 36x$.

Définition:

Un point qui annule le gradient (différentielle nulle) de f s'appelle un point .... de f.

Théorème

Les extrema locaux d'une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sont à chercher parmi ses points critiques.

Exemple n° 23 : Recherchons les points critiques de f :

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 + y^2 + 6x - 36 \\ 2xy + 2y \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff \left\{ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left\{ \right.\right.$$

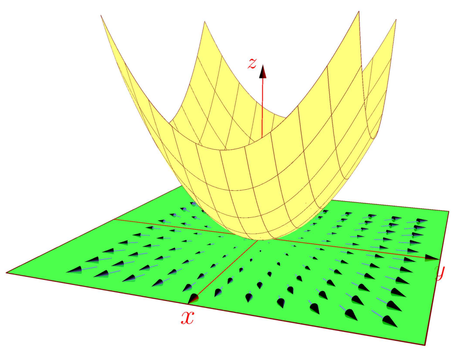
$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Deux cas se présentent :

- **Cas n° 1 :** ....
- **Cas n° 2 :** ....

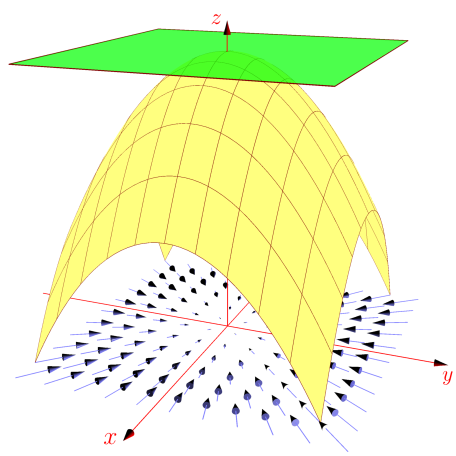
On trouve 4 points critiques : $A\begin{pmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -1 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix} -1 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

> Un point critique n'est pas nécessairement un extremum.



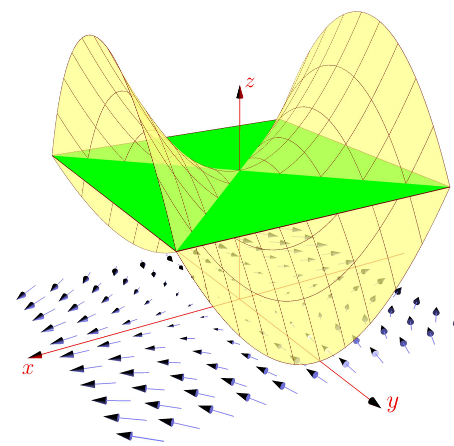
Minimum

On voit que le minimum repousse les vecteurs gradients.



Maximum

On voit que les vecteurs gradients pointent bien vers le maximum.



Point selle

Un minimum suivant l'axe $(\mathrm{O}x)$ et un maximum suivant l'axe $(\mathrm{O}y)$.

Pour savoir si l'un des quatre points un extremum ou pas, on va étudier pour chacun d'eux sa différentielle d'ordre 2 :

$$\mathrm{d}^2 f(x,y).\left(\binom{h}{k},\binom{h}{k}\right) = (12x+6)h^2 + 4yhk + (2x+2)k^2$$

- **Etude du point *A* :** $\mathrm{d}^2 f(-3,0) =$ .... donc le développement de Taylor s'écrit :

  $f(-3+h,0+k) =$ ....

  $f(-3+h,0+k) - f(-3,0)$ ....

- **Etude du point *B* :** $\mathrm{d}^2 f(2,0) =$ .... donc le développement de Taylor s'écrit :

  $f(2+h,0+k) =$ ....

  $f(2+h,0+k) - f(2,0)$ ....

- **Etude du point C :** $\mathrm{d}^2 f(-1,-6) =$ .... donc le développement de Taylor s'écrit :

  $f(-1+h,-6+k) =$ ....

  Comme ....

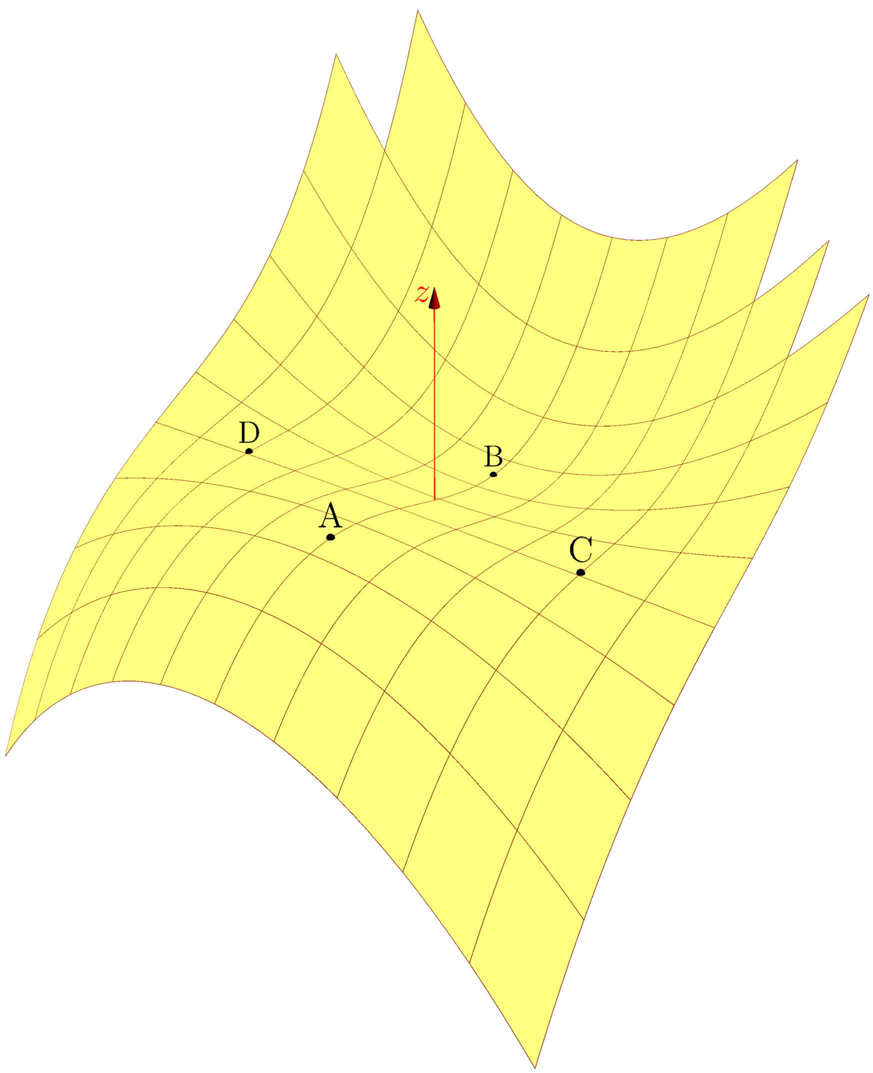
  $f(-1+h,-6+k) - f(-1,-6) =$ ....

- **Etude du point D :** $\mathrm{d}^2 f(-1,6) =$ .... donc le développement de Taylor s'écrit :

  $f(-1+h,6+k) =$ ....

  Comme ....

  $f(-1+h,6+k) - f(-1,6) =$ ....



X. Différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$