III. Applications linéaires.

Définition:

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et f une application de E dans F. Une application f est **linéaire** si et seulement si

- $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})}$

Définition:

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et f une application de E dans F. Une application f est **linéaire** si et seulement si

- $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})}$
- $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall\overrightarrow{u} \in E,\ f(\lambda \cdot \overrightarrow{u}) = \boldsymbol{\lambda \cdot f(\overrightarrow{u})}$

Définition:

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et f une application de E dans F. Une application f est **linéaire** si et seulement si

- $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})}$
- $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall\overrightarrow{u} \in E,\ f(\lambda \cdot \overrightarrow{u}) = \boldsymbol{\lambda \cdot f(\overrightarrow{u})}$

On note $\boldsymbol{L(E,F)}$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Définition:

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et f une application de E dans F. Une application f est **linéaire** si et seulement si

- $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})}$
- $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall\overrightarrow{u} \in E,\ f(\lambda \cdot \overrightarrow{u}) = \boldsymbol{\lambda \cdot f(\overrightarrow{u})}$

On note $\boldsymbol{L(E,F)}$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Cette application linéaire est appelée :

Définition:

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et f une application de E dans F. Une application f est **linéaire** si et seulement si

- $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \in E^2,\ f(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \boldsymbol{f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})}$
- $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall\overrightarrow{u} \in E,\ f(\lambda\cdot\overrightarrow{u}) = \boldsymbol{\lambda\cdot f(\overrightarrow{u})}$

On note $\boldsymbol{L(E,F)}$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Cette application linéaire est appelée :

- **isomorphisme** de E dans F lorsque f est bijective ;

Définition:

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et f une application de E dans F. Une application f est **linéaire** si et seulement si

- $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})}$
- $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall\overrightarrow{u} \in E,\ f(\lambda \cdot \overrightarrow{u}) = \boldsymbol{\lambda \cdot f(\overrightarrow{u})}$

On note $\boldsymbol{L(E, F)}$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Cette application linéaire est appelée :

- **isomorphisme** de E dans F lorsque f est bijective ;
- **forme linéaire** sur E si F est de dimension 1, autrement dit, si $F =$

Définition:

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et f une application de E dans F. Une application f est **linéaire** si et seulement si

- $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \in E^2,\ f(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \boldsymbol{f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})}$
- $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall\overrightarrow{u} \in E,\ f(\lambda\cdot\overrightarrow{u}) = \boldsymbol{\lambda\cdot f(\overrightarrow{u})}$

On note $\boldsymbol{L(E,F)}$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Cette application linéaire est appelée :

- **isomorphisme** de E dans F lorsque f est bijective ;
- **forme linéaire** sur E si F est de dimension 1, autrement dit, si $F = \mathbb{R}$.

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y \,,\, x + z \,,\, 3x + z) \end{array}$$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y\,,\, x+z\,,\, 3x+z) \end{array}$$

$$f(\overrightarrow{i}) \quad = \quad f(1,0,0) \quad =$$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y\,,\, x + z\,,\, 3x + z) \end{array}$$

$$f(\overrightarrow{i}) \quad = \quad f(1,0,0) \quad = \quad (2,1,3) \quad = \quad 2\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k}$$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y\,,\, x + z\,,\, 3x + z) \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) & = & & & & & \end{array}$$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y\,,\, x + z\,,\, 3x + z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & & & \end{array}$$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y\,,\, x + z\,,\, 3x + z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & (1,0,0) & = & \end{array}$$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y\,,\,x+z\,,\,3x+z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & (1,0,0) & = & 1\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k} \end{array}$$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y\,,\,x+z\,,\,3x+z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccl} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & (1,0,0) & = & 1\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{k}) & = & & & & & \end{array}$$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,,\,\overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y\,,\,x+z\,,\,3x+z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\,\overrightarrow{i}+1\,\overrightarrow{j}+3\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & (1,0,0) & = & 1\,\overrightarrow{i}+0\,\overrightarrow{j}+0\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & & & \end{array}$$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y\,,\, x + z\,,\, 3x + z) \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & (1,0,0) & = & 1\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & (0,1,1) & = & \end{array}$$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y\,,\, x+z\,,\, 3x+z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\,\overrightarrow{i}+1\,\overrightarrow{j}+3\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & (1,0,0) & = & 1\,\overrightarrow{i}+0\,\overrightarrow{j}+0\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & (0,1,1) & = & 0\,\overrightarrow{i}+1\,\overrightarrow{j}+1\,\overrightarrow{k} \end{array}$$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y\,,\,x+z\,,\,3x+z) \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & (1,0,0) & = & 1\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & (0,1,1) & = & 0\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 1\,\overrightarrow{k} \end{array}$$

Considérons la matrice A dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $f\left(\overrightarrow{e_i}\right)$:

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y\,,\, x+z\,,\, 3x+z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & (1,0,0) & = & 1\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & (0,1,1) & = & 0\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 1\,\overrightarrow{k} \end{array}$$

Considérons la matrice A dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $f\left(\overrightarrow{e_i}\right)$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{i}) & f(\overrightarrow{j}) & f(\overrightarrow{k}) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y\,,\,x+z\,,\,3x+z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & (1,0,0) & = & 1\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & (0,1,1) & = & 0\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 1\,\overrightarrow{k} \end{array}$$

Considérons la matrice A dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $f\left(\overrightarrow{e_i}\right)$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{i}) & f(\overrightarrow{j}) & f(\overrightarrow{k}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

on a : $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y\,,\, x+z\,,\, 3x+z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & (1,0,0) & = & 1\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & (0,1,1) & = & 0\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 1\,\overrightarrow{k} \end{array}$$

Considérons la matrice A dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $f\left(\overrightarrow{e_i}\right)$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{i}) & f(\overrightarrow{j}) & f(\overrightarrow{k}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{on a :} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y\,,\,x+z\,,\,3x+z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\,\overrightarrow{i}+1\,\overrightarrow{j}+3\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & (1,0,0) & = & 1\,\overrightarrow{i}+0\,\overrightarrow{j}+0\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & (0,1,1) & = & 0\,\overrightarrow{i}+1\,\overrightarrow{j}+1\,\overrightarrow{k} \end{array}$$

Considérons la matrice A dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $f\left(\overrightarrow{e_i}\right)$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{i}) & f(\overrightarrow{j}) & f(\overrightarrow{k}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

on a : $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ \\ \end{pmatrix}$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y\,,\,x+z\,,\,3x+z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\,\overrightarrow{i}+1\,\overrightarrow{j}+3\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & (1,0,0) & = & 1\,\overrightarrow{i}+0\,\overrightarrow{j}+0\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & (0,1,1) & = & 0\,\overrightarrow{i}+1\,\overrightarrow{j}+1\,\overrightarrow{k} \end{array}$$

Considérons la matrice A dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $f\left(\overrightarrow{e_i}\right)$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{i}) & f(\overrightarrow{j}) & f(\overrightarrow{k}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

on a : $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+z \\ \end{pmatrix}$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y\,,\, x + z\,,\, 3x + z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f(\vec{i}) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\,\vec{i} + 1\,\vec{j} + 3\,\vec{k} \\ f(\vec{j}) & = & f(0,1,0) & = & (1,0,0) & = & 1\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \\ f(\vec{k}) & = & f(0,0,1) & = & (0,1,1) & = & 0\,\vec{i} + 1\,\vec{j} + 1\,\vec{k} \end{array}$$

Considérons la matrice A dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $f\left(\vec{e_i}\right)$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{on a :} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + z \\ 3x + z \end{pmatrix}$$

1. Etude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y\,,\, x + z\,,\, 3x + z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & (2,1,3) & = & 2\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & (1,0,0) & = & 1\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & (0,1,1) & = & 0\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 1\,\overrightarrow{k} \end{array}$$

Considérons la matrice A dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $f\left(\overrightarrow{e_i}\right)$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{i}) & f(\overrightarrow{j}) & f(\overrightarrow{k}) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

on a : $$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(f)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + z \\ 3x + z \end{pmatrix}$$

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - z \end{array}$$

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - z \end{array}$$

$$f(\overrightarrow{i}) \quad = \quad f(1, 0, 0) \quad =$$

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & x - z \end{array}$$

$$f(\overrightarrow{i}) = f(1,0,0) = 1$$

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & x-z \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & 1 \\ f(\overrightarrow{j}) & = & & & \end{array}$$

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & 1 \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & \end{array}$$

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & 1 \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & 0 \end{array}$$

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - z \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & 1 \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & 0 \\ f(\overrightarrow{k}) & = & & & \end{array}$$

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & x - z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & 1 \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & 0 \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & \end{array}$$

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & 1 \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & 0 \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & -1 \end{array}$$

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & 1 \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & 0 \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & -1 \end{array}$$

Considérons la matrice A dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $f\left(\overrightarrow{e_i}\right)$:

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & 1 \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & 0 \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & -1 \end{array}$$

Considérons la matrice A dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $f\left(\overrightarrow{e_i}\right)$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{i}) & f(\overrightarrow{j}) & f(\overrightarrow{k}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - z \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & 1 \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & 0 \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & -1 \end{array}$$

Considérons la matrice A dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $f\left(\overrightarrow{e_i}\right)$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{i}) & f(\overrightarrow{j}) & f(\overrightarrow{k}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ on a : } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & x - z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & 1 \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & 0 \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & -1 \end{array}$$

Considérons la matrice A dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $f\left(\overrightarrow{e_i}\right)$:

$$A = \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{i}) & f(\overrightarrow{j}) & f(\overrightarrow{k}) \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}$$ on a : $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & x-z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & 1 \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & 0 \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & -1 \end{array}$$

Considérons la matrice A dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $f\left(\overrightarrow{e_i}\right)$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{i}) & f(\overrightarrow{j}) & f(\overrightarrow{k}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$ on a : $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \end{pmatrix}$$

2. Etude d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & x-z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} f(\overrightarrow{i}) & = & f(1,0,0) & = & 1 \\ f(\overrightarrow{j}) & = & f(0,1,0) & = & 0 \\ f(\overrightarrow{k}) & = & f(0,0,1) & = & -1 \end{array}$$

Considérons la matrice A dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $f\left(\overrightarrow{e_i}\right)$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{i}) & f(\overrightarrow{j}) & f(\overrightarrow{k}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

on a : $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\operatorname{mat}_{\mathcal{E}}(f)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \end{pmatrix}$

3. Cas général :

3. Cas général :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \dots, \overrightarrow{f_n}\right)$ une base de F. Soit f est une application linéaire de E dans F.

3. Cas général :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \ldots, \overrightarrow{f_n}\right)$ une base de F. Soit f est une application linéaire de E dans F.

Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et son image $\overrightarrow{y} \in F$ par f.

3. Cas général :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \ldots, \overrightarrow{f_n}\right)$ une base de F. Soit f est une application linéaire de E dans F.

Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et son image $\overrightarrow{y} \in F$ par f.

- Dans la base $\mathcal{F}$ de F, les $f(\overrightarrow{e_j})$ s'écrivent de manière unique :

3. Cas général :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \dots, \overrightarrow{f_n}\right)$ une base de F. Soit f est une application linéaire de E dans F.

Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et son image $\overrightarrow{y} \in F$ par f.

- Dans la base $\mathcal{F}$ de F, les $f(\overrightarrow{e_j})$ s'écrivent de manière unique :

$$f(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_{i,j}} \overrightarrow{f_i}, \text{ pour tout } j = 1, \dots, p.$$

3. Cas général :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \ldots, \overrightarrow{f_n}\right)$ une base de F. Soit f est une application linéaire de E dans F.

Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et son image $\overrightarrow{y} \in F$ par f.

- Dans la base $\mathcal{F}$ de F, les $f(\overrightarrow{e_j})$ s'écrivent de manière unique :

$$f(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_{i,j}} \overrightarrow{f_i}, \text{ pour tout } j = 1, \ldots, p.$$

- Dans la base $\mathcal{E}$: $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j \overrightarrow{e_j}$

3. Cas général :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \ldots, \overrightarrow{f_n}\right)$ une base de F. Soit f est une application linéaire de E dans F.

Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et son image $\overrightarrow{y} \in F$ par f.

- Dans la base $\mathcal{F}$ de F, les $f(\overrightarrow{e_j})$ s'écrivent de manière unique :

$$f(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_{i,j}} \overrightarrow{f_i}, \text{ pour tout } j = 1, \ldots, p.$$

- Dans la base $\mathcal{E}$: $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j \overrightarrow{e_j}$

- Dans la base $\mathcal{F}$: $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{f_i}$

3. Cas général :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \ldots, \overrightarrow{f_n}\right)$ une base de F. Soit f est une application linéaire de E dans F.

Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et son image $\overrightarrow{y} \in F$ par f.

- Dans la base $\mathcal{F}$ de F, les $f(\overrightarrow{e_j})$ s'écrivent de manière unique :

$$f(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_{i,j}} \overrightarrow{f_i}, \text{ pour tout } j = 1, \ldots, p.$$

- Dans la base $\mathcal{E}$: $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j \overrightarrow{e_j}$

- Dans la base $\mathcal{F}$: $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{f_i}$

$f\left(\overrightarrow{x}\right) =$

3. Cas général :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \ldots, \overrightarrow{f_n}\right)$ une base de F. Soit f est une application linéaire de E dans F.

Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et son image $\overrightarrow{y} \in F$ par f.

- Dans la base $\mathcal{F}$ de F, les $f(\overrightarrow{e_j})$ s'écrivent de manière unique :

$$f(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_{i,j}} \overrightarrow{f_i}, \text{ pour tout } j = 1, \ldots, p.$$

- Dans la base $\mathcal{E}$: $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j \overrightarrow{e_j}$
- Dans la base $\mathcal{F}$: $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{f_i}$

$$f\left(\overrightarrow{x}\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j f\left(\overrightarrow{e_j}\right) =$$

3. Cas général :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \dots, \overrightarrow{f_n}\right)$ une base de F. Soit f est une application linéaire de E dans F.

Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et son image $\overrightarrow{y} \in F$ par f.

- Dans la base $\mathcal{F}$ de F, les $f(\overrightarrow{e_j})$ s'écrivent de manière unique :

$$f(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_{i,j}} \overrightarrow{f_i}, \text{ pour tout } j = 1, \dots, p.$$

- Dans la base $\mathcal{E}$: $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j \overrightarrow{e_j}$
- Dans la base $\mathcal{F}$: $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{f_i}$

$$f\left(\overrightarrow{x}\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j f\left(\overrightarrow{e_j}\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \overrightarrow{f_i} =$$

3. Cas général :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \ldots, \overrightarrow{f_n}\right)$ une base de F. Soit f est une application linéaire de E dans F.

Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et son image $\overrightarrow{y} \in F$ par f.

- Dans la base $\mathcal{F}$ de F, les $f(\overrightarrow{e_j})$ s'écrivent de manière unique :

$$f(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_{i,j}} \overrightarrow{f_i}, \text{ pour tout } j = 1, \ldots, p.$$

- Dans la base $\mathcal{E}$: $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j \overrightarrow{e_j}$

- Dans la base $\mathcal{F}$: $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{f_i}$

$$f(\overrightarrow{x}) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \overrightarrow{f_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \right) \overrightarrow{f_i}$$

$$=$$

3. Cas général :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \ldots, \overrightarrow{f_n}\right)$ une base de F. Soit f est une application linéaire de E dans F.

Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et son image $\overrightarrow{y} \in F$ par f.

- Dans la base $\mathcal{F}$ de F, les $f(\overrightarrow{e_j})$ s'écrivent de manière unique :

$$f(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_{i,j}} \overrightarrow{f_i}, \text{ pour tout } j = 1, \ldots, p.$$

- Dans la base $\mathcal{E}$: $\overrightarrow{x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j \overrightarrow{e_j}$

- Dans la base $\mathcal{F}$: $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{f_i}$

$$\begin{aligned} f\left(\overrightarrow{x}\right) &= \sum_{j=1}^{p} x_j f\left(\overrightarrow{e_j}\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \overrightarrow{f_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \right) \overrightarrow{f_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{f_i} \end{aligned}$$

3. Cas général :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \dots, \overrightarrow{f_n}\right)$ une base de F. Soit f est une application linéaire de E dans F.

Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et son image $\overrightarrow{y} \in F$ par f.

- Dans la base $\mathcal{F}$ de F, les $f(\overrightarrow{e_j})$ s'écrivent de manière unique :

$$f(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_{i,j}} \overrightarrow{f_i}, \text{ pour tout } j = 1, \dots, p.$$

- Dans la base $\mathcal{E}$: $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j \overrightarrow{e_j}$
- Dans la base $\mathcal{F}$: $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{f_i}$

$$\left.\begin{aligned} f\left(\overrightarrow{x}\right) &= \sum_{j=1}^{p} x_j f\left(\overrightarrow{e_j}\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \overrightarrow{f_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \right) \overrightarrow{f_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{f_i} \end{aligned}\right\} \text{donc } y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$$

Cette égalité se traduit matriciellement par :

Cette égalité se traduit matriciellement par :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & \cdots & f(\vec{e_j}) & \cdots & f(\vec{e_p}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j \end{pmatrix}.$$

III. Matrice d'une application linéaire.

Cette égalité se traduit matriciellement par :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & \dots & \color{red}{f(\vec{e_j})} & \dots & f(\vec{e_p}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j}x_j \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{n,j}x_j \end{pmatrix}.$$

Définition:

La matrice $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est appelée matrice de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, et est notée

$$\underset{\mathcal{E},\mathcal{F}}{\text{mat}}(f)$$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

III. Matrice d'une application linéaire.

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 4 & \dots \end{pmatrix}$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 4 & 7 \end{pmatrix}$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) \\ \left(\begin{array}{c} 4 \end{array} \right. & \left. \begin{array}{c} 7 \end{array} \right) \end{array}$

  où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \ldots\ldots \text{ et } \overrightarrow{e_2} = \ldots\ldots \\ f(\overrightarrow{e_1}) = \ldots \text{ et } f(\overrightarrow{e_2}) = \ldots \end{array} \right.$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \overrightarrow{e_2} = \ldots\ldots \\ f(\overrightarrow{e_1}) = \ldots \text{ et } f(\overrightarrow{e_2}) = \ldots \end{array} \right.$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \vec{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\vec{e_1}) = \dots \text{ et } f(\vec{e_2}) = \dots \end{array} \right.$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} \boldsymbol{f(\overrightarrow{e_1})} & \boldsymbol{f(\overrightarrow{e_2})} \\ \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \overrightarrow{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\overrightarrow{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\overrightarrow{e_2}) = \dots \end{array} \right.$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \overrightarrow{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\overrightarrow{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\overrightarrow{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

Exemple :

- Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}} \end{array}$

où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \vec{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\vec{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\vec{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}} \end{array}$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix} \end{array}$

  où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \vec{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\vec{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\vec{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array}$

Exemple :

- Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \\ \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

  où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \vec{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\vec{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\vec{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 4 & 7 \end{pmatrix}$

  où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = (1,0) \text{ et } \vec{e_2} = (0,1) \\ f(\vec{e_1}) = 4 \text{ et } f(\vec{e_2}) = 7 \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array}$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}} \end{array}$

  où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \vec{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\vec{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\vec{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\, 5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots \end{pmatrix}} \end{array}$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix} \end{array}$

  où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \overrightarrow{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\overrightarrow{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\overrightarrow{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & f(\overrightarrow{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \dots \end{pmatrix} \end{array}$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

  où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \overrightarrow{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\overrightarrow{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\overrightarrow{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & f(\overrightarrow{e_3}) \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) \\ \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

  où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \overrightarrow{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\overrightarrow{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\overrightarrow{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & f(\overrightarrow{e_3}) \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

  car $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathbf{3}x + \mathbf{1}y + \mathbf{0}z \\ \mathbf{0}x \mathbf{-2}y + \mathbf{5}z \end{pmatrix}$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \overrightarrow{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\overrightarrow{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\overrightarrow{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & f(\overrightarrow{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

car $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathbf{3}x + \mathbf{1}y + \mathbf{0}z \\ \mathbf{0}x \mathbf{-2}y + \mathbf{5}z \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \\ \\ \\ \end{array} \right.$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) \\ \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

  où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \overrightarrow{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\overrightarrow{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\overrightarrow{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & f(\overrightarrow{e_3}) \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

  car $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathbf{3}x + \mathbf{1}y + \mathbf{0}z \\ \mathbf{0}x \mathbf{-2}y + \mathbf{5}z \end{pmatrix}$

  où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \mathbf{(1,0,0)} \\ \\ \\ \end{array} \right.$

Exemple :

- Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix} \end{array}$

  où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \vec{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\vec{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\vec{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \end{array}$

  car $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathbf{3}x + \mathbf{1}y + \mathbf{0}z \\ \mathbf{0}x \mathbf{-2}y + \mathbf{5}z \end{pmatrix}$

  où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0,0)}\ ,\ \vec{e_2} = \\ \\ \\ \end{array} \right.$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix} \end{array}$

  où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \vec{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\vec{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\vec{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \end{array}$

  car $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathbf{3}x + \mathbf{1}y + \mathbf{0}z \\ \mathbf{0}x \mathbf{-2}y + \mathbf{5}z \end{pmatrix}$

  où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0,0)}\ ,\ \vec{e_2} = \mathbf{(0,1,0)} \\ \\ \\ \end{array} \right.$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}} \end{array}$

où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \overrightarrow{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\overrightarrow{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\overrightarrow{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & f(\overrightarrow{e_3}) \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}} \end{array}$

car $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathbf{3}x + \mathbf{1}y + \mathbf{0}z \\ \mathbf{0}x \mathbf{-2}y + \mathbf{5}z \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \mathbf{(1,0,0)}\ ,\ \overrightarrow{e_2} = \mathbf{(0,1,0)}\ ,\ \text{et } \overrightarrow{e_3} = \\ \\ \\ \end{array} \right.$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) \\ \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \overrightarrow{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\overrightarrow{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\overrightarrow{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & f(\overrightarrow{e_3}) \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

car $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathbf{3}x + \mathbf{1}y + \mathbf{0}z \\ \mathbf{0}x \mathbf{-2}y + \mathbf{5}z \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \mathbf{(1,0,0)}\ ,\ \overrightarrow{e_2} = \mathbf{(0,1,0)}\ ,\ \text{et } \overrightarrow{e_3} = \mathbf{(0,0,1)} \end{array} \right.$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \\ \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 7 \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = (1,0) \text{ et } \vec{e_2} = (0,1) \\ f(\vec{e_1}) = 4 \text{ et } f(\vec{e_2}) = 7 \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \\ \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

car $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x + 1y + 0z \\ 0x - 2y + 5z \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = (1,0,0)\ ,\ \vec{e_2} = (0,1,0)\ , \text{ et } \vec{e_3} = (0,0,1) \\ f(\vec{e_1}) = \end{array} \right.$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix} \end{array}$

  où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \vec{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\vec{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\vec{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \end{array}$

  car $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathbf{3}x + \mathbf{1}y + \mathbf{0}z \\ \mathbf{0}x \mathbf{-2}y + \mathbf{5}z \end{pmatrix}$

  où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0,0)}\ ,\ \vec{e_2} = \mathbf{(0,1,0)}\ ,\text{ et } \vec{e_3} = \mathbf{(0,0,1)} \\ f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array} \right.$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}} \end{array}$

où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \vec{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\vec{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\vec{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}} \end{array}$

car $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathbf{3}x + \mathbf{1}y + \mathbf{0}z \\ \mathbf{0}x \mathbf{-2}y + \mathbf{5}z \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0,0)}\ ,\ \vec{e_2} = \mathbf{(0,1,0)}\ ,\text{ et } \vec{e_3} = \mathbf{(0,0,1)} \\ f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\ ,\ f(\vec{e_2}) = \end{array} \right.$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \\ \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \vec{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\vec{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\vec{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

car $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathbf{3}x + \mathbf{1}y + \mathbf{0}z \\ \mathbf{0}x \mathbf{-2}y + \mathbf{5}z \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0,0)}\ ,\ \vec{e_2} = \mathbf{(0,1,0)}\ , \text{ et } \vec{e_3} = \mathbf{(0,0,1)} \\ f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\ ,\ f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix} \end{array} \right.$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \\ \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0)} \text{ et } \vec{e_2} = \mathbf{(0,1)} \\ f(\vec{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\vec{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

car $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathbf{3}x + \mathbf{1}y + \mathbf{0}z \\ \mathbf{0}x \mathbf{-2}y + \mathbf{5}z \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \mathbf{(1,0,0)}\ ,\ \vec{e_2} = \mathbf{(0,1,0)}\ ,\text{ et } \vec{e_3} = \mathbf{(0,0,1)} \\ f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\ ,\ f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}\ ,\text{ et } f(\vec{e_3}) = \end{array} \right.$

Exemple :

- Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+7y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \\ \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = (\mathbf{1,0}) \text{ et } \vec{e_2} = (\mathbf{0,1}) \\ f(\vec{e_1}) = \mathbf{4} \text{ et } f(\vec{e_2}) = \mathbf{7} \end{array} \right.$

- Si $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y\,,\,5z-2y) \end{array}$ alors $\underset{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2}{\text{mat}}(g) = \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

car $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathbf{3}x + \mathbf{1}y + \mathbf{0}z \\ \mathbf{0}x \mathbf{-2}y + \mathbf{5}z \end{pmatrix}$

où $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = (\mathbf{1,0,0})\ ,\ \vec{e_2} = (\mathbf{0,1,0})\ ,\text{ et } \vec{e_3} = (\mathbf{0,0,1}) \\ f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},\ f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix},\text{ et } f(\vec{e_3}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix} \end{array} \right.$

4. Propriétés

III. Matrice d'une application linéaire.

4. Propriétés

Propriété:

Soient E, F, et G trois espaces vectoriels de dimension fini. E est muni d'une base $\mathcal{E}$, F d'un base $\mathcal{F}$, et G d'une base $\mathcal{G}$.

Pour tout $f \in L(E, F)$, $g \in L(F, G)$, $\underset{\mathcal{E},\mathcal{G}}{\operatorname{mat}}(g \circ f) =$

4. Propriétés

Propriété:

Soient E, F, et G trois espaces vectoriels de dimension fini. E est muni d'une base $\mathcal{E}$, F d'un base $\mathcal{F}$, et G d'une base $\mathcal{G}$.

Pour tout $f \in L(E,F)$, $g \in L(F,G)$, $\underset{\mathcal{E},\mathcal{G}}{\text{mat}}(g \circ f) = \left(\underset{\mathcal{F},\mathcal{G}}{\textbf{mat}}(g)\right)\left(\underset{\mathcal{E},\mathcal{F}}{\textbf{mat}}(f)\right)$

4. Propriétés

Propriété:

Soient E, F, et G trois espaces vectoriels de dimension fini. E est muni d’une base $\mathcal{E}$, F d’un base $\mathcal{F}$, et G d’une base $\mathcal{G}$.

Pour tout $f \in L(E,F)$, $g \in L(F,G)$, $\underset{\mathcal{E},\mathcal{G}}{\mathrm{mat}}(g \circ f) = \left(\underset{\mathcal{F},\mathcal{G}}{\mathbf{mat}}(g)\right)\left(\underset{\mathcal{E},\mathcal{F}}{\mathbf{mat}}(f)\right)$

Autrement dit, composer deux applications linéaires revient à multiplier leurs matrices dans le même ordre.

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, z - 2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$(g \circ f)(x,y,z) =$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(\qquad , \qquad) =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, \qquad) =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, z - 2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x, y, z) = g\Big(f(x, y, z)\Big) = g(x + y, z - 2y) =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x+3y-z$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x+3y-z$$

$$g \circ f: \begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{g} & \\ (x,y,z) & \longmapsto & & \longmapsto & \end{array}$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x+3y-z$$

$$g \circ f: \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{g} & \\ (x,y,z) & \longmapsto & & \longmapsto & \end{array}$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x + 3y - z$$

$$g \circ f: \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \\ (x,y,z) & \longmapsto & & \longmapsto & \end{array}$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x+3y-z$$

$$g \circ f: \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & & \longmapsto & \end{array}$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x+3y-z$$

$$g \circ f: \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) & \longmapsto & \end{array}$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x+3y-z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) & \longmapsto & (x+y)-(z-2y) \end{array}$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x + 3y - z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) & \longmapsto & (x+y) - (z-2y) \; = \end{array}$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x + 3y - z$$

$$g \circ f: \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) & \longmapsto & (x+y) - (z-2y) \ = \ x+3y-z \end{array}$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x + 3y - z$$

$$g \circ f: \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) & \longmapsto & (x+y)-(z-2y) \;=\; x+3y-z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x+3y-z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) & \longmapsto & (x+y)-(z-2y) \; = \; x+3y-z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, z - 2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x, y, z) = g\Big(f(x, y, z)\Big) = g(x + y, z - 2y) = (x + y) - (z - 2y) = x + 3y - z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, z - 2y) & \longmapsto & (x + y) - (z - 2y) \ = \ x + 3y - z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \qquad \end{pmatrix} =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x+3y-z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) & \longmapsto & (x+y)-(z-2y) \;=\; x+3y-z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, z - 2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x, y, z) = g\Big(f(x, y, z)\Big) = g(x + y, z - 2y) = (x + y) - (z - 2y) = x + 3y - z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, z - 2y) & \longmapsto & (x + y) - (z - 2y) \ = \ x + 3y - z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix} =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x, y, z) = g\Big(f(x, y, z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x + 3y - z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) & \longmapsto & (x+y) - (z-2y) \;=\; x + 3y - z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y \\ z - 2y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x, y, z) = g\Big(f(x, y, z)\Big) = g(x + y, z - 2y) = (x + y) - (z - 2y) = x + 3y - z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, z - 2y) & \longmapsto & (x + y) - (z - 2y) \;=\; x + 3y - z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y \\ z - 2y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x, y, z) = g\Big(f(x, y, z)\Big) = g(x + y, z - 2y) = (x + y) - (z - 2y) = x + 3y - z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, z - 2y) & \longmapsto & (x + y) - (z - 2y) \; = \; x + 3y - z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \end{pmatrix} =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ z-2y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x+3y-z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) & \longmapsto & (x+y)-(z-2y) \ = \ x+3y-z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & & \end{pmatrix} =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y \\ z - 2y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x, y, z) = g\Big(f(x, y, z)\Big) = g(x + y, z - 2y) = (x + y) - (z - 2y) = x + 3y - z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, z - 2y) & \longmapsto & (x + y) - (z - 2y) \;=\; x + 3y - z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & & \end{pmatrix} =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y \\ z - 2y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x, y, z) = g\Big(f(x, y, z)\Big) = g(x + y, z - 2y) = (x + y) - (z - 2y) = x + 3y - z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, z - 2y) & \longmapsto & (x + y) - (z - 2y) \ = \ x + 3y - z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix} =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ z-2y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x+3y-z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) & \longmapsto & (x+y)-(z-2y) \;=\; x+3y-z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & \end{pmatrix} =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y \\ z - 2y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x, y, z) = g\Big(f(x, y, z)\Big) = g(x + y, z - 2y) = (x + y) - (z - 2y) = x + 3y - z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & & \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, z - 2y) & \longmapsto & (x + y) - (z - 2y) & = & x + 3y - z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ z-2y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x+3y-z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) & \longmapsto & (x+y)-(z-2y) \; = \; x+3y-z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} =$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y \\ z - 2y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x, y, z) = g\Big(f(x, y, z)\Big) = g(x + y, z - 2y) = (x + y) - (z - 2y) = x + 3y - z$$

$$g \circ f: \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, z - 2y) & \longmapsto & (x + y) - (z - 2y) \; = \; x + 3y - z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \end{pmatrix} = \text{mat}\big(g \circ f\big)$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ z-2y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x+3y-z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) & \longmapsto & (x+y)-(z-2y) \; = \; x+3y-z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \; \end{pmatrix} = \text{mat}\big(g \circ f\big)$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y \\ z - 2y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x, y, z) = g\Big(f(x, y, z)\Big) = g(x + y, z - 2y) = (x + y) - (z - 2y) = x + 3y - z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, z - 2y) & \longmapsto & (x + y) - (z - 2y) \; = \; x + 3y - z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \text{mat}\big(g \circ f\big)$$

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ z-2y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x+3y-z$$

$$g \circ f: \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) & \longmapsto & (x+y)-(z-2y) \ = \ x+3y-z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \text{mat}\big(g \circ f\big)$$

- **Etude de $f \circ g$:**

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ z-2y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x+3y-z$$

$$g \circ f: \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) & \longmapsto & (x+y)-(z-2y) \ = \ x+3y-z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \text{mat}\big(g \circ f\big)$$

- **Etude de $f \circ g$:**

$f \circ g$ n'est pas définie,

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ z-2y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x+3y-z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) & \longmapsto & (x+y)-(z-2y) \ = \ x+3y-z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \text{mat}\big(g \circ f\big)$$

- **Etude de $f \circ g$:**

$f \circ g$ n'est pas définie, car l'espace d'arrivée de g est $\mathbb{R}$ qui est différent de l'espace de départ de f qui est

Exemple : Détermine, si c'est possible, algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ z-2y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\Big(f(x,y,z)\Big) = g(x+y, z-2y) = (x+y) - (z-2y) = x+3y-z$$

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, z-2y) & \longmapsto & (x+y)-(z-2y) \ = \ x+3y-z \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \text{mat}\big(g \circ f\big)$$

- **Etude de $f \circ g$:**

$f \circ g$ n'est pas définie, car l'espace d'arrivée de g est $\mathbb{R}$ qui est différent de l'espace de départ de f qui est $\mathbb{R}^3$.

Exercice n° 1 : Détermine algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ -x \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -x \\ 2y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice n° 1 : Déterminé algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ -x \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -x \\ 2y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

Exercice n° 1 : Détermine algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ -x \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -x \\ 2y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

- **Etude de $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x, y) = g\big(f(x, y)\big) = g\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} =$$

$$g \circ f: \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{g} & \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} & \longmapsto & \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

$$\text{mat}\,(g)\,\text{mat}\,(f) =$$

Exercice n° 1 : Détermine algébriquement et matriciellement $g \circ f$ et $f \circ g$ où

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ -x \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -x \\ 2y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

- **Etude de $f \circ g$:**

$$(f \circ g)(x,y) = f\big(g(x,y,z)\big) = f\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} =$$

$$f \circ g : \begin{array}{ccccc} & \longrightarrow & & \longrightarrow & \\ \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} & \longmapsto & \end{array}$$

En munissant les espaces vectoriels de leur base canonique :

mat (f) mat (g) $=$

Propriété:

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension fini, et f un isomorphisme de E dans F.
Si E est muni d'une base $\mathcal{E}$ et F d'un base $\mathcal{F}$ alors :

$$\underset{\mathcal{F},\mathcal{E}}{\operatorname{mat}}\left(f^{-1}\right) =$$

Propriété:

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension fini, et f un isomorphisme de E dans F. Si E est muni d'une base $\mathcal{E}$ et F d'un base $\mathcal{F}$ alors :

$$\underset{\mathcal{F},\mathcal{E}}{\text{mat}}\left(f^{-1}\right) = \left(\underset{\mathcal{E},\mathcal{F}}{\text{mat}}\left(f\right)\right)^{-1}$$

Propriété:

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension fini, et f un isomorphisme de E dans F.
Si E est muni d'une base $\mathcal{E}$ et F d'un base $\mathcal{F}$ alors :

$$\underset{\mathcal{F},\mathcal{E}}{\text{mat}}\left(f^{-1}\right) = \left(\underset{\mathcal{E},\mathcal{F}}{\text{mat}}\left(f\right)\right)^{-1}$$

Autrement dit, la matrice de la bijection réciproque de f est la matrice inverse de f.