Corrigé de la feuille de révision

Exercice n° 1 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base base $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$, on considère la forme quadratique q, définie par : $q(x,y,z) = 5x^2 - 4y^2 - 8xy + 8yz + 26xz + 5z^2$

1. Applique la méthode de décomposition de Gauss avec cette forme quadratique $Q(x,y,z)$

$$\begin{aligned}
q(x,y,z) &= -4y^2 + y(-8x+8z) + 5x^2 + 26xz + 5z^2 \\
&= -4\big[y^2 + y(2x-2z)\big] + 5x^2 + 26xz + 5z^2 \\
&= -4\Big[\big(y+(x-z)\big)^2 - (x-z)^2\Big] + 5x^2 + 26xz + 5z^2 \\
&= -4\Big[y+(x-z)\Big]^2 + 4(x-z)^2 + 5x^2 + 26xz + 5z^2 \\
&= -4\Big[x+y-z\Big]^2 + 9x^2 + 18xz + 9z^2 \\
&= -4\Big[x+y-z\Big]^2 + 9\Big[x^2+2xz+z^2\Big] = -4\Big[x+y-z\Big]^2 + 9\Big[x+z\Big]^2
\end{aligned}$$

2. On note $\mathcal{F}$, la base $\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right)$ associée à ta décomposition de Gauss. Détermine $\left[\overrightarrow{f_1}\right]_{\mathcal{E}}$, $\left[\overrightarrow{f_2}\right]_{\mathcal{E}}$, et $\left[\overrightarrow{f_3}\right]_{\mathcal{E}}$.

En posant $q(X,Y,Z) = -4X^2 + 9Y^2$ dans la base $\mathcal{F}$, on a :

$$\left[\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x \quad +z \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \left[\overrightarrow{e_1}\right]_{\mathcal{F}} & \left[\overrightarrow{e_2}\right]_{\mathcal{F}} & \left[\overrightarrow{e_3}\right]_{\mathcal{F}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}_{P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Il faut déterminer $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \left(P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1}$: **On échelonne :**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ \\ \end{array}$$

On réduit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1+L_3 \\ L_2-2L_3 \\ \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1+L_2 \\ -L_2 \\ \\ \end{array} \quad \text{et } P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \left[\overrightarrow{f_1}\right]_{\mathcal{E}} & \left[\overrightarrow{f_2}\right]_{\mathcal{E}} & \left[\overrightarrow{f_3}\right]_{\mathcal{E}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. La base $\mathcal{F}$ est-elle orthogonale ?

Non, car $\overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} = 0 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 0 = -1 \neq 0$

Exercice n° 2 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base base α, on considère la forme quadratique :

$$q(x,y,z) = 5x^2 - 4y^2 - 8xy + 8yz + 26xz + 5z^2.$$

1. Détermine la matrice B de la forme bilinéaire b associée à la forme quadratique q.

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 13 \\ -4 & -4 & 4 \\ 13 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Calcule le polynôme caractéristique de la matrice B.

$$\begin{vmatrix}5-t&-4&13\\-4&-4-t&4\\13&4&5-t\end{vmatrix} = \underbrace{+(5-t)\underbrace{\begin{vmatrix}-4-t&4\\4&5-t\end{vmatrix}}_{t^2-t-36}}_{-t^3+6t^2+31t-180}\ \underbrace{-(-4)\underbrace{\begin{vmatrix}-4&4\\13&5-t\end{vmatrix}}_{4t-72}}_{16t-288}\ \underbrace{+(13)\underbrace{\begin{vmatrix}-4&-4-t\\13&4\end{vmatrix}}_{13t+36}}_{169t+468}$$

$$= -t^3+6t^2+216t$$

3. Détermine ses valeurs propres.

$-t^3+6t^2+216t = (-t^2+6t+216)t$ donc une valeur propre est $\lambda_1 = 0$.

$-t^2+6t+216=0$, $\Delta = 900$ d'où $\lambda_2 = \dfrac{-6+30}{-2} = -12$ et $\lambda_3 = \dfrac{-6-30}{-2} = 18$

4. Détermine les sous-espaces propres.

- **Etude de $\boldsymbol{E_0}$:** $\begin{array}{c} x \quad\ y \quad\ z \\ \left(\begin{array}{ccc|c}5-0&-4&13&0\\-4&-4-0&4&0\\13&4&5-0&0\end{array}\right)\end{array}$ $\begin{array}{c} x \quad y \quad z \quad 0 \\ \left(\begin{array}{ccc|c}5&-4&13&0\\0&-36&72&0\\0&72&-144&0\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} \\ 5L_2+4L_1\\5L_3-13L_1\end{array}$ $\begin{array}{c} x \quad y \quad z \quad 0 \\ \left(\begin{array}{ccc|c}5&-4&13&0\\0&-1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} \\ L_2/36\\L_3+2L_2\end{array}$

  z est une variable libre, $\begin{cases}5x = 4y-13z = -5z\\ y = 2z\end{cases}$ $\begin{cases}x = -z\\ y = 2z\end{cases}$. $E_0 = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

- **Etude de $\boldsymbol{E_{-12}}$:** $\begin{array}{c} x \quad\ y \quad\ z \\ \left(\begin{array}{ccc|c}5+12&-4&13&0\\-4&-4+12&4&0\\13&4&5+12&0\end{array}\right)\end{array}$ $\begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \left(\begin{array}{ccc|c}17&-4&13&0\\-4&8&4&0\\13&4&17&0\end{array}\right)\end{array}$ $\begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&1&0\\17&-4&13&0\\13&4&17&0\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l}L_2/4\\L_1\\ \ \end{array}$

  $\begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&1&0\\0&30&30&0\\0&30&30&0\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} \\ L_2+17L_1\\L_3+13L_1\end{array}$

  z est une variable libre, $\begin{cases}x = 2y+z = -z\\ y = -z\end{cases}$. $E_{-12} = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

- **Etude de $\boldsymbol{E_{18}}$:** $\begin{array}{c} x \quad\ y \quad\ z \\ \left(\begin{array}{ccc|c}5-18&-4&13&0\\-4&-4-18&4&0\\13&4&5-18&0\end{array}\right)\end{array}$ $\begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \left(\begin{array}{ccc|c}-13&-4&13&0\\-4&-22&4&0\\13&4&-13&0\end{array}\right)\end{array}$ $\begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \left(\begin{array}{ccc|c}-2&-11&2&0\\-13&-4&13&0\\13&4&-13&0\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l}L_2/2\\L_1\\ \ \end{array}$

  $\begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \left(\begin{array}{ccc|c}-2&-11&2&0\\0&135&0&0\\0&-135&0&0\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} \\ 2L_2-13L_1\\2L_3+13L_1\end{array}$

  z est une variable libre, $\begin{cases}x = z\\ y = 0\end{cases}$. $E_{18} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

5. On note $\beta = \left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}\right)$ la famille constituée de trois vecteurs propres de la forme bilinéaire b tels que :

- $\overrightarrow{b_1}$ soit un vecteur propre associé à la valeur propre nulle ;
- $\overrightarrow{b_2}$ soit un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre ;
- $\overrightarrow{b_3}$ soit un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre ;
- $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_2}$, et $\overrightarrow{b_3}$ aient une cote (un z) égale à 1.

(a) Donne les coordonnées $\left[\overrightarrow{b_1}\right]_\alpha$, $\left[\overrightarrow{b_2}\right]_\alpha$, et $\left[\overrightarrow{b_3}\right]_\alpha$. $\left[\overrightarrow{b_1}\right]_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\left[\overrightarrow{b_2}\right]_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\left[\overrightarrow{b_3}\right]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) Pourquoi la famille β est une base ? Vérifie par un calcul. Car, β est une famille de vecteurs propres.

Vérifions : On écrit le système $\lambda_1\overrightarrow{b_1} + \lambda_2\overrightarrow{b_2} + \lambda_3\overrightarrow{b_3} = \overrightarrow{0}$:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} \\ L_2+2L_1 \\ L_3+L_1 \end{matrix} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

β est libre, donc elle engendre un sous-espace vectoriel de dimension 3. La famille β est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Cette base est-elle orthogonale ? Vérifie. Oui, car une base constituée de vecteurs propres est orthogonale

Vérification : $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, et $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

7. On note (x, y, z) les coordonnées dans la base α, et (X, Y, Z) les coordonnées dans la base β.

(a) Quelle est la matrice de passage de la base α à la base β ? $P_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Détermine la matrice de la forme bilinéaire b dans la base β.

$$\operatorname*{mat}_\beta(f) = {}^tP_\alpha^\beta B P_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 13 \\ -4 & -4 & 4 \\ 13 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & -12 \\ 18 & 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$$

(c) Quelle est la matrice de passage de la base β à la base α ? $P_\beta^\alpha = \left(P_\alpha^\beta\right)^{-1}$

On échelonne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ L_2+2L_1 \\ L_3+L_1 \end{matrix}$$

On réduit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} 2L_1-L_3 \\ L_2-L_3 \\ \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} 3L_1-2L_2 \\ \\ \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{matrix} -L_1/6 \\ -L_2/3 \\ L_3/2 \end{matrix}$$

$$P_\beta^\alpha = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(d) Exprime x, y, et z en fonction de X, Y, et Z. $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_\alpha = P_\alpha^\beta \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right]_\beta$ donc $\begin{cases} x = -X - Y + Z \\ y = 2X - Y \\ z = X + Y + Z \end{cases}$

(e) Comment la forme quadratique $q(X, Y, Z)$ s'écrit-elle dans la base β ? $q(X, Y, Z) = -36Y^2 + 36Z^2$

(f) Exprime X, Y, et Z en fonction de x, y, et z. $\left[\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right]_\beta = P_\beta^\alpha \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_\alpha$ donc $\begin{cases} X = \frac{1}{6}(-x + 2y + z) \\ Y = \frac{1}{3}(-x - y + z) \\ Z = \frac{1}{2}(x + z) \end{cases}$

(g) Déduis-en la forme quadratique $q(x, y, z)$ comme une différence de carrées dans la base α ?

$$q(x, y, z) = -36\left[\frac{1}{3}(-x - y + z)\right]^2 + 36\left[\frac{1}{2}(x + z)\right]^2 = -4\left[-x - y + z\right]^2 + 9\left[x + z\right]^2$$