

Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires.

🌀 Fiche n° 4 🌀

1. Structure de l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où les $x_i \in \mathbb{R}$ muni des deux opérations :

1. Structure de l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où les $x_i \in \mathbb{R}$ muni des deux opérations :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{pmatrix} \text{ et}$$

1. Structure de l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où les $x_i \in \mathbb{R}$ muni des deux opérations :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

1. Structure de l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où les $x_i \in \mathbb{R}$ muni des deux opérations :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

A chaque n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on associe un vecteurs,

1. Structure de l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où les $x_i \in \mathbb{R}$ muni des deux opérations :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

A chaque n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on associe un vecteurs, d'où la dénomination espace vectoriel.

1. Structure de l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où les $x_i \in \mathbb{R}$ muni des deux opérations :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

A chaque n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on associe un vecteurs, d'où la dénomination espace vectoriel.

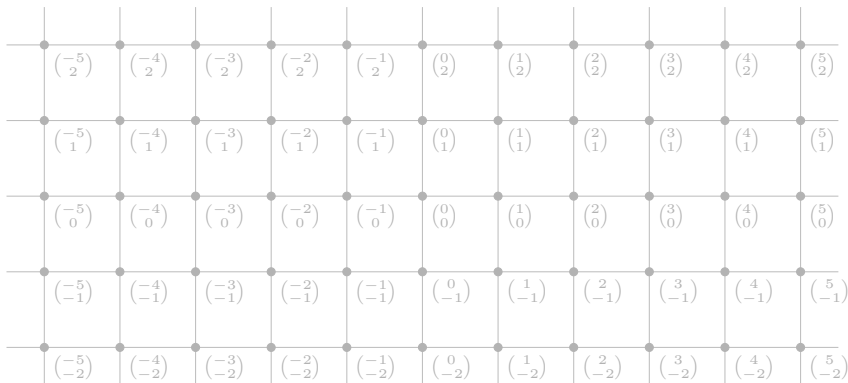
Attention !



! Un vecteur a des coordonnées dans une base.

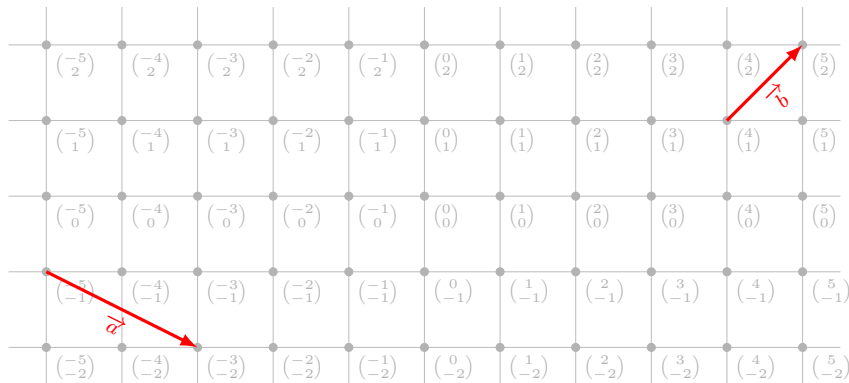
I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 1 : Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$,



I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

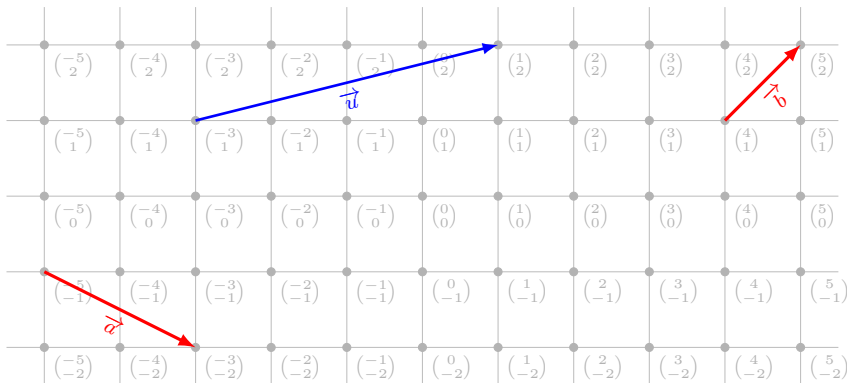
Exemple n° 1 : Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$,



Dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$,

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

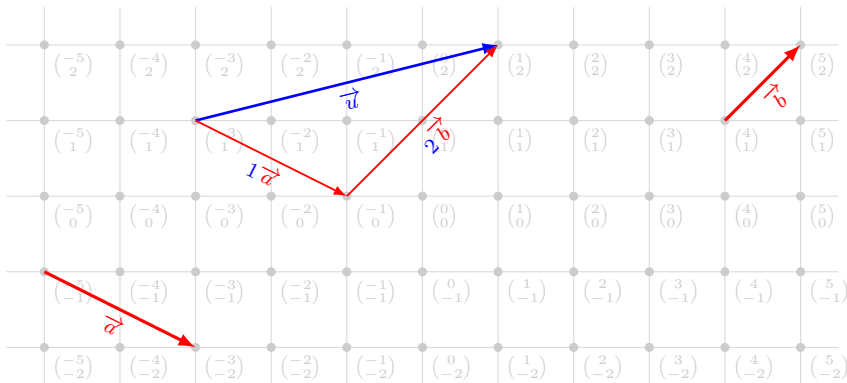
Exemple n° 1 : Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$,



Dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

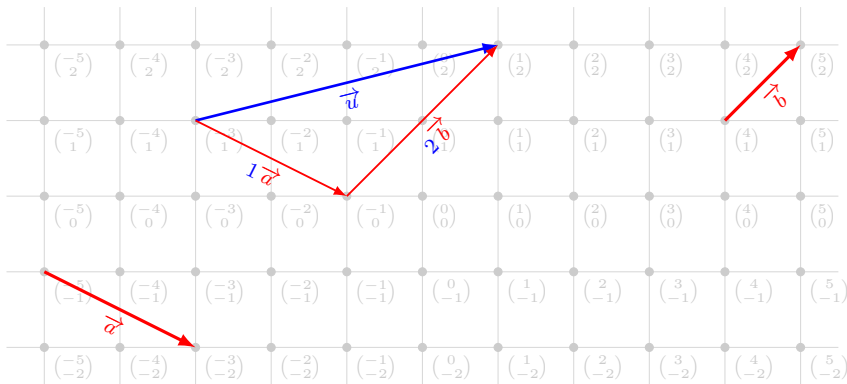
Exemple n° 1 : Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$,



Dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 1 : Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$,

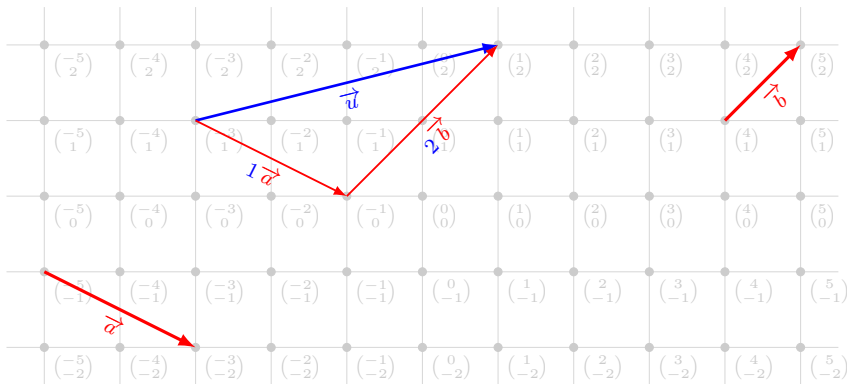


Dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dans la base $(\vec{b}, \vec{a})$, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 1 : Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$,

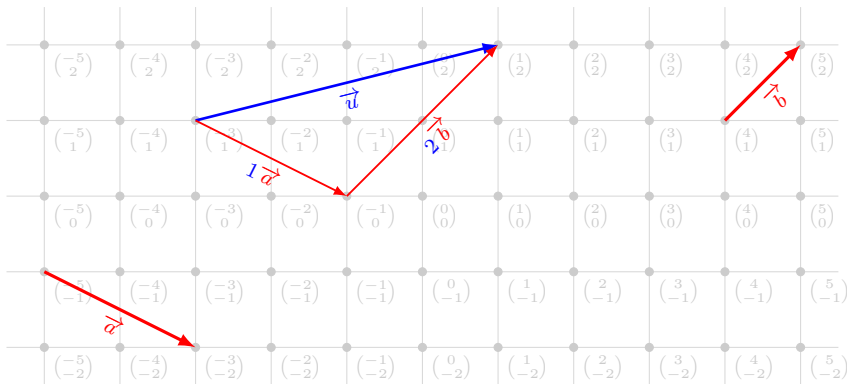


Dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dans la base $(\vec{b}, \vec{a})$, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 1 : Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$,

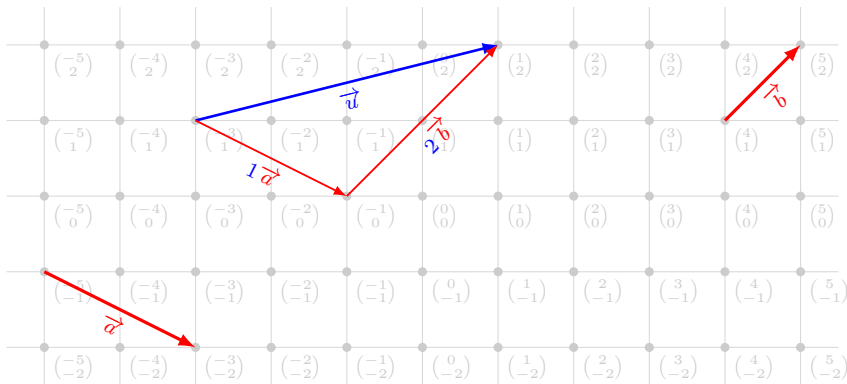


Rappel : $[\vec{u}]_{(\vec{a}, \vec{b})} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \end{pmatrix}$, $[\vec{u}]_{(\vec{b}, \vec{a})} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \end{pmatrix}$

$$[\vec{u}]_{(\vec{b}, -\vec{a})} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \end{pmatrix} \text{ car } \vec{u} =$$

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 1 : Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$,

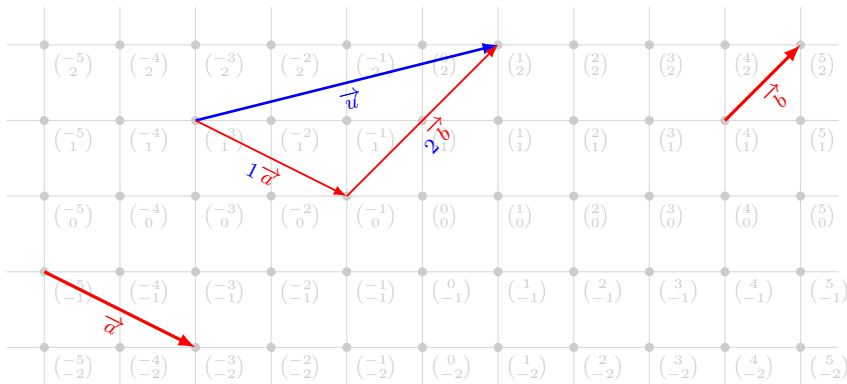


Rappel : $[\vec{u}]_{(\vec{a}, \vec{b})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $[\vec{u}]_{(\vec{b}, \vec{a})} = \begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix}$

$$[\vec{u}]_{(\vec{b}, -\vec{a})} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \text{ car } \vec{u} =$$

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 1 : Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$,

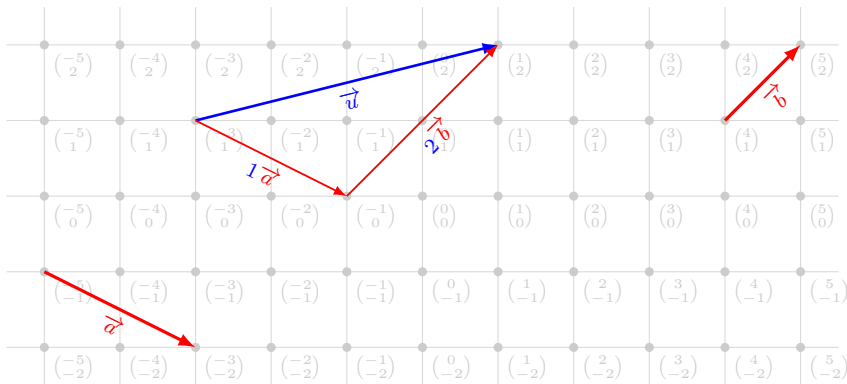


Rappel : $[\vec{u}]_{(\vec{a}, \vec{b})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $[\vec{u}]_{(\vec{b}, \vec{a})} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$[\vec{u}]_{(\vec{b}, -\vec{a})} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \text{ car } \vec{u} =$$

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 1 : Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$,

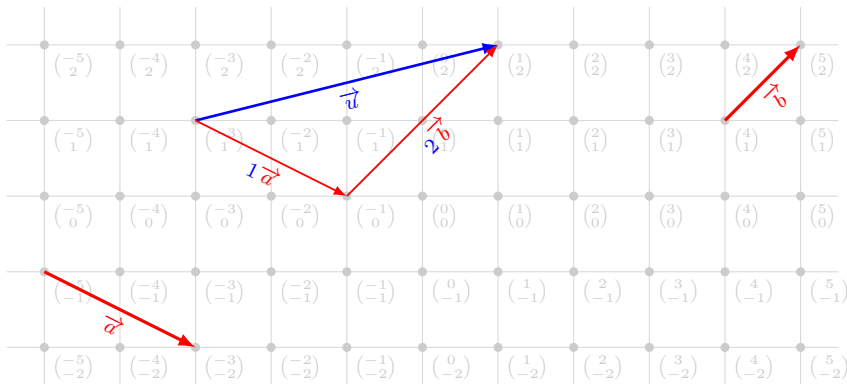


Rappel : $[\vec{u}]_{(\vec{a}, \vec{b})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $[\vec{u}]_{(\vec{b}, \vec{a})} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$[\vec{u}]_{(\vec{b}, -\vec{a})} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ car } \vec{u} =$$

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 1 : Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$,

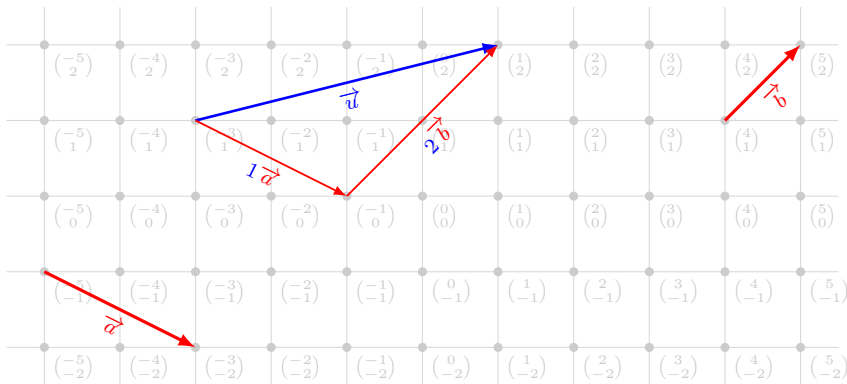


Rappel : $[\vec{u}]_{(\vec{a}, \vec{b})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $[\vec{u}]_{(\vec{b}, \vec{a})} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$[\vec{u}]_{(\vec{b}, -\vec{a})} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ car } \vec{u} = \mathbf{2} \vec{b} - \mathbf{1} (-\vec{a})$$

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 1 : Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$,



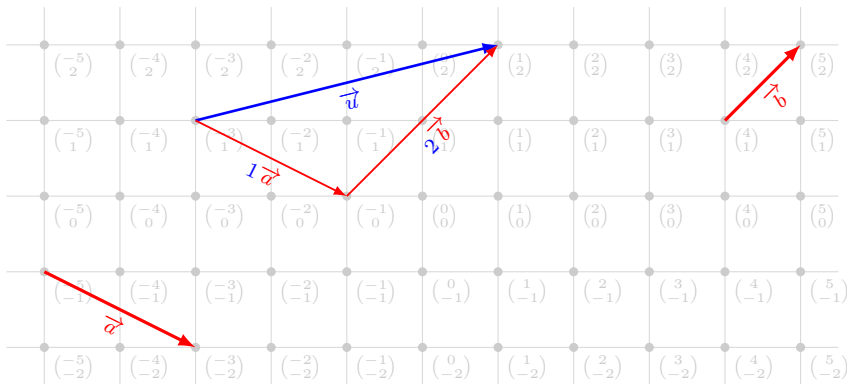
Rappel : $[\vec{u}]_{(\vec{a}, \vec{b})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $[\vec{u}]_{(\vec{b}, \vec{a})} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$[\vec{u}]_{(\vec{b}, -\vec{a})} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ car } \vec{u} = \mathbf{2} \vec{b} - \mathbf{1} (-\vec{a})$$

$$[\vec{u}]_{(\overrightarrow{a+b}, \vec{b})} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \text{ car } \vec{u} =$$

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 1 : Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$,



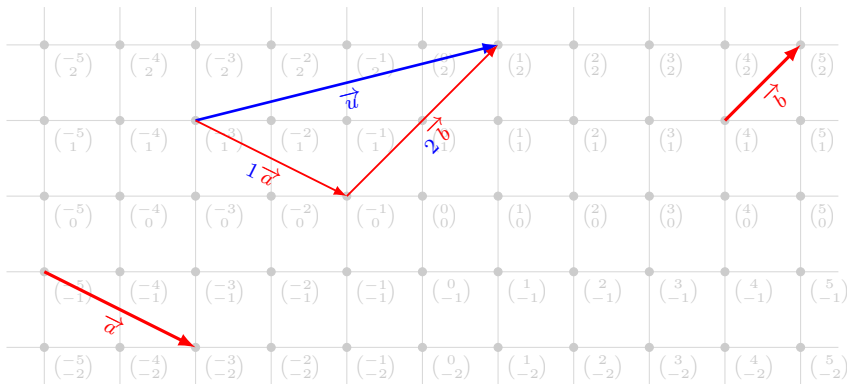
Rappel : $[\vec{u}]_{(\vec{a}, \vec{b})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $[\vec{u}]_{(\vec{b}, \vec{a})} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$[\vec{u}]_{(\vec{b}, -\vec{a})} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ car } \vec{u} = \mathbf{2} \vec{b} - \mathbf{1} (-\vec{a})$$

$$[\vec{u}]_{(\vec{a}+\vec{b}, \vec{b})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ car } \vec{u} =$$

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 1 : Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$,



Rappel : $[\vec{u}]_{(\vec{a}, \vec{b})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $[\vec{u}]_{(\vec{b}, \vec{a})} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$[\vec{u}]_{(\vec{b}, -\vec{a})} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ car } \vec{u} = \mathbf{2} \vec{b} - \mathbf{1} (-\vec{a})$$

$$[\vec{u}]_{(\vec{a}+\vec{b}, \vec{b})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ car } \vec{u} = \mathbf{1}(\vec{a} + \vec{b}) + \mathbf{1} \vec{b}$$

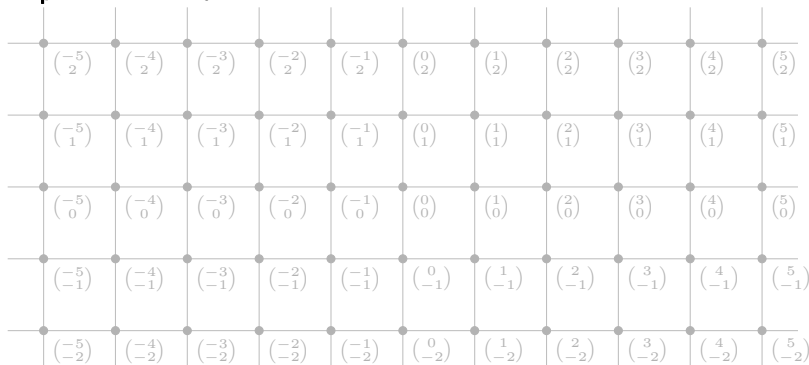
2. Bases canoniques

Dans L'ensemble des n-uplets $\mathbb{R}^n$, les vecteurs : $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots$, $\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ appelée la base **canonique** de $\mathbb{R}^n$.

2. Bases canoniques

Dans L'ensemble des n-uplets $\mathbb{R}^n$, les vecteurs : $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ appelée la base **canonique** de $\mathbb{R}^n$.

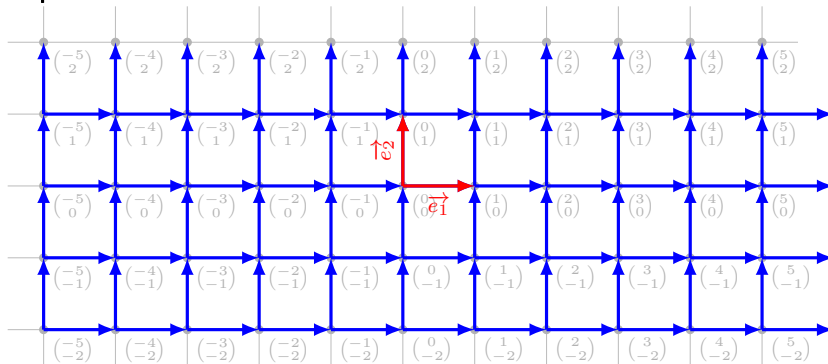
Exemple n° 2 : Dans $\mathbb{R}^2$:



2. Bases canoniques

Dans l'ensemble des n-uplets $\mathbb{R}^n$, les vecteurs : $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ appelée la base **canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Exemple n° 2 : Dans $\mathbb{R}^2$:



3. Structure de l'espace affine $\mathcal{E}$ de direction $\vec{\mathcal{E}}$.



Définition:

On dit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ non vide de points est un **espace affine** de dimension n s'il existe un espace vectoriel de dimension n , noté $\vec{\mathcal{E}}$, tel que :

3. Structure de l'espace affine $\mathcal{E}$ de direction $\vec{\mathcal{E}}$.



Définition:

On dit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ non vide de points est un **espace affine** de dimension n s'il existe un espace vectoriel de dimension n , noté $\vec{\mathcal{E}}$, tel que :

- A tout couple de points $(A, B) \in \mathcal{E}^2$, il existe un **unique** vecteur de $\vec{\mathcal{E}}$ que l'on note $\overrightarrow{AB}$.

3. Structure de l'espace affine $\mathcal{E}$ de direction $\vec{\mathcal{E}}$.



Définition:

On dit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ non vide de points est un **espace affine** de dimension n s'il existe un espace vectoriel de dimension n , noté $\vec{\mathcal{E}}$, tel que :

- A tout couple de points $(A, B) \in \mathcal{E}^2$, il existe un **unique** vecteur de $\vec{\mathcal{E}}$ que l'on note $\overrightarrow{AB}$.
- A tout point $A \in \mathcal{E}$ et tout vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$, il existe un **unique** point B de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, le point B est noté $A + \vec{u}$.

3. Structure de l'espace affine $\mathcal{E}$ de direction $\vec{\mathcal{E}}$.



Définition:

On dit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ non vide de points est un **espace affine** de dimension n s'il existe un espace vectoriel de dimension n , noté $\vec{\mathcal{E}}$, tel que :

- A tout couple de points $(A, B) \in \mathcal{E}^2$, il existe un **unique** vecteur de $\vec{\mathcal{E}}$ que l'on note $\overrightarrow{AB}$.
- A tout point $A \in \mathcal{E}$ et tout vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$, il existe un **unique** point B de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, le point B est noté $A + \vec{u}$.
- A tout point $A \in \mathcal{E}$ et tout couples de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$,
 $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$ (La façon dont on combine les vecteurs pour se déplacer ne dépend pas du point de départ).

3. Structure de l'espace affine $\mathcal{E}$ de direction $\vec{\mathcal{E}}$.



Définition:

On dit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ non vide de points est un **espace affine** de dimension n s'il existe un espace vectoriel de dimension n , noté $\vec{\mathcal{E}}$, tel que :

- A tout couple de points $(A, B) \in \mathcal{E}^2$, il existe un **unique** vecteur de $\vec{\mathcal{E}}$ que l'on note $\overrightarrow{AB}$.
- A tout point $A \in \mathcal{E}$ et tout vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$, il existe un **unique** point B de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, le point B est noté $A + \vec{u}$.
- A tout point $A \in \mathcal{E}$ et tout couples de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$,
 $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$ (La façon dont on combine les vecteurs pour se déplacer ne dépend pas du point de départ).

On déduit de ces trois axiomes, la fameuse relation de **Chasles** :

3. Structure de l'espace affine $\mathcal{E}$ de direction $\vec{\mathcal{E}}$.



Définition:

On dit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ non vide de points est un **espace affine** de dimension n s'il existe un espace vectoriel de dimension n , noté $\vec{\mathcal{E}}$, tel que :

- A tout couple de points $(A, B) \in \mathcal{E}^2$, il existe un **unique** vecteur de $\vec{\mathcal{E}}$ que l'on note $\overrightarrow{AB}$.
- A tout point $A \in \mathcal{E}$ et tout vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$, il existe un **unique** point B de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, le point B est noté $A + \vec{u}$.
- A tout point $A \in \mathcal{E}$ et tout couples de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$,
 $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$ (La façon dont on combine les vecteurs pour se déplacer ne dépend pas du point de départ).

On déduit de ces trois axiomes, la fameuse relation de **Chasles** :

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$$

3. Structure de l'espace affine $\mathcal{E}$ de direction $\vec{\mathcal{E}}$.



Définition:

On dit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ non vide de points est un **espace affine** de dimension n s'il existe un espace vectoriel de dimension n , noté $\vec{\mathcal{E}}$, tel que :

- A tout couple de points $(A, B) \in \mathcal{E}^2$, il existe un **unique** vecteur de $\vec{\mathcal{E}}$ que l'on note $\overrightarrow{AB}$.
- A tout point $A \in \mathcal{E}$ et tout vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$, il existe un **unique** point B de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, le point B est noté $A + \vec{u}$.
- A tout point $A \in \mathcal{E}$ et tout couples de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$,
 $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$ (La façon dont on combine les vecteurs pour se déplacer ne dépend pas du point de départ).

On déduit de ces trois axiomes, la fameuse relation de **Chasles** :

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Munissons, l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ d'une base $\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Munissons, l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ d'une base $\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Etant donnée un point O , à tout point M de $\mathcal{E}$, on peut associer un unique vecteur $\overrightarrow{OM}$ qui a un unique n-uplets de coordonnées dans la base β :

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Munissons, l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ d'une base $\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Etant donnée un point O , à tout point M de $\mathcal{E}$, on peut associer un unique vecteur $\overrightarrow{ME}$ qui a un unique n-uplets de coordonnées dans la base β :



Définition:

- $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est appelé un **repère** de l'espace affine.
- Le point O est appelé l'**origine** du repère.

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Munissons, l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ d'une base $\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Etant donnée un point O , à tout point M de $\mathcal{E}$, on peut associer un unique vecteur $\overrightarrow{OM}$ qui a un unique n-uplets de coordonnées dans la base β :



Définition:

- $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est appelé un **repère** de l'espace affine.
- Le point O est appelé l'**origine** du repère.
- les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{OA}$ dans la base β sont appelées les coordonnées du point A dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Munissons, l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ d'une base $\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Etant donnée un point O , à tout point M de $\mathcal{E}$, on peut associer un unique vecteur $\overrightarrow{OM}$ qui a un unique n-uplets de coordonnées dans la base β :

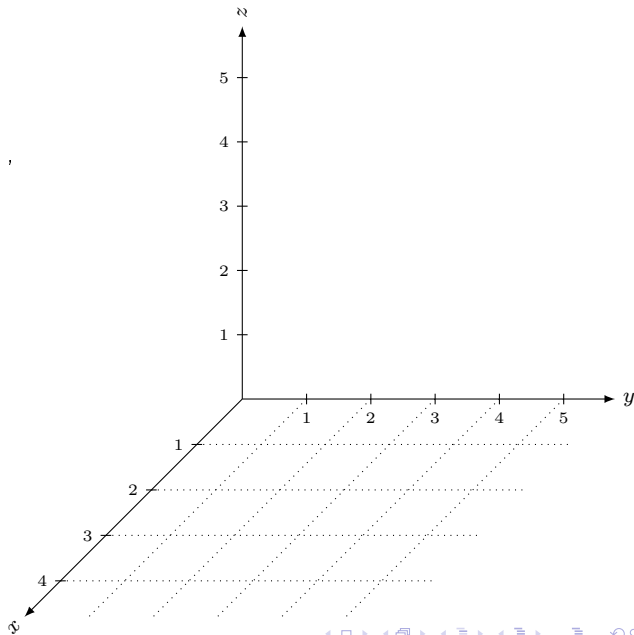


Définition:

- $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est appelé un **repère** de l'espace affine.
- Le point O est appelé l'**origine** du repère.
- les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{OA}$ dans la base β sont appelées les coordonnées du point A dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.
- Le choix d'un origine O a permis de **vectorialiser** l'espace affine $\mathcal{E}$.

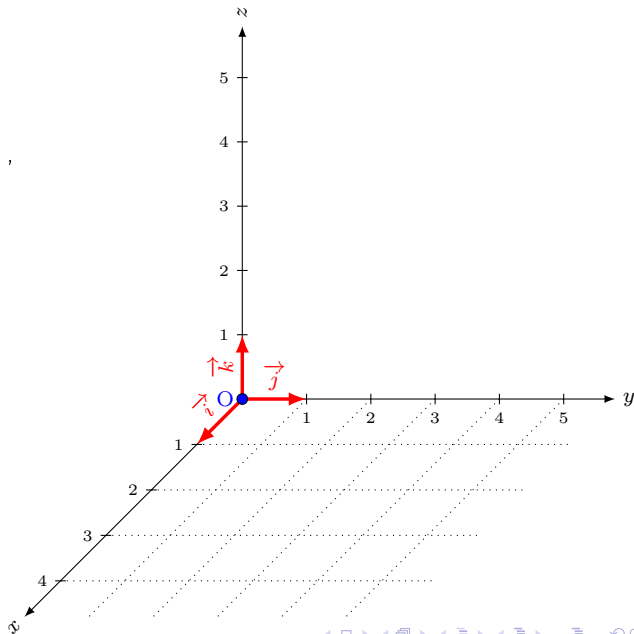
Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :



Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

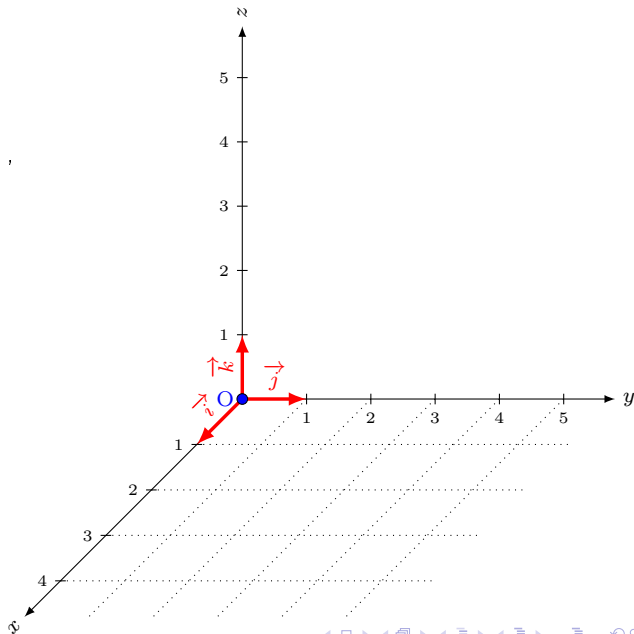


I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

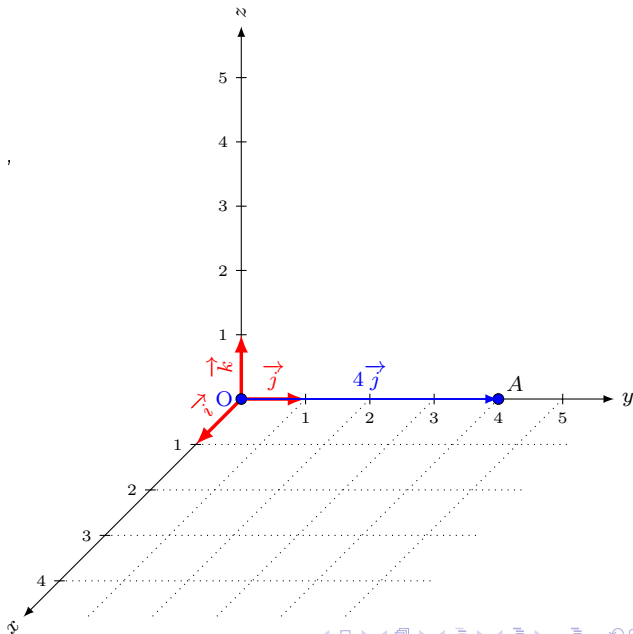


I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

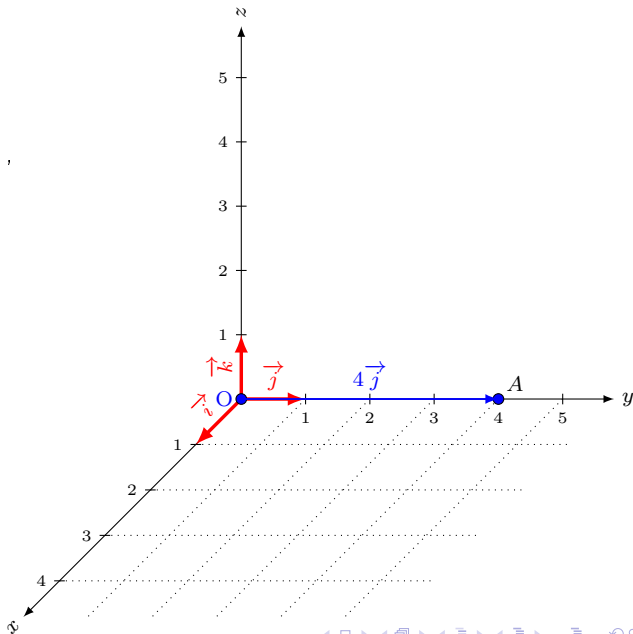


I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

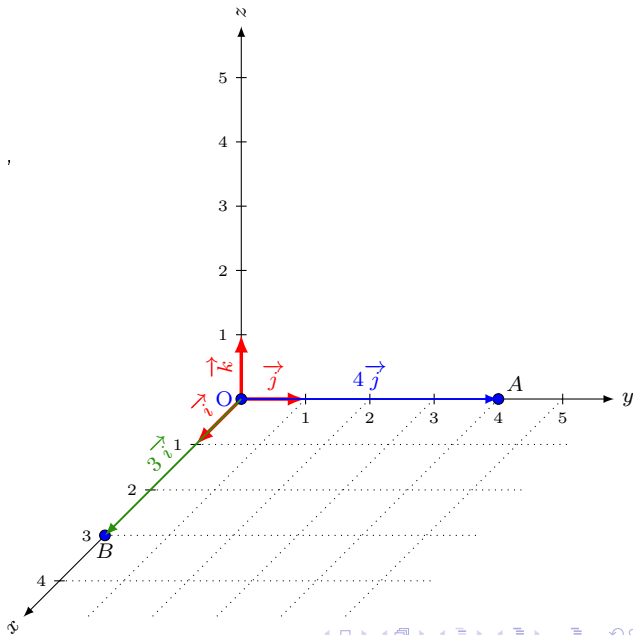


I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

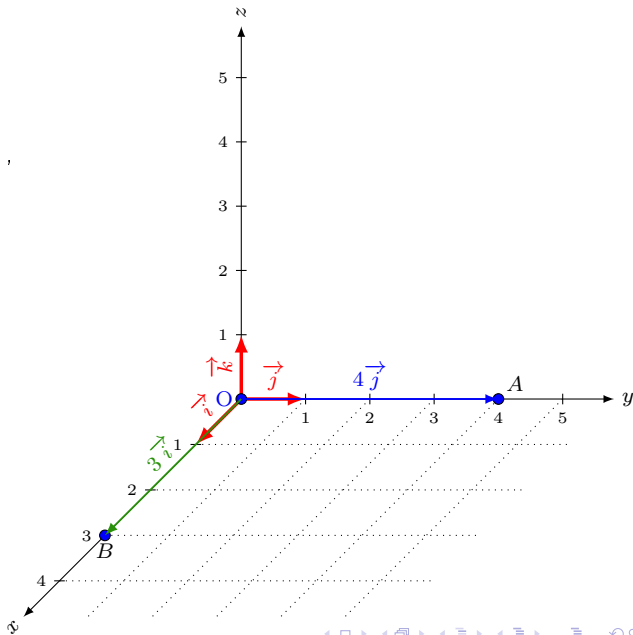


I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

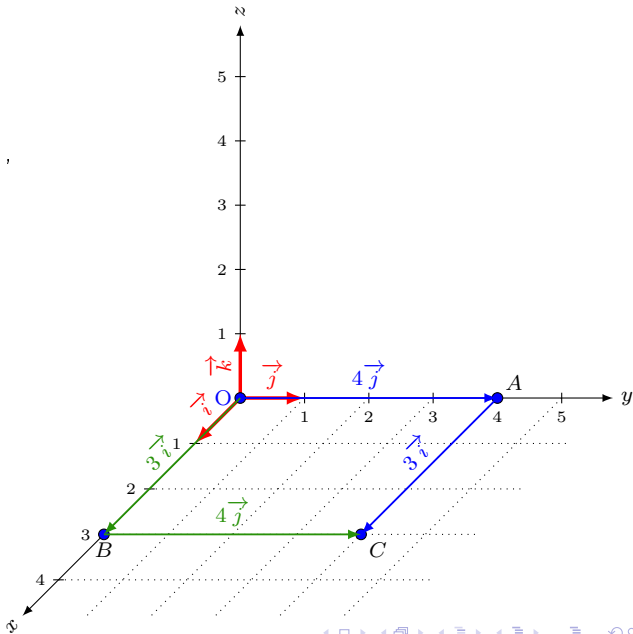


I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$



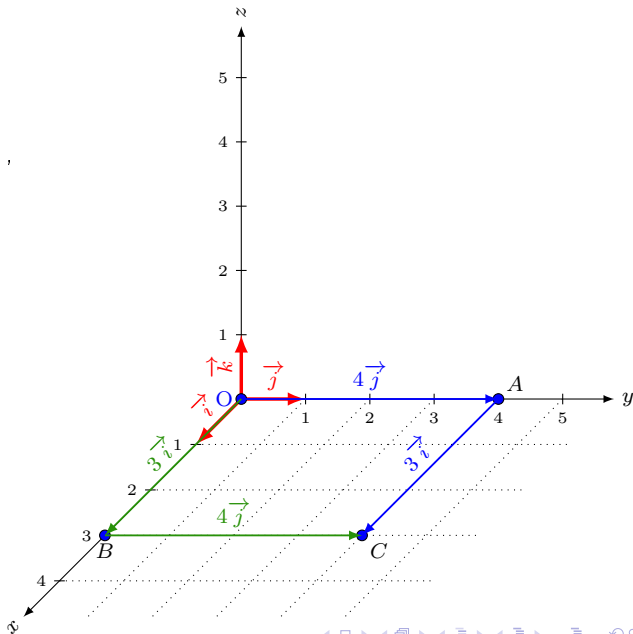
I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$



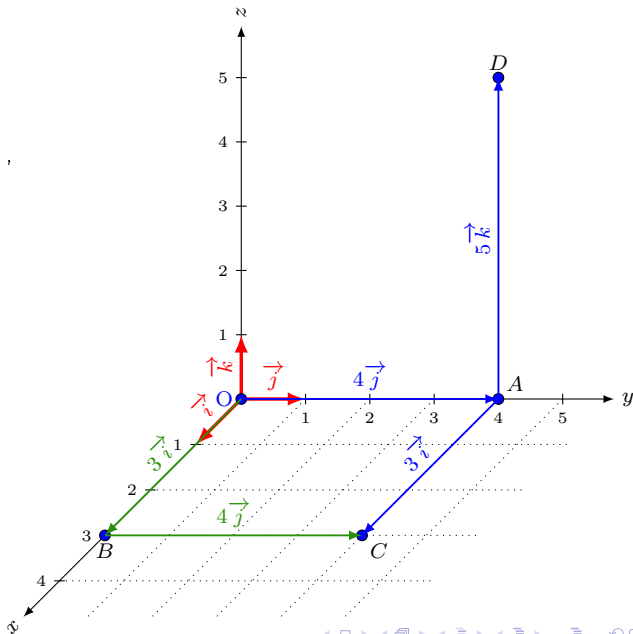
I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$



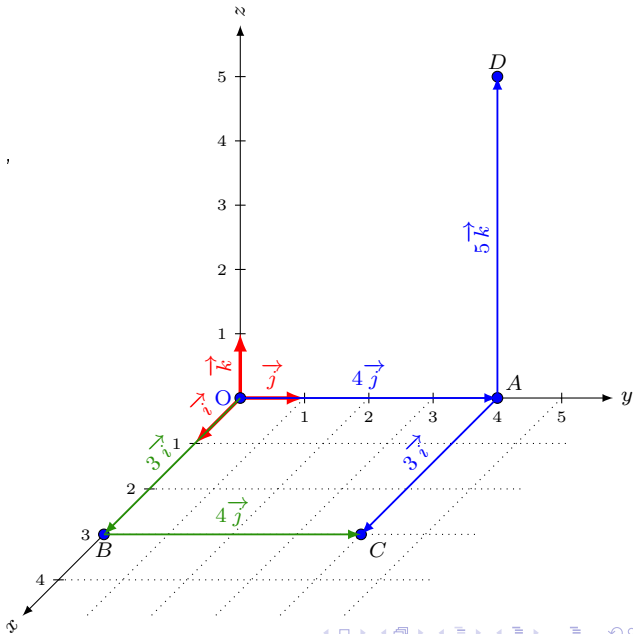
I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$



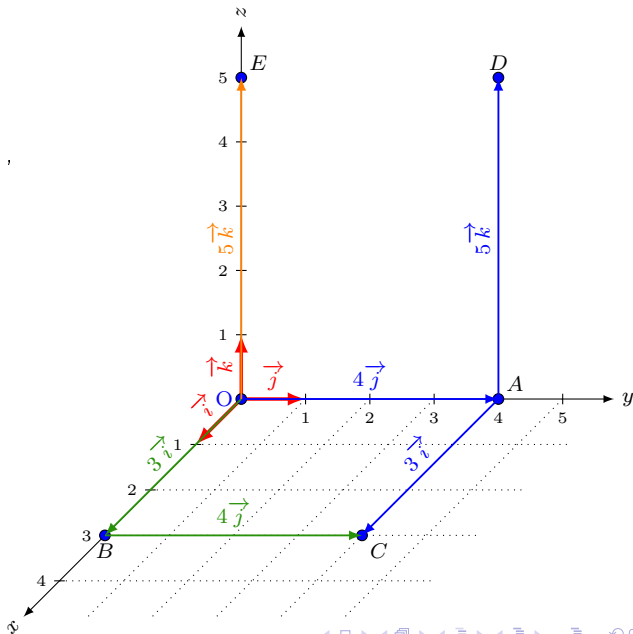
I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$



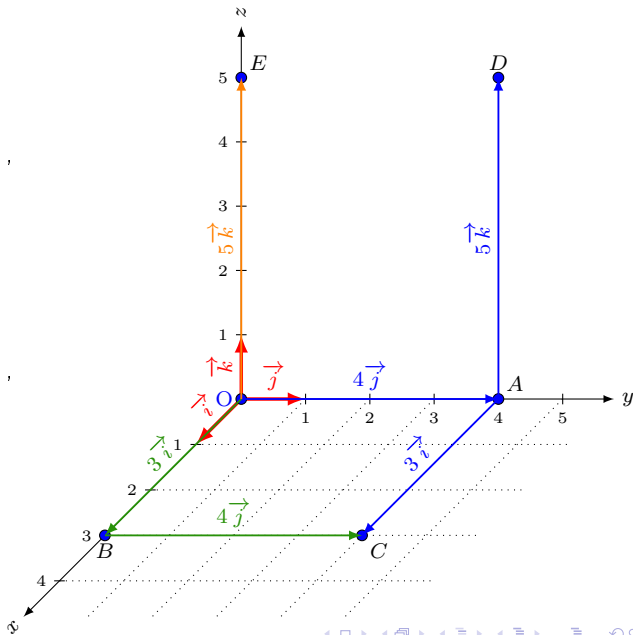
I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$



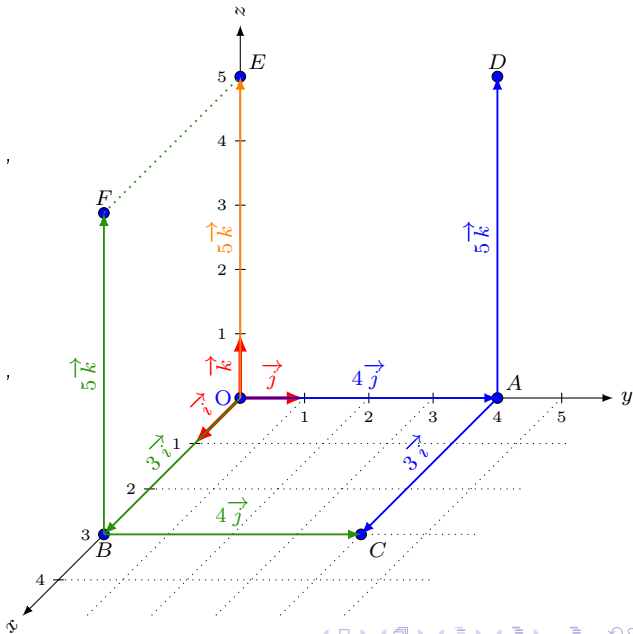
I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$



I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

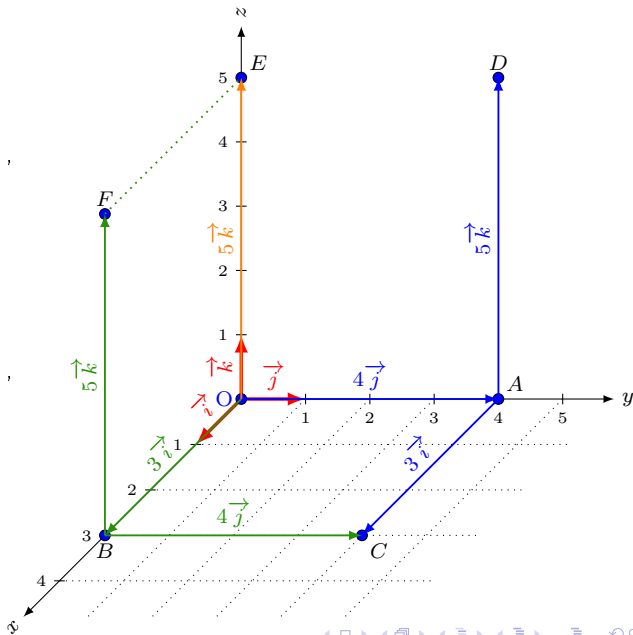
Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } G \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$



I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

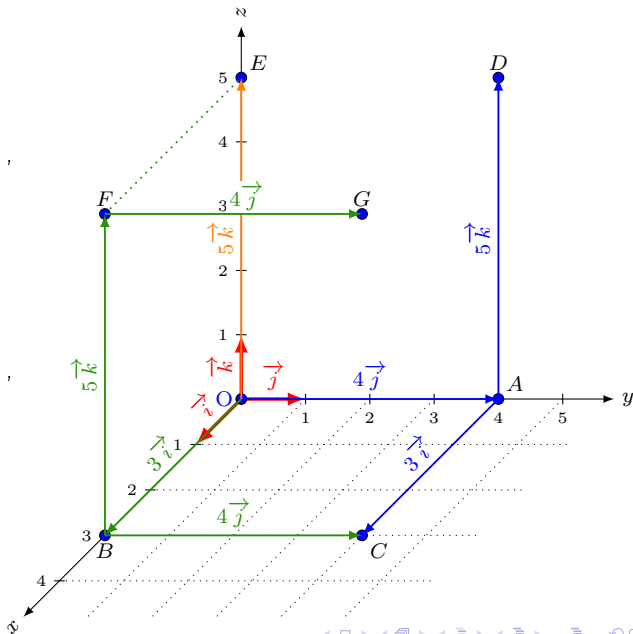
Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } G \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$



I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

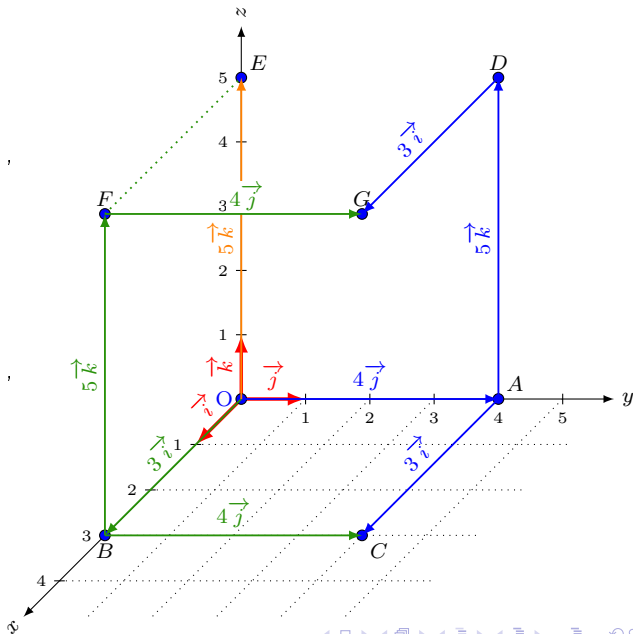
Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } G \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$



I. Des espaces vectoriels aux espaces affines.

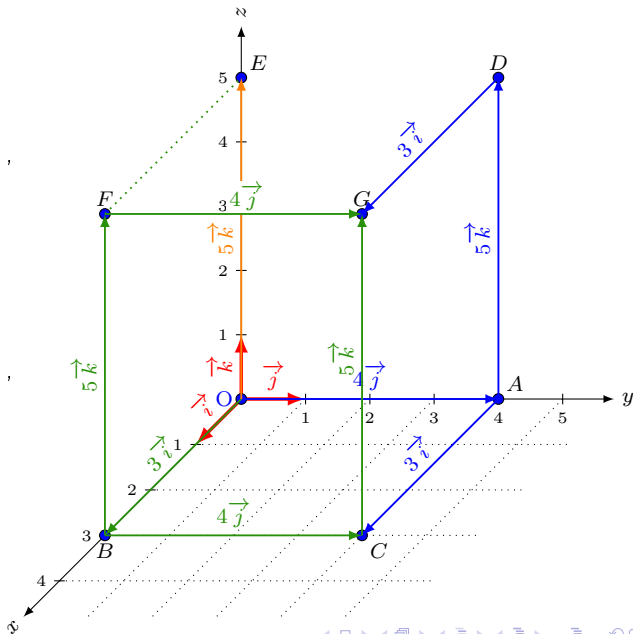
Exemple n° 3 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
place les points suivants :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } G \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$





Propriété:

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.



Propriété:

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. L'ensemble des vecteurs $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ solutions de l'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \mathbf{0}$



Propriété:

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. L'ensemble des vecteurs $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ solutions de l'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \mathbf{0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Exemple n° 4 : Dans $\mathbb{R}^2$, étudions les solutions de l'équation $x + 2y = 0$. Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Exemple n° 4 : Dans $\mathbb{R}^2$, étudions les solutions de l'équation $x + 2y = 0$. Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

$$x + 2y = 0 \iff x = -2y \iff (x, y) = (-2y, y) = y \times (\dots, \dots) \text{ donc } \vec{F} =$$

II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Exemple n° 4 : Dans $\mathbb{R}^2$, étudions les solutions de l'équation $x + 2y = 0$. Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

$$x + 2y = 0 \iff x = -2y \iff (x, y) = (-2y, y) = y \times (-2, \dots) \text{ donc } \vec{F} =$$

II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Exemple n° 4 : Dans $\mathbb{R}^2$, étudions les solutions de l'équation $x + 2y = 0$. Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

$$x + 2y = 0 \iff x = -2y \iff (x, y) = (-2y, y) = y \times (-2, 1) \text{ donc } \vec{F} =$$

II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Exemple n° 4 : Dans $\mathbb{R}^2$, étudions les solutions de l'équation $x + 2y = 0$. Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

$$x + 2y = 0 \iff x = -2y \iff (x, y) = (-2y, y) = y \times (-2, 1) \text{ donc } \vec{F} = \mathbb{R}(-2, 1)$$

II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Exemple n° 4 : Dans $\mathbb{R}^2$, étudions les solutions de l'équation $x + 2y = 0$. Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

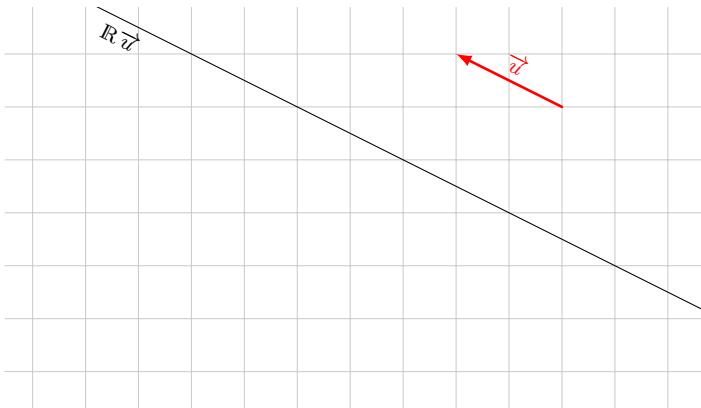
$$x + 2y = 0 \iff x = -2y \iff (x, y) = (-2y, y) = y \times (-2, 1) \text{ donc } \vec{F} = \mathbb{R}(-2, 1)$$



II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Exemple n° 4 : Dans $\mathbb{R}^2$, étudions les solutions de l'équation $x + 2y = 0$. Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

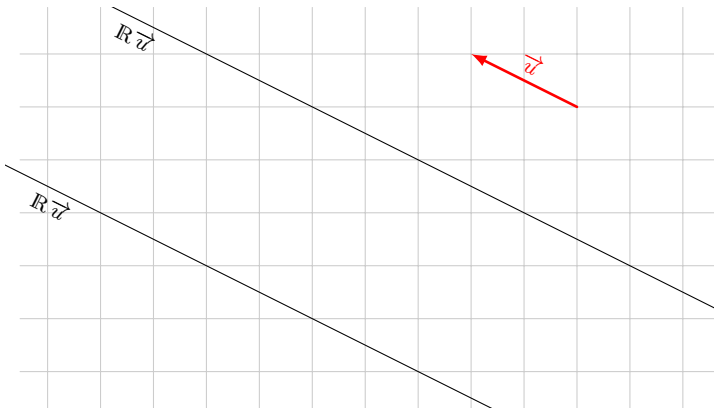
$$x + 2y = 0 \iff x = -2y \iff (x, y) = (-2y, y) = y \times (-2, 1) \text{ donc } \vec{F} = \mathbb{R}(-2, 1)$$



II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Exemple n° 4 : Dans $\mathbb{R}^2$, étudions les solutions de l'équation $x + 2y = 0$. Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

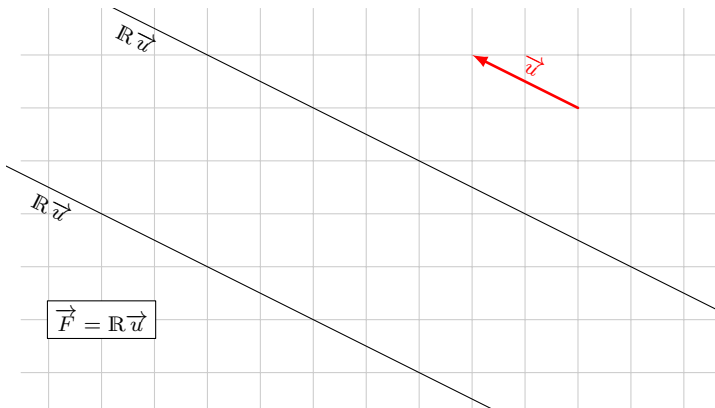
$$x + 2y = 0 \iff x = -2y \iff (x, y) = (-2y, y) = y \times (-2, 1) \text{ donc } \vec{F} = \mathbb{R}(-2, 1)$$



II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Exemple n° 4 : Dans $\mathbb{R}^2$, étudions les solutions de l'équation $x + 2y = 0$. Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

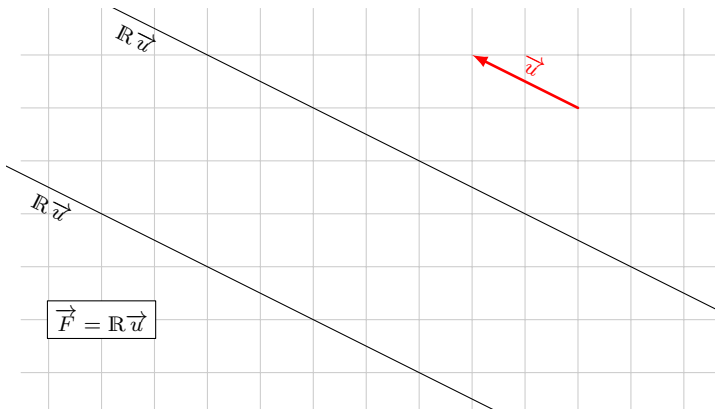
$$x + 2y = 0 \iff x = -2y \iff (x, y) = (-2y, y) = y \times (-2, 1) \text{ donc } \vec{F} = \mathbb{R}(-2, 1)$$



II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Exemple n° 4 : Dans $\mathbb{R}^2$, étudions les solutions de l'équation $x + 2y = 0$. Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

$$x + 2y = 0 \iff x = -2y \iff (x, y) = (-2y, y) = y \times (-2, 1) \text{ donc } \vec{F} = \mathbb{R}(-2, 1)$$



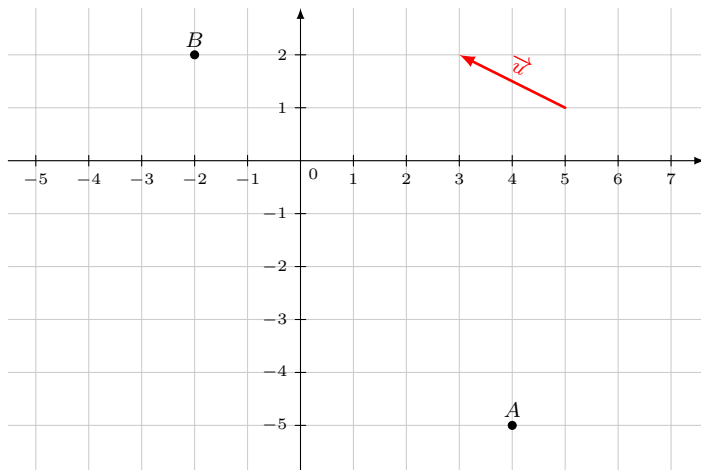
Ainsi, $\vec{F}$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par le vecteur $\vec{u} = (-2, 1)$. $\vec{F}$ est la **droite vectorielle** dirigée par $\vec{u}$.

II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Complément : En géométrie affine, considérons les deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E})$ suivantes :

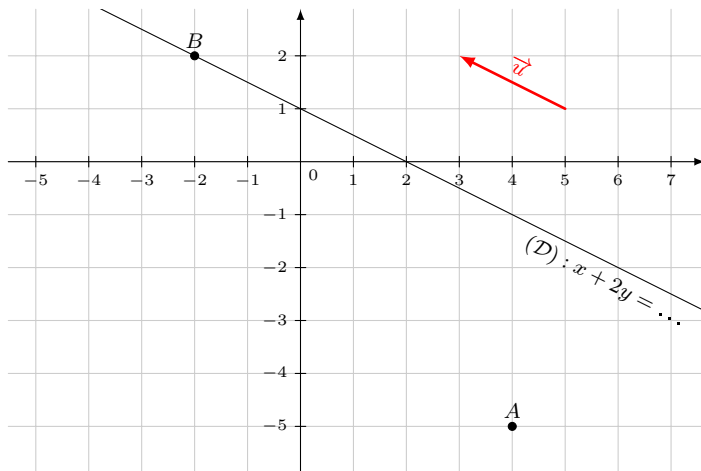
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Complément : En géométrie affine, considérons les deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E})$ suivantes :



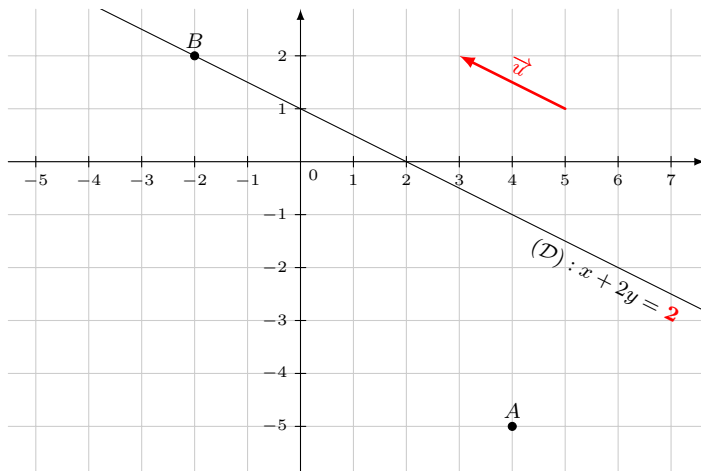
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Complément : En géométrie affine, considérons les deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E})$ suivantes :



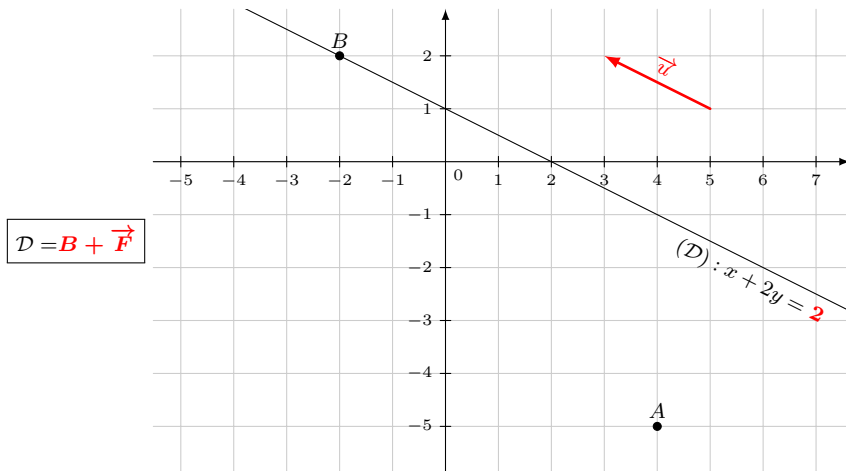
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Complément : En géométrie affine, considérons les deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E})$ suivantes :



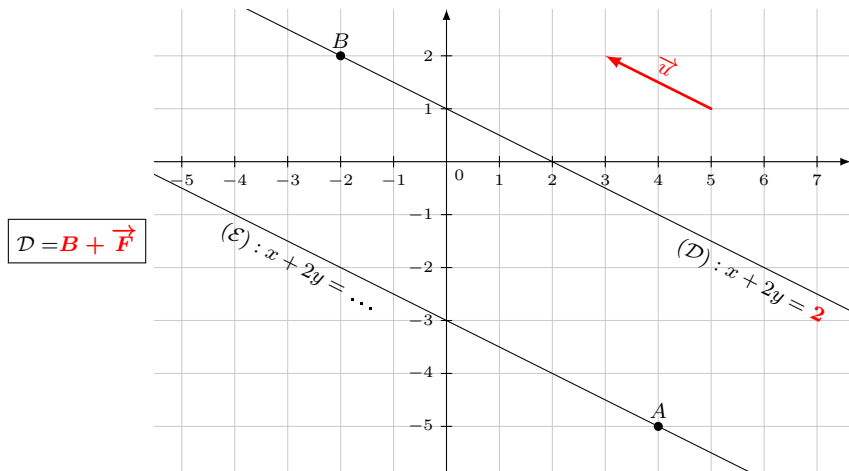
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Complément : En géométrie affine, considérons les deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E})$ suivantes :



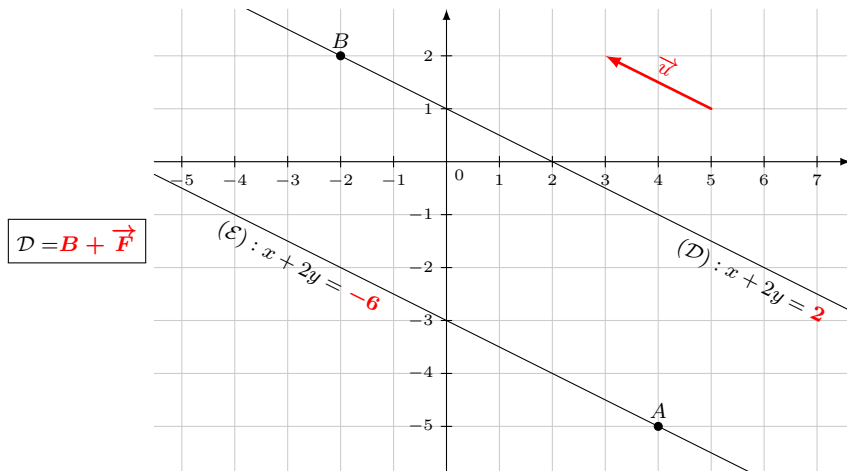
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Complément : En géométrie affine, considérons les deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E})$ suivantes :



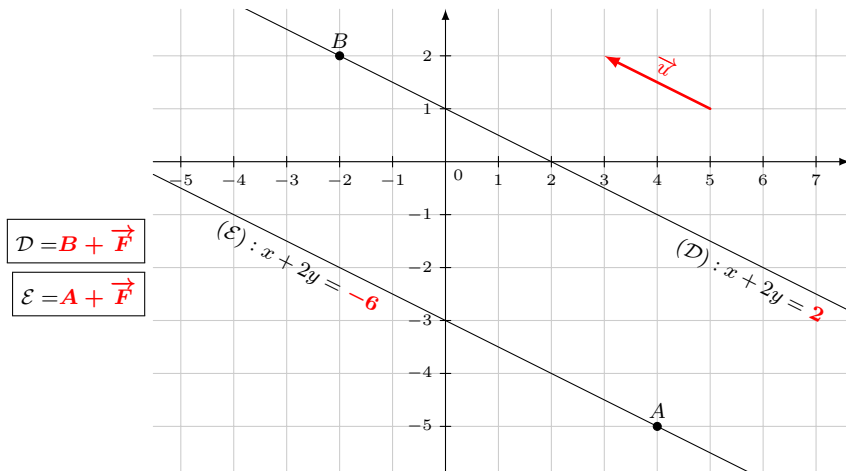
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Complément : En géométrie affine, considérons les deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E})$ suivantes :



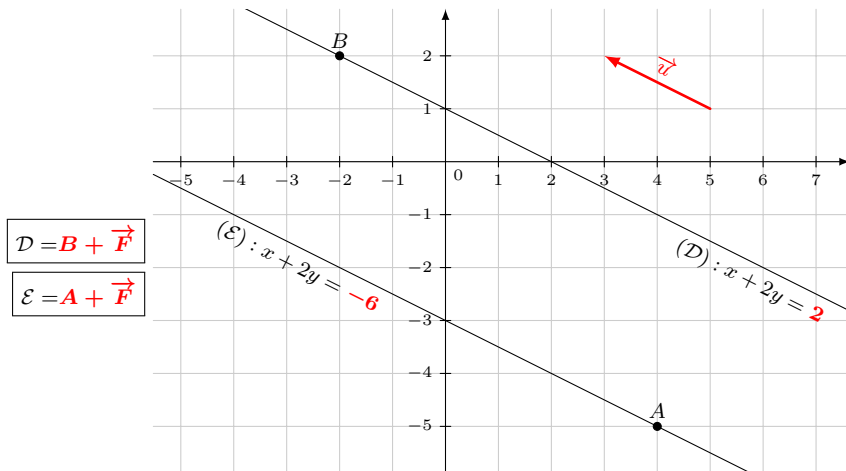
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Complément : En géométrie affine, considérons les deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E})$ suivantes :



II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

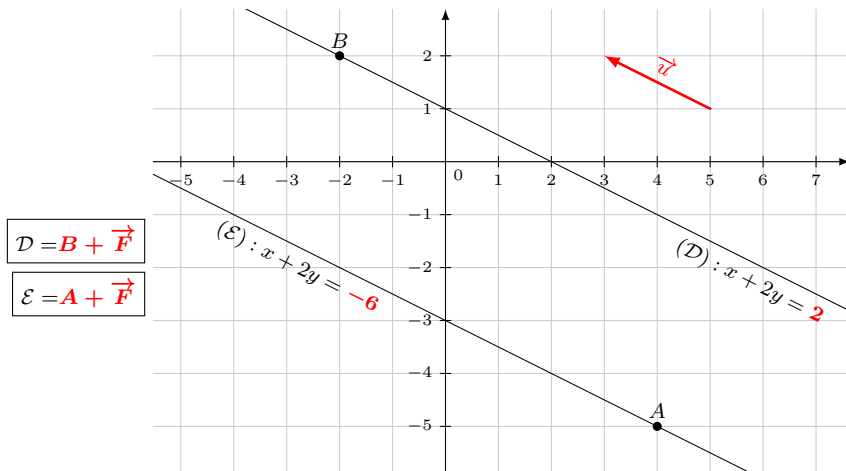
Complément : En géométrie affine, considérons les deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E})$ suivantes :



Les solutions des deux équations $x + 2y = 2$ et $x + 2y = -6$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

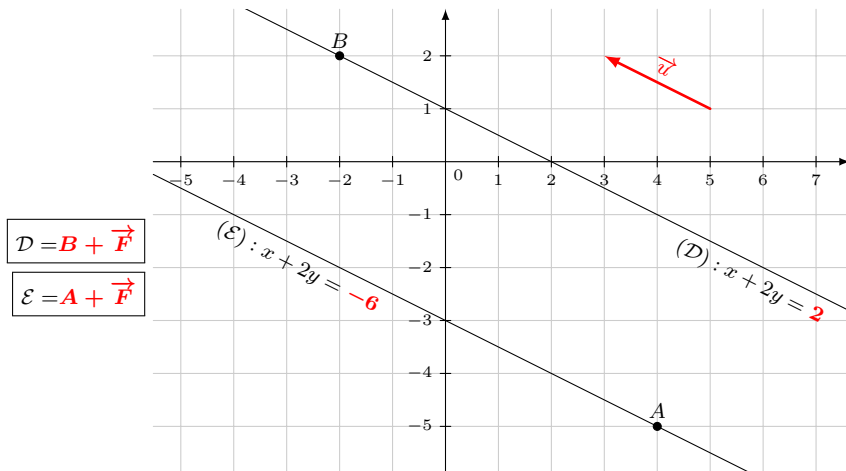
Complément : En géométrie affine, considérons les deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E})$ suivantes :



Les solutions des deux équations $x + 2y = 2$ et $x + 2y = -6$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. L'espace vectoriel associé à ces deux droites est $\mathbb{R}\vec{u}$

II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

Complément : En géométrie affine, considérons les deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E})$ suivantes :



Les solutions des deux équations $x + 2y = 2$ et $x + 2y = -6$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. L'espace vectoriel associé à ces deux droites est $\mathbb{R}\vec{u}$ qui est solution de $x + 2y = 0$.

Exemple n° 5 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions de l'équation $x - 2z = 0$.

Exemple n° 5 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions de l'équation $x - 2z = 0$. On est dans $\mathbb{R}^3$, donc cette équation à trois inconnues :

Exemple n° 5 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions de l'équation $x - 2z = 0$. On est dans $\mathbb{R}^3$, donc cette équation à trois inconnues : **x , y , et z** .

Exemple n° 5 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions de l'équation $x - 2z = 0$. On est dans $\mathbb{R}^3$, donc cette équation à trois inconnues : x , y , et z . Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

Exemple n° 5 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions de l'équation $x - 2z = 0$. On est dans $\mathbb{R}^3$, donc cette équation à trois inconnues : x , y , et z . Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

$$x - 2z = 0 \iff x = 2z$$

Exemple n° 5 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions de l'équation $x - 2z = 0$. On est dans $\mathbb{R}^3$, donc cette équation à trois inconnues : x , y , et z . Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

$$\begin{aligned}x - 2z = 0 &\iff x = 2z \\ &\iff x = 0y + 2z\end{aligned}$$

Exemple n° 5 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions de l'équation $x - 2z = 0$. On est dans $\mathbb{R}^3$, donc cette équation à trois inconnues : x , y , et z . Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

$$\begin{aligned}x - 2z = 0 &\iff x = 2z \\&\iff x = 0y + 2z \\&\quad (y \text{ et } z \text{ sont libres})\end{aligned}$$

Exemple n° 5 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions de l'équation $x - 2z = 0$. On est dans $\mathbb{R}^3$, donc cette équation à trois inconnues : x , y , et z . Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

$$\begin{aligned}x - 2z = 0 &\iff x = 2z \\&\iff x = 0y + 2z \\&\quad (y \text{ et } z \text{ sont libres})\end{aligned}$$

$$\vec{p} \in \vec{F} \iff$$

Exemple n° 5 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions de l'équation $x - 2z = 0$. On est dans $\mathbb{R}^3$, donc cette équation à trois inconnues : **x , y , et z** . Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

$$\begin{aligned}x - 2z = 0 &\iff x = 2z \\&\iff x = 0y + 2z \\&\quad (y \text{ et } z \text{ sont libres})\end{aligned}$$

$$\vec{p} \in \vec{F} \iff \vec{p} = \begin{pmatrix} 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions de l'équation $x - 2z = 0$. On est dans $\mathbb{R}^3$, donc cette équation à trois inconnues : **x , y , et z** . Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

$$\begin{aligned}x - 2z = 0 &\iff x = 2z \\&\iff x = 0y + 2z \\&\quad (y \text{ et } z \text{ sont libres})\end{aligned}$$

$$\vec{p} \in \vec{F} \iff \vec{p} = \begin{pmatrix} 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} +$$

Exemple n° 5 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions de l'équation $x - 2z = 0$. On est dans $\mathbb{R}^3$, donc cette équation à trois inconnues : **x , y , et z** . Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

$$\begin{aligned}x - 2z = 0 &\iff x = 2z \\&\iff x = 0y + 2z \\&\quad (y \text{ et } z \text{ sont libres})\end{aligned}$$

$$\vec{p} \in \vec{F} \iff \vec{p} = \begin{pmatrix} 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

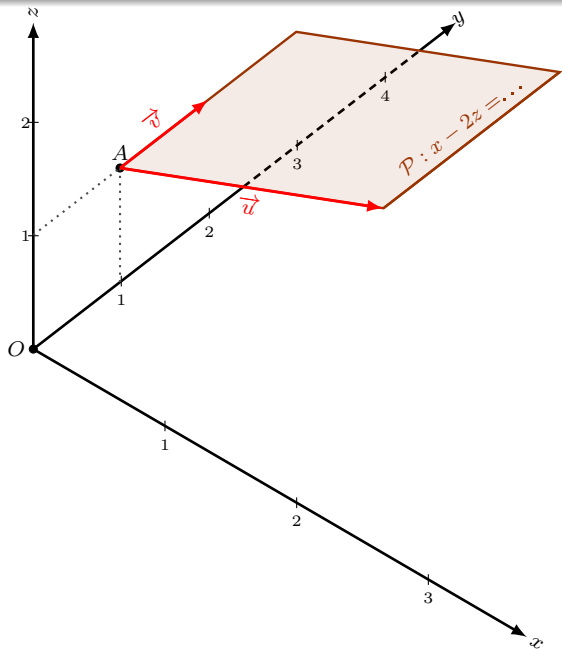
Exemple n° 5 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions de l'équation $x - 2z = 0$. On est dans $\mathbb{R}^3$, donc cette équation à trois inconnues : **x , y , et z** . Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de cette équation.

$$\begin{aligned}x - 2z = 0 &\iff x = 2z \\&\iff x = 0y + 2z \\&\quad (y \text{ et } z \text{ sont libres})\end{aligned}$$

$$\vec{p} \in \vec{F} \iff \vec{p} = \begin{pmatrix} 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

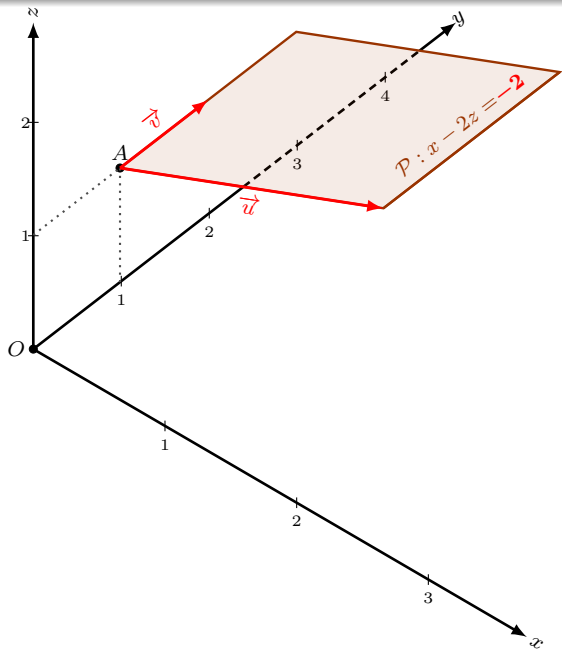
$$\text{Ainsi, } \vec{F} = \mathbb{R} \vec{u} + \mathbb{R} \vec{v}$$

II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



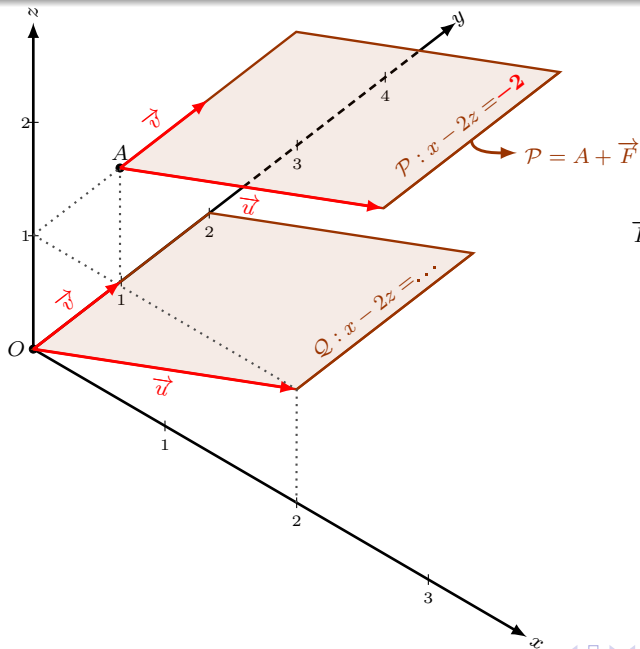
$$\vec{F} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \mathbb{R} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \mathbb{R}$$

II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



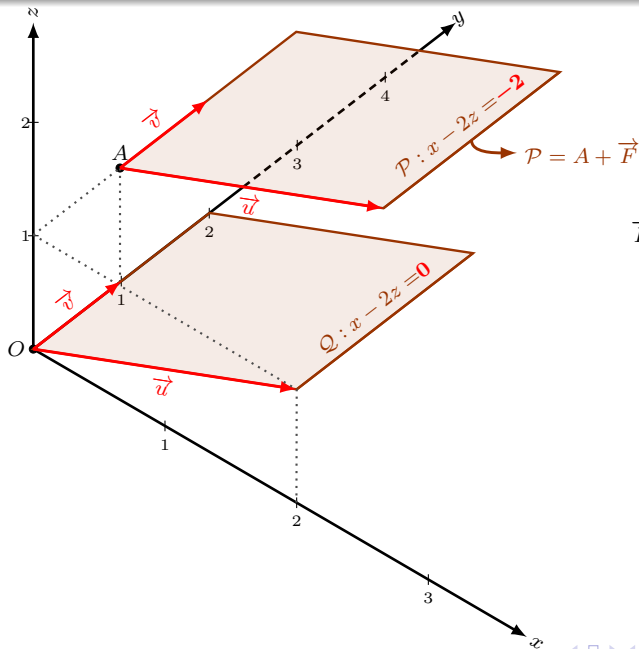
$$\vec{F} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \mathbb{R} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \mathbb{R}$$

II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



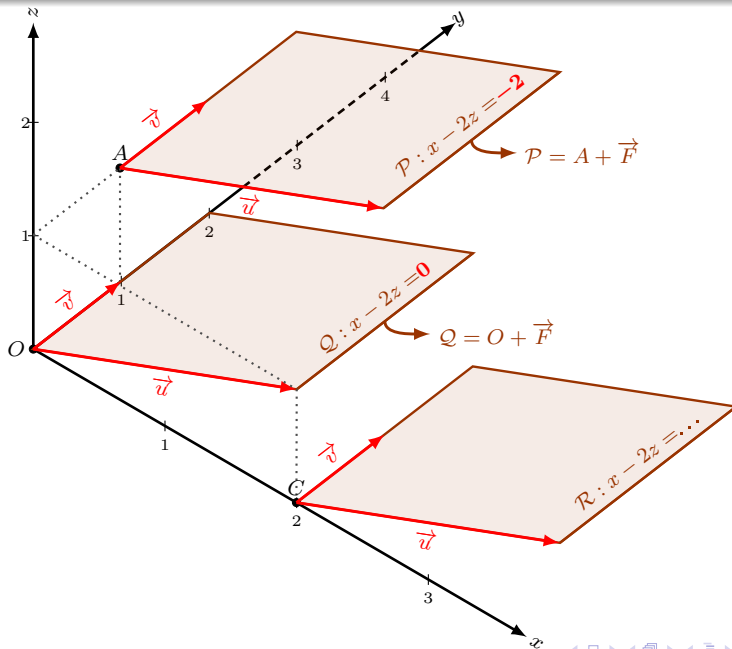
$$\vec{F} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \mathbb{R} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \mathbb{R}$$

II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires

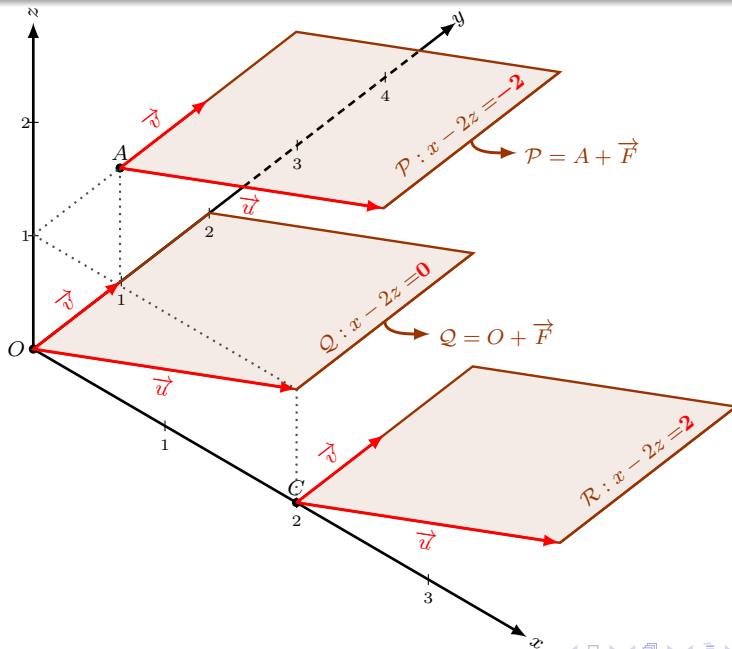


$$\vec{F} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \mathbb{R} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \mathbb{R}$$

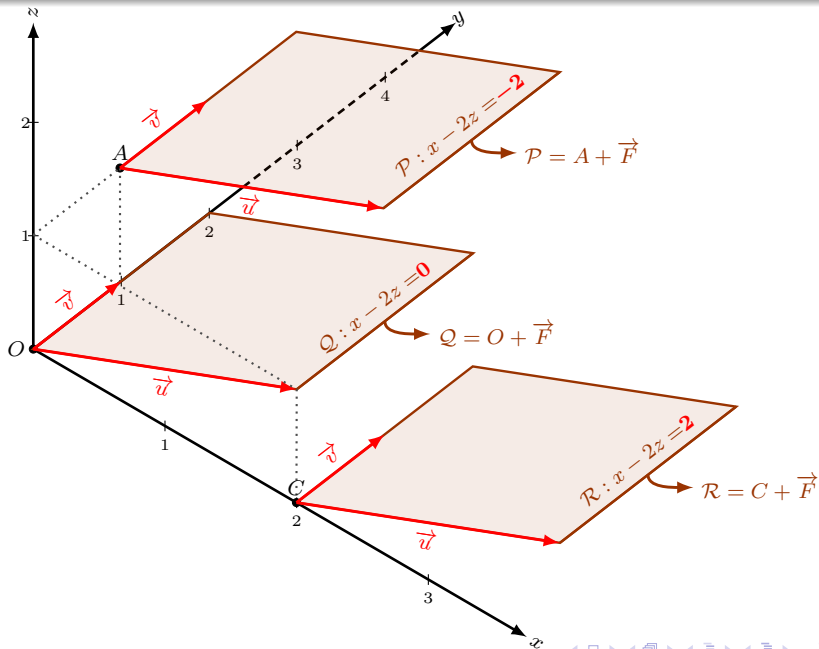
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



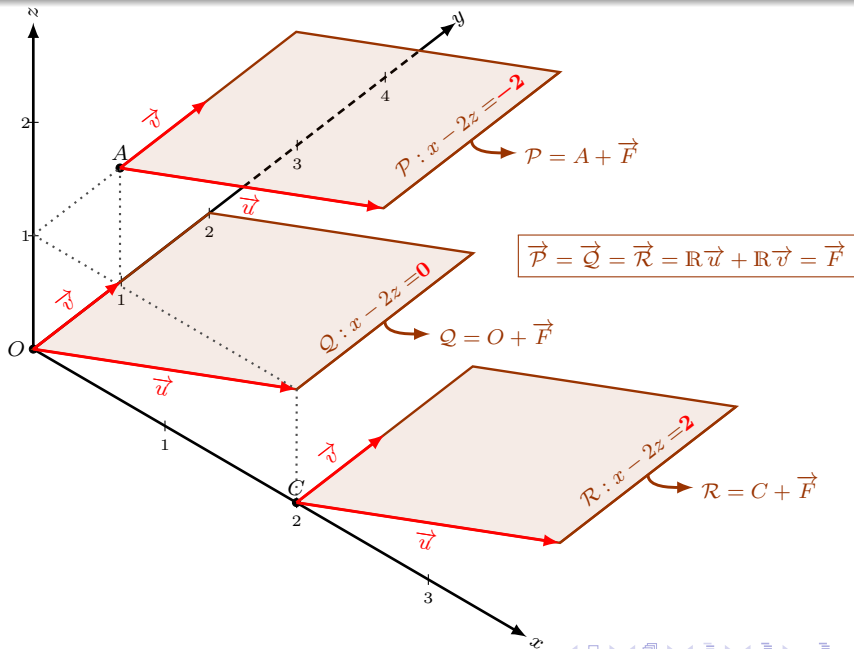
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires





Propriété:

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\vec{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.



Propriété:

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\vec{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.



Démonstration

Notons $\vec{F}$ et $\vec{G}$ ses deux sous-espaces vectoriels, et $\vec{H} = \vec{F} \cap \vec{G}$ leur intersection.



Propriété:

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\vec{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.



Démonstration

Notons $\vec{F}$ et $\vec{G}$ ses deux sous-espaces vectoriels, et $\vec{H} = \vec{F} \cap \vec{G}$ leur intersection.

Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{H}$ et $a\vec{u} + b\vec{v}$ une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Propriété:

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\vec{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.



Démonstration

Notons $\vec{F}$ et $\vec{G}$ ses deux sous-espaces vectoriels, et $\vec{H} = \vec{F} \cap \vec{G}$ leur intersection.

Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{H}$ et $a\vec{u} + b\vec{v}$ une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il suffit de démontrer que $a\vec{u} + b\vec{v} \in \vec{H}$:



Propriété:

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\vec{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.



Démonstration

Notons $\vec{F}$ et $\vec{G}$ ses deux sous-espaces vectoriels, et $\vec{H} = \vec{F} \cap \vec{G}$ leur intersection.

Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{H}$ et $a\vec{u} + b\vec{v}$ une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il suffit de démontrer que $a\vec{u} + b\vec{v} \in \vec{H}$:

- $\vec{F}$ est un espace vectoriel, $\vec{u} \in \vec{F}$, et $\vec{v} \in \vec{F}$ donc $a\vec{u} + b\vec{v} \in \vec{F}$;



Propriété:

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\vec{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.



Démonstration

Notons $\vec{F}$ et $\vec{G}$ ses deux sous-espaces vectoriels, et $\vec{H} = \vec{F} \cap \vec{G}$ leur intersection.

Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{H}$ et $a\vec{u} + b\vec{v}$ une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il suffit de démontrer que $a\vec{u} + b\vec{v} \in \vec{H}$:

- $\vec{F}$ est un espace vectoriel, $\vec{u} \in \vec{F}$, et $\vec{v} \in \vec{F}$ donc $a\vec{u} + b\vec{v} \in \vec{F}$;
- $\vec{G}$ est un espace vectoriel, $\vec{u} \in \vec{G}$, et $\vec{v} \in \vec{G}$ donc $a\vec{u} + b\vec{v} \in \vec{G}$;



Propriété:

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\vec{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.



Démonstration

Notons $\vec{F}$ et $\vec{G}$ ses deux sous-espaces vectoriels, et $\vec{H} = \vec{F} \cap \vec{G}$ leur intersection.

Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{H}$ et $a\vec{u} + b\vec{v}$ une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il suffit de démontrer que $a\vec{u} + b\vec{v} \in \vec{H}$:

- $\vec{F}$ est un espace vectoriel, $\vec{u} \in \vec{F}$, et $\vec{v} \in \vec{F}$ donc $a\vec{u} + b\vec{v} \in \vec{F}$;
- $\vec{G}$ est un espace vectoriel, $\vec{u} \in \vec{G}$, et $\vec{v} \in \vec{G}$ donc $a\vec{u} + b\vec{v} \in \vec{G}$;

Donc, $a\vec{u} + b\vec{v} \in (\vec{F} \cap \vec{G}) = \vec{H}$

Exemple n° 6 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions du système

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Exemple n° 6 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions du système

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de ce système, $\vec{P}$ celui des vecteurs solutions de $2x - y + 2z = 0$, et $\vec{Q}$ celui de $-6x + 3y + 2z = 0$.

Exemple n° 6 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions du système

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de ce système, $\vec{P}$ celui des vecteurs solutions de $2x - y + 2z = 0$, et $\vec{Q}$ celui de $-6x + 3y + 2z = 0$.

On a : $\vec{F} =$

Exemple n° 6 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions du système

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de ce système, $\vec{P}$ celui des vecteurs solutions de $2x - y + 2z = 0$, et $\vec{Q}$ celui de $-6x + 3y + 2z = 0$.

On a : $\vec{F} = \vec{P} \cap \vec{Q}$

Exemple n° 6 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions du système

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de ce système, $\vec{P}$ celui des vecteurs solutions de $2x - y + 2z = 0$, et $\vec{Q}$ celui de $-6x + 3y + 2z = 0$.

On a : $\vec{F} = \vec{P} \cap \vec{Q}$, et $\vec{F}$ est un

Exemple n° 6 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions du système

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de ce système, $\vec{P}$ celui des vecteurs solutions de $2x - y + 2z = 0$, et $\vec{Q}$ celui de $-6x + 3y + 2z = 0$.

On a : $\vec{F} = \vec{P} \cap \vec{Q}$, et $\vec{F}$ est un **sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$** .

Exemple n° 6 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions du système

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de ce système, $\vec{P}$ celui des vecteurs solutions de $2x - y + 2z = 0$, et $\vec{Q}$ celui de $-6x + 3y + 2z = 0$.

On a : $\vec{F} = \vec{P} \cap \vec{Q}$, et $\vec{F}$ est un **sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$** .

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ = L_2 + 3L_1 \end{cases}$$

Exemple n° 6 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions du système

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de ce système, $\vec{P}$ celui des vecteurs solutions de $2x - y + 2z = 0$, et $\vec{Q}$ celui de $-6x + 3y + 2z = 0$.

On a : $\vec{F} = \vec{P} \cap \vec{Q}$, et $\vec{F}$ est un **sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$** .

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 8z = L_2 + 3L_1 \end{cases}$$

Exemple n° 6 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions du système

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de ce système, $\vec{P}$ celui des vecteurs solutions de $2x - y + 2z = 0$, et $\vec{Q}$ celui de $-6x + 3y + 2z = 0$.

On a : $\vec{F} = \vec{P} \cap \vec{Q}$, et $\vec{F}$ est un **sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$** .

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 8z = 0 \quad L_2 + 3L_1 \end{cases}$$

Exemple n° 6 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions du système

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de ce système, $\vec{P}$ celui des vecteurs solutions de $2x - y + 2z = 0$, et $\vec{Q}$ celui de $-6x + 3y + 2z = 0$.

On a : $\vec{F} = \vec{P} \cap \vec{Q}$, et $\vec{F}$ est un **sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$** .

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 8z = 0 \quad L_2 + 3L_1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Exemple n° 6 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions du système

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de ce système, $\vec{P}$ celui des vecteurs solutions de $2x - y + 2z = 0$, et $\vec{Q}$ celui de $-6x + 3y + 2z = 0$.

On a : $\vec{F} = \vec{P} \cap \vec{Q}$, et $\vec{F}$ est un **sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$** .

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 8z = 0 \quad L_2 + 3L_1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

Exemple n° 6 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions du système

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de ce système, $\vec{P}$ celui des vecteurs solutions de $2x - y + 2z = 0$, et $\vec{Q}$ celui de $-6x + 3y + 2z = 0$.

On a : $\vec{F} = \vec{P} \cap \vec{Q}$, et $\vec{F}$ est un **sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$** .

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 8z = 0 \quad L_2 + 3L_1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{p} \in \vec{F} \iff \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} = x$$

Exemple n° 6 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions du système

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de ce système, $\vec{P}$ celui des vecteurs solutions de $2x - y + 2z = 0$, et $\vec{Q}$ celui de $-6x + 3y + 2z = 0$.

On a : $\vec{F} = \vec{P} \cap \vec{Q}$, et $\vec{F}$ est un **sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$** .

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 8z = 0 \end{cases} \quad L_2 + 3L_1 \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{p} \in \vec{F} \iff \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$$

Exemple n° 6 : Dans $\mathbb{R}^3$, étudions les solutions du système

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Notons $\vec{F}$ l'ensemble des vecteurs solutions de ce système, $\vec{P}$ celui des vecteurs solutions de $2x - y + 2z = 0$, et $\vec{Q}$ celui de $-6x + 3y + 2z = 0$.

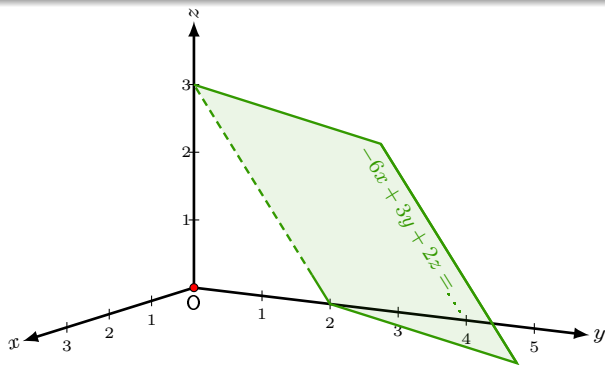
On a : $\vec{F} = \vec{P} \cap \vec{Q}$, et $\vec{F}$ est un **sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$** .

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 8z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 + 3L_1 \\ \end{matrix} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

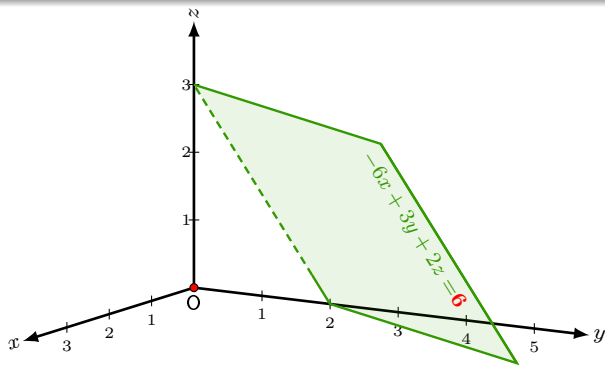
$$\vec{p} \in \vec{F} \iff \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$$

$$\text{Ainsi, } \vec{F} = \mathbb{R}\vec{u} = \vec{P} \cap \vec{Q}$$

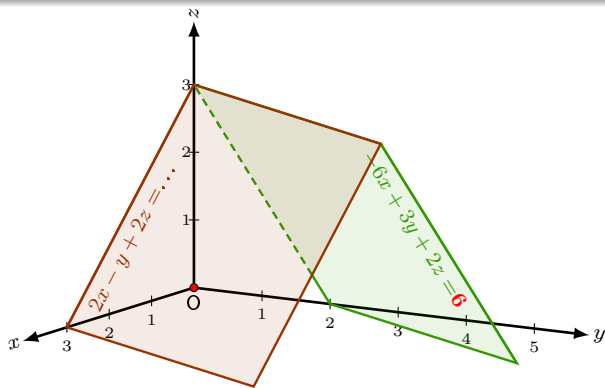
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



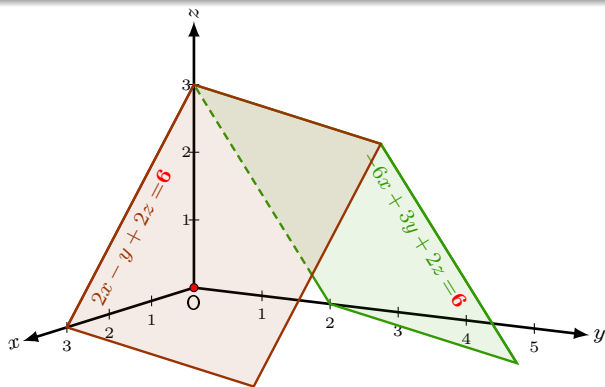
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



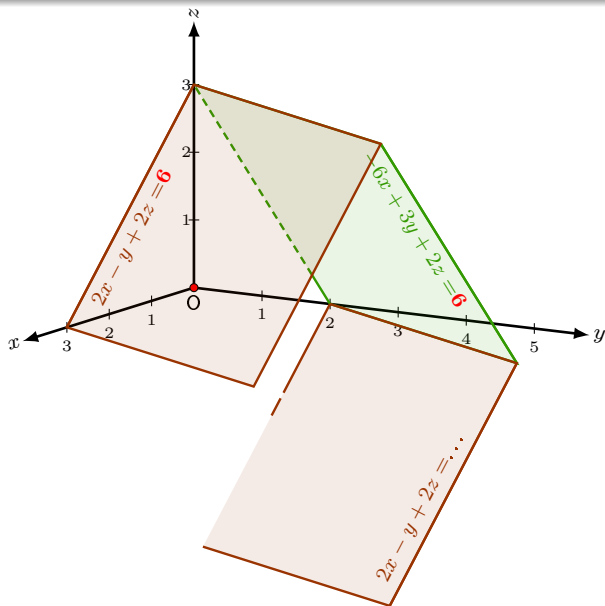
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



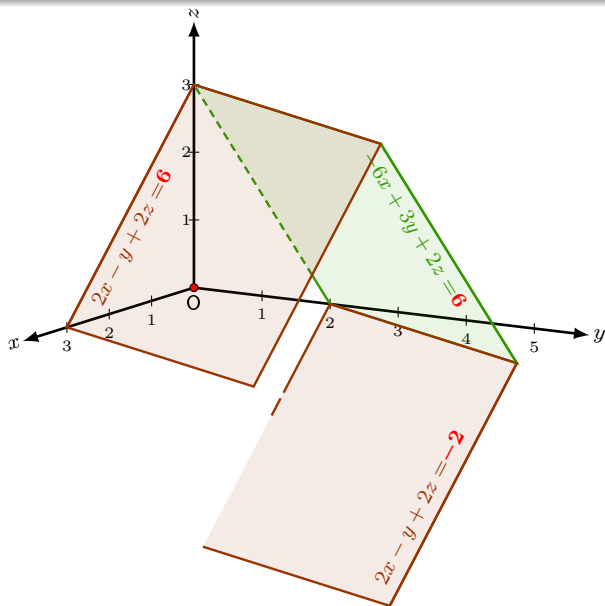
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



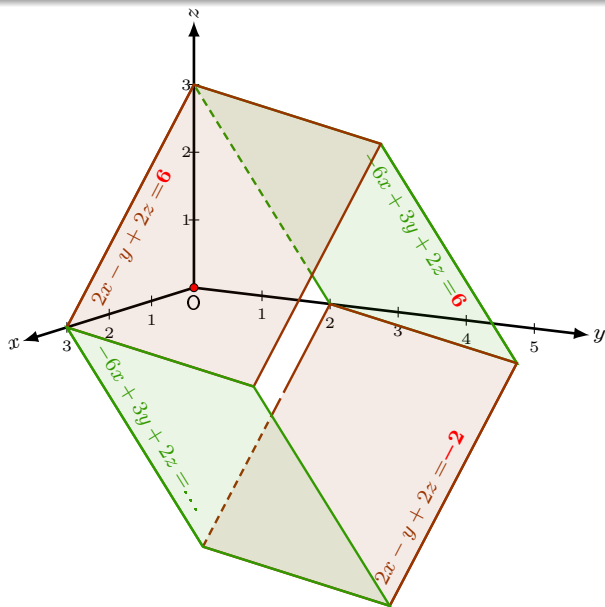
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



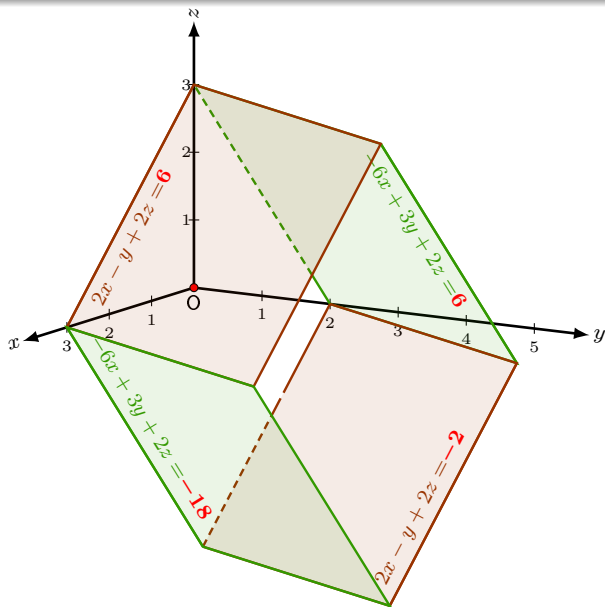
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



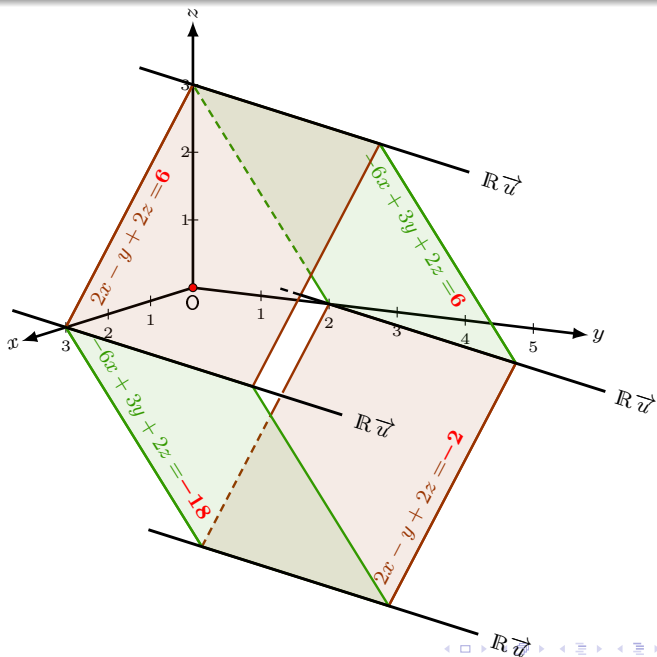
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



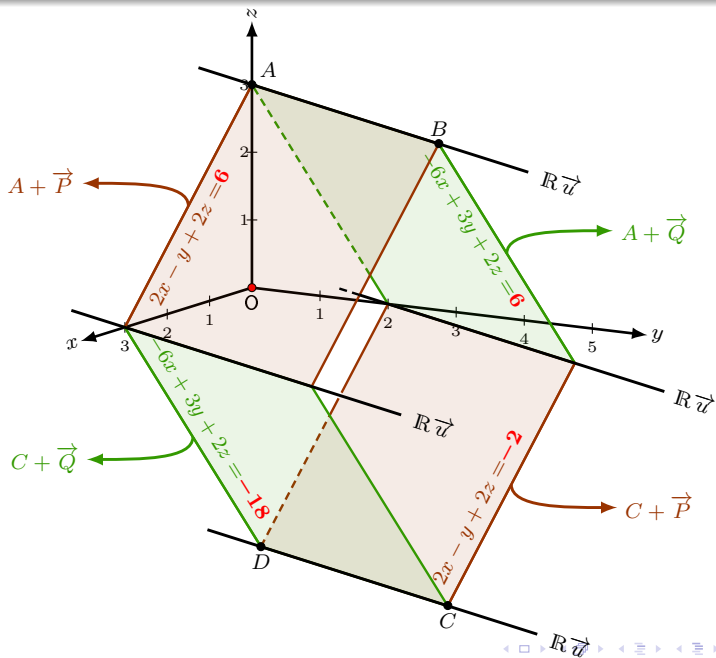
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



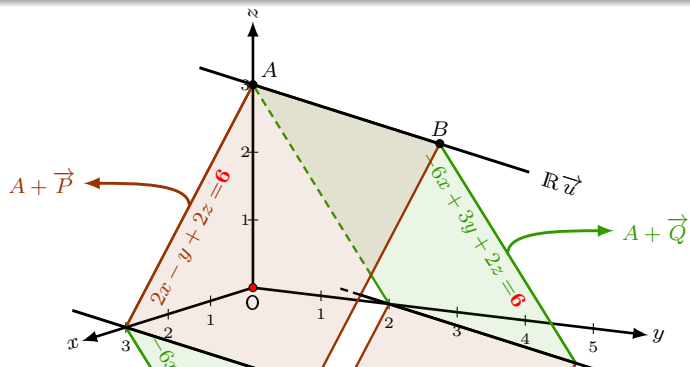
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



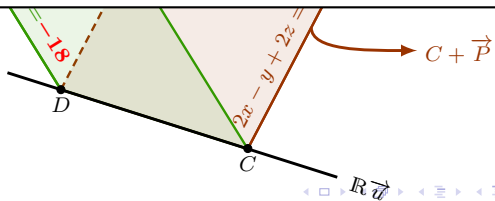
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



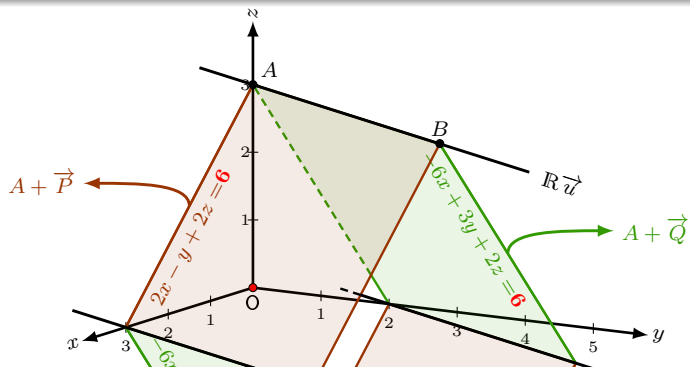
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



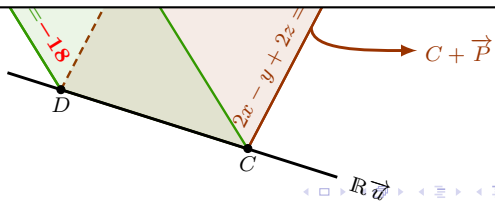
$$A + \vec{P} = B + \vec{P},$$



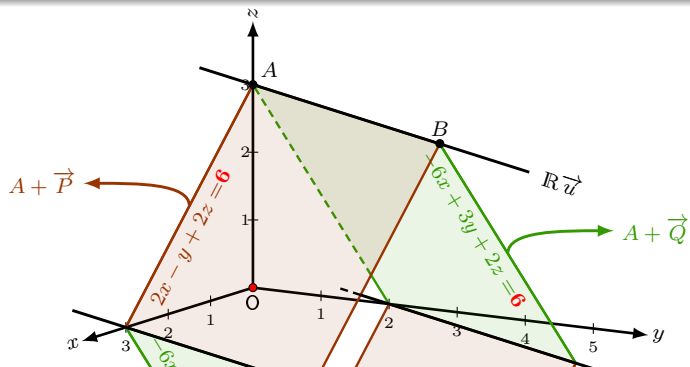
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



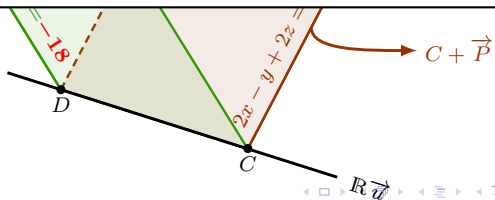
$$A + \vec{P} = B + \vec{P}, \quad C + \vec{P} = D + \vec{P},$$



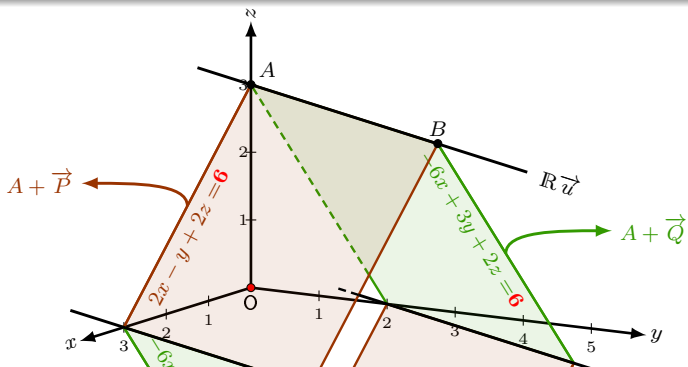
II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



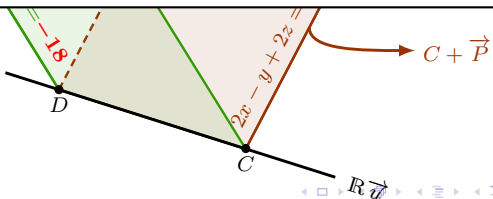
$A + \vec{P} = B + \vec{P}, C + \vec{P} = D + \vec{P}, A + \vec{Q} = B + \vec{Q},$



II. Sous-espaces affines et systèmes d'équations linéaires



$A + \vec{P} = B + \vec{P}, C + \vec{P} = D + \vec{P}, A + \vec{Q} = B + \vec{Q}, \text{ et } C + \vec{Q} = D + \vec{Q}$





Des espaces affines aux espaces vectoriels

En Géométrie affine, les solutions d'un système d'équations linéaires forment un sous-espace affine (droite, plans, etc.), dont le sous-espace vectoriel associé est l'ensemble des vecteurs solutions du système avec un second membre nul.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,j}x_j + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,j}x_j + \dots + a_{i,n}x_i = b_i \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,j}x_j + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Partie vectorielle Partie affine