Espaces vectoriels

Espaces vectoriels

En physique, certaines quantités sont modélisées sous la forme de nombres réels comme la température ou la tension électrique,

Espaces vectoriels

En physique, certaines quantités sont modélisées sous la forme de nombres réels comme la température ou la tension électrique, on les appelle des **scalaires**.

Espaces vectoriels

En physique, certaines quantités sont modélisées sous la forme de nombres réels comme la température ou la tension électrique, on les appelle des **scalaires**.

D'autres quantités, comme la force, la vitesse, ou l'accélération possèdent à la fois une amplitude et une direction.

Espaces vectoriels

En physique, certaines quantités sont modélisées sous la forme de nombres réels comme la température ou la tension électrique, on les appelle des **scalaires**.

D'autres quantités, comme la force, la vitesse, ou l'accélération possèdent à la fois une amplitude et une direction. On les représente par des **vecteurs**.

I. Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

En algèbre linéaire, les vecteurs sont des matrices colonnes. Il ne faudra pas l'oublier lors des calculs. Mais, pour des raisons de mise en page, dans cette fiche, on les écrira souvent en ligne.

En algèbre linéaire, les vecteurs sont des matrices colonnes. Il ne faudra pas l'oublier lors des calculs. Mais, pour des raisons de mise en page, dans cette fiche, on les écrira souvent en ligne.

Etant donné :

- $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux vecteurs ;
- a et b deux nombres réels.

En algèbre linéaire, les vecteurs sont des matrices colonnes. Il ne faudra pas l'oublier lors des calculs. Mais, pour des raisons de mise en page, dans cette fiche, on les écrira souvent en ligne.

Etant donné :

- $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux vecteurs ;
- a et b deux nombres réels.

On munit $\mathbb{R}^n$ de deux lois :

- Une loi interne $+$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) & \longmapsto & \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \end{array}$$

En algèbre linéaire, les vecteurs sont des matrices colonnes. Il ne faudra pas l'oublier lors des calculs. Mais, pour des raisons de mise en page, dans cette fiche, on les écrira souvent en ligne.

Etant donné :

- $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux vecteurs ;
- a et b deux nombres réels.

On munit $\mathbb{R}^n$ de deux lois :

- Une loi interne $+$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\overrightarrow{x}\ ,\ \overrightarrow{y}) & \longmapsto & \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1 + y_1\ ,\ x_2 + y_2\ ,\ \dots\ ,\ x_n + y_n) \end{array}$$

En algèbre linéaire, les vecteurs sont des matrices colonnes. Il ne faudra pas l'oublier lors des calculs. Mais, pour des raisons de mise en page, dans cette fiche, on les écrira souvent en ligne.

Etant donné :

- $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux vecteurs ;
- a et b deux nombres réels.

On munit $\mathbb{R}^n$ de deux lois :

- Une loi interne $+$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\overrightarrow{x}\ ,\ \overrightarrow{y}) & \longmapsto & \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1 + y_1\ ,\ x_2 + y_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n + y_n) \end{array}$$

- Une loi externe $\times$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (a\ ,\ \overrightarrow{x}) & \longmapsto & a \times \overrightarrow{x} = \end{array}$$

En algèbre linéaire, les vecteurs sont des matrices colonnes. Il ne faudra pas l'oublier lors des calculs. Mais, pour des raisons de mise en page, dans cette fiche, on les écrira souvent en ligne.

Etant donné :

- $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux vecteurs ;
- a et b deux nombres réels.

On munit $\mathbb{R}^n$ de deux lois :

- Une loi interne $+$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) & \longmapsto & \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \end{array}$$

- Une loi externe $\times$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (a, \overrightarrow{x}) & \longmapsto & a \times \overrightarrow{x} = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n) \end{array}$$

I. Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

En algèbre linéaire, les vecteurs sont des matrices colonnes. Il ne faudra pas l'oublier lors des calculs. Mais, pour des raisons de mise en page, dans cette fiche, on les écrira souvent en ligne.

Etant donné :

- $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux vecteurs ;
- a et b deux nombres réels.

On munit $\mathbb{R}^n$ de deux lois :

- Une loi interne $+$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\overrightarrow{x}\ ,\ \overrightarrow{y}) & \longmapsto & \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1 + y_1\ ,\ x_2 + y_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n + y_n) \end{array}$$

- Une loi externe $\times$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (a\ ,\ \overrightarrow{x}) & \longmapsto & a \times \overrightarrow{x} = (ax_1\ ,\ ax_2\ ,\ \ldots\ ,\ ax_n) \end{array}$$

Définition:

$\mathbb{R}^n$ muni de ces deux lois, est un **espace vectoriel sur $\mathbb{R}$**.

En algèbre linéaire, les vecteurs sont des matrices colonnes. Il ne faudra pas l'oublier lors des calculs. Mais, pour des raisons de mise en page, dans cette fiche, on les écrira souvent en ligne.

Etant donné :

- $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux vecteurs ;
- a et b deux nombres réels.

On munit $\mathbb{R}^n$ de deux lois :

- Une loi interne $+$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\overrightarrow{x}\ ,\ \overrightarrow{y}) & \longmapsto & \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1 + y_1\ ,\ x_2 + y_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n + y_n) \end{array}$$

- Une loi externe $\times$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (a\ ,\ \overrightarrow{x}) & \longmapsto & a \times \overrightarrow{x} = (ax_1\ ,\ ax_2\ ,\ \ldots\ ,\ ax_n) \end{array}$$

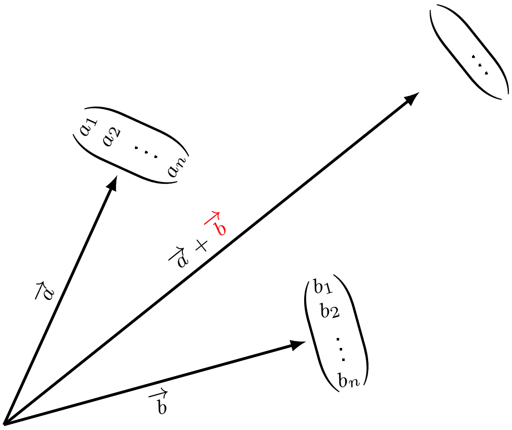
Définition:

$\mathbb{R}^n$ muni de ces deux lois, est un **espace vectoriel sur $\mathbb{R}$**.

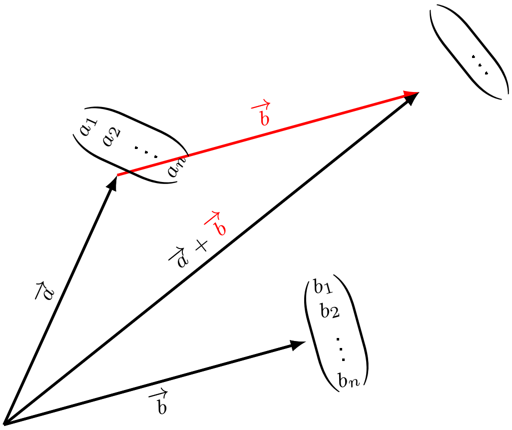
On dit que $(\mathbb{R}^n, +, \times)$ est un $\mathbb{R}-$**espace vectoriel, noté $\mathbb{R}-$ev.**

Graphiquement, on réprésente les vecteurs par des flèches de la façons suivantes :

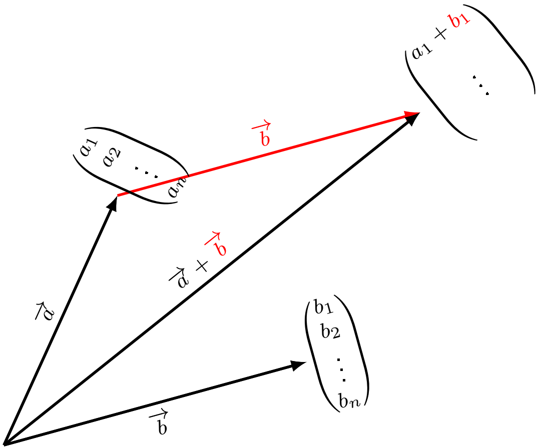
Graphiquement, on réprésente les vecteurs par des flèches de la façons suivantes :



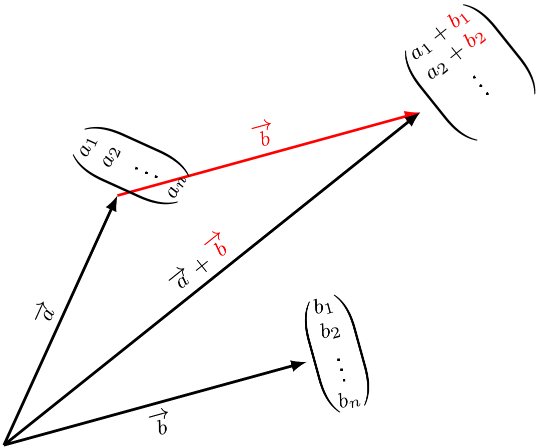
Graphiquement, on réprésente les vecteurs par des flèches de la façons suivantes :



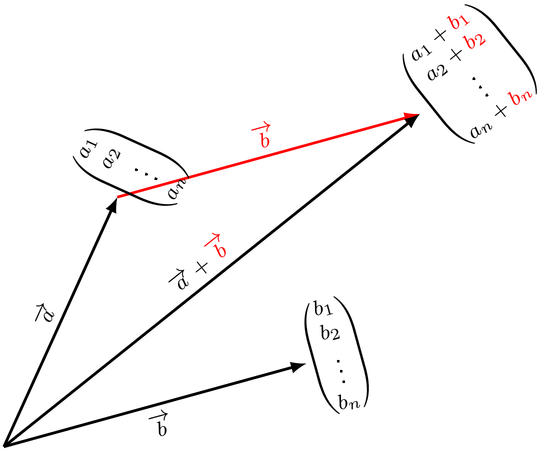
Graphiquement, on réprésente les vecteurs par des flèches de la façons suivantes :



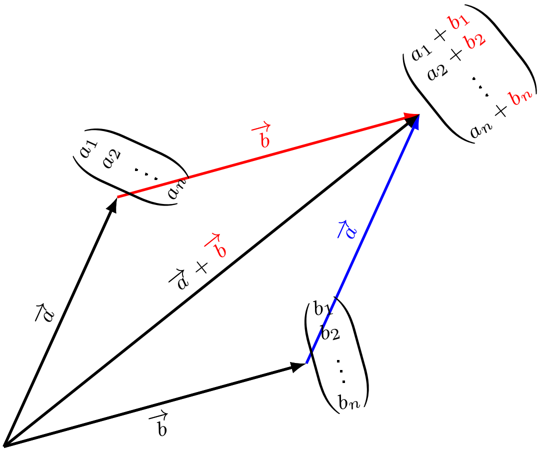
Graphiquement, on réprésente les vecteurs par des flèches de la façons suivantes :



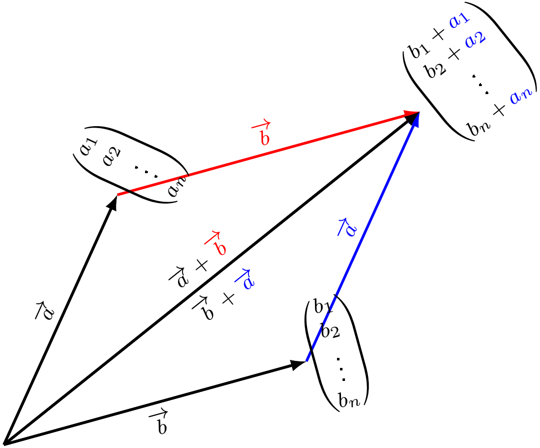
Graphiquement, on réprésente les vecteurs par des flèches de la façons suivantes :



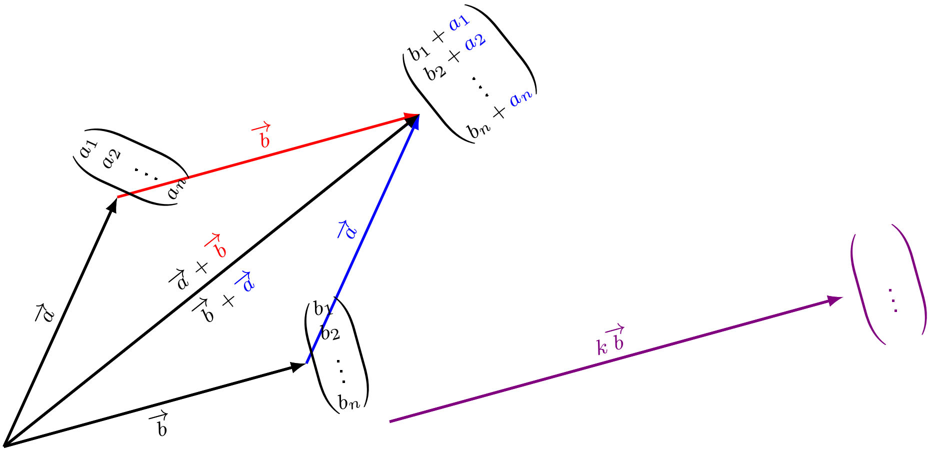
Graphiquement, on réprésente les vecteurs par des flèches de la façons suivantes :



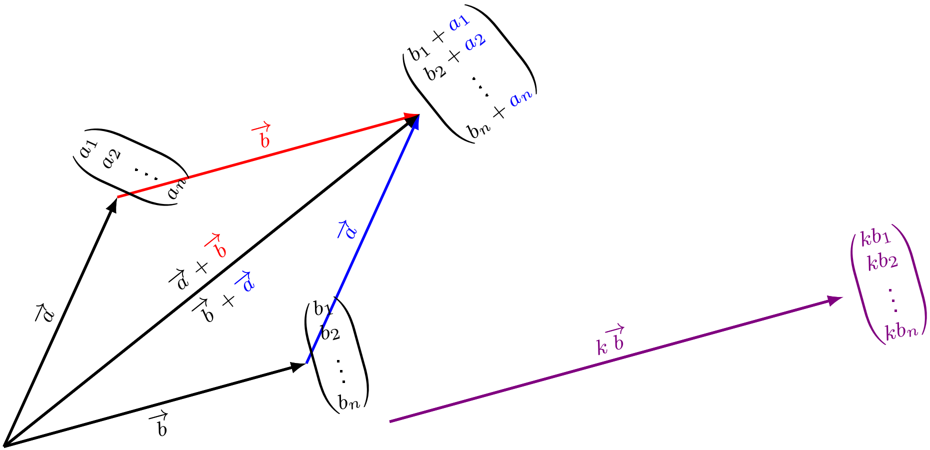
Graphiquement, on réprésente les vecteurs par des flèches de la façons suivantes :



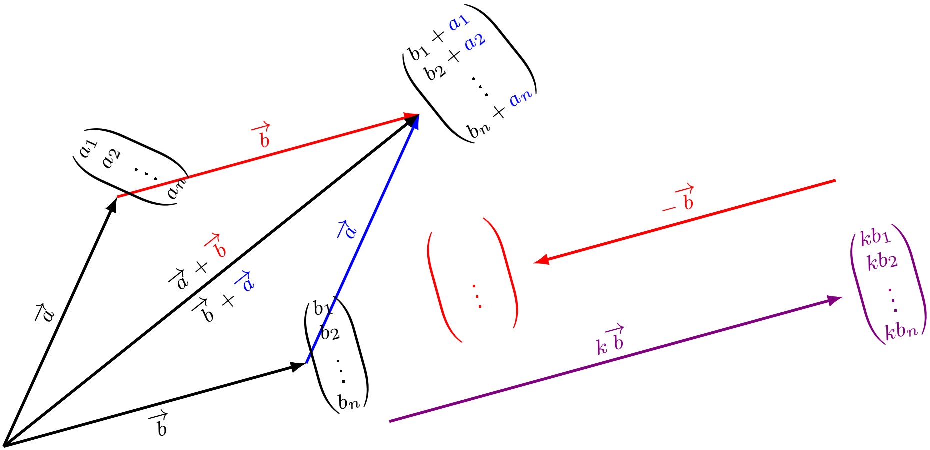
Graphiquement, on réprésente les vecteurs par des flèches de la façons suivantes :



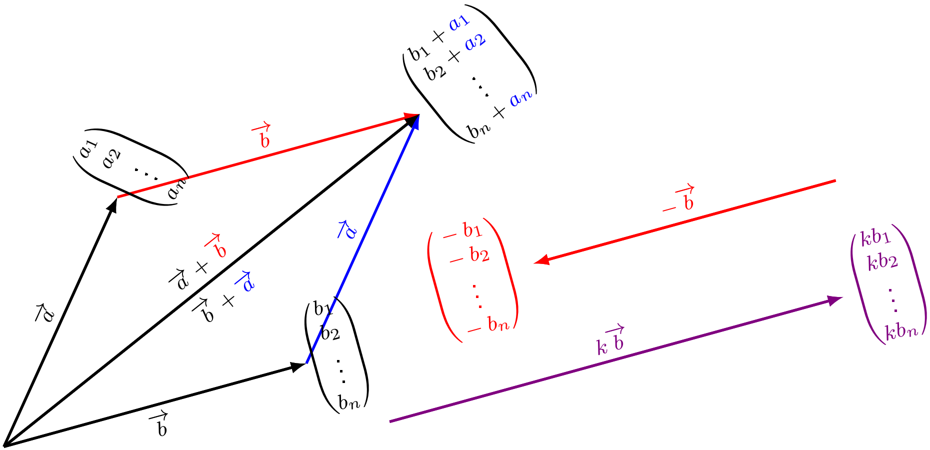
Graphiquement, on réprésente les vecteurs par des flèches de la façons suivantes :



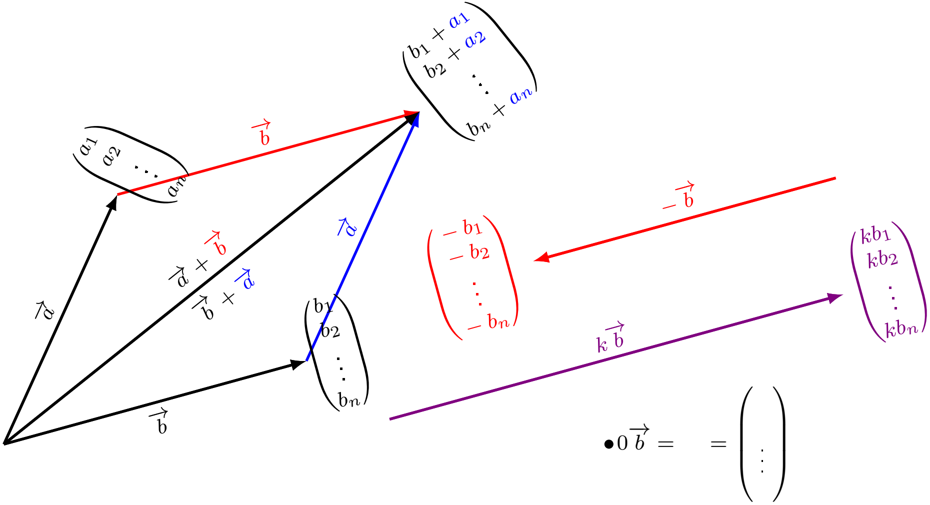
Graphiquement, on réprésente les vecteurs par des flèches de la façons suivantes :



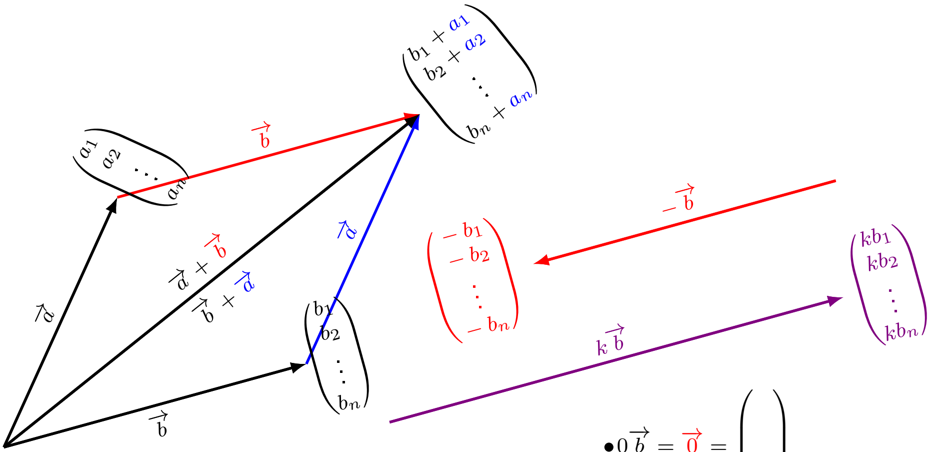
Graphiquement, on réprésente les vecteurs par des flèches de la façons suivantes :



Graphiquement, on réprésente les vecteurs par des flèches de la façons suivantes :



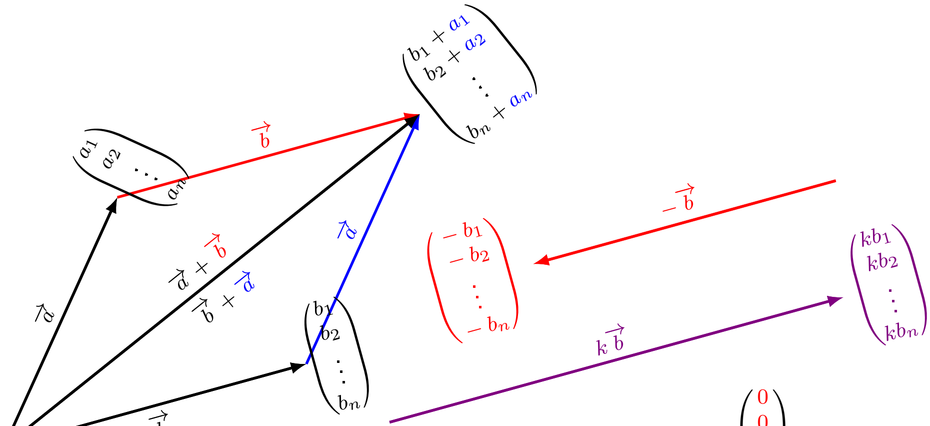
Graphiquement, on réprésente les vecteurs par des flèches de la façons suivantes :



$\bullet 0\,\vec{b} = \vec{0} = \begin{pmatrix} \\ \vdots \\ \\ \end{pmatrix}$

I. Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Graphiquement, on réprésente les vecteurs par des flèches de la façons suivantes :



$$\bullet 0\,\vec{b} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lorsqu'on mélange la loi interne (l'**addition**) et la loi externe (la multiplication par un **scalaire**), on obtient :

Définition:

Etant donnés k vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_k}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_k}$ s'il existe k scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_k$, tels que :

$$\overrightarrow{w} = a_1 \times \overrightarrow{u_1} + a_2 \times \overrightarrow{u_2} + \ldots + a_k \times \overrightarrow{u_k}$$

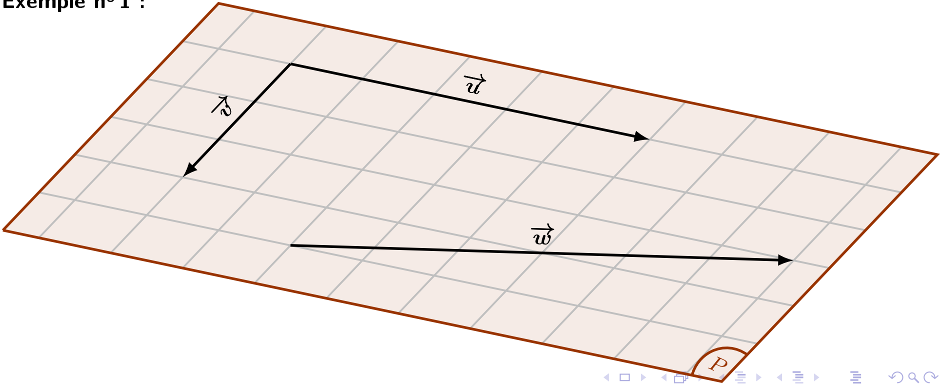
Lorsqu'on mélange la loi interne (l'**addition**) et la loi externe (la multiplication par un **scalaire**), on obtient :

Définition:

Etant donnés k vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_k}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_k}$ s'il existe k scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_k$, tels que :

$$\overrightarrow{w} = a_1 \times \overrightarrow{u_1} + a_2 \times \overrightarrow{u_2} + \ldots + a_k \times \overrightarrow{u_k}$$

Exemple n° 1 :



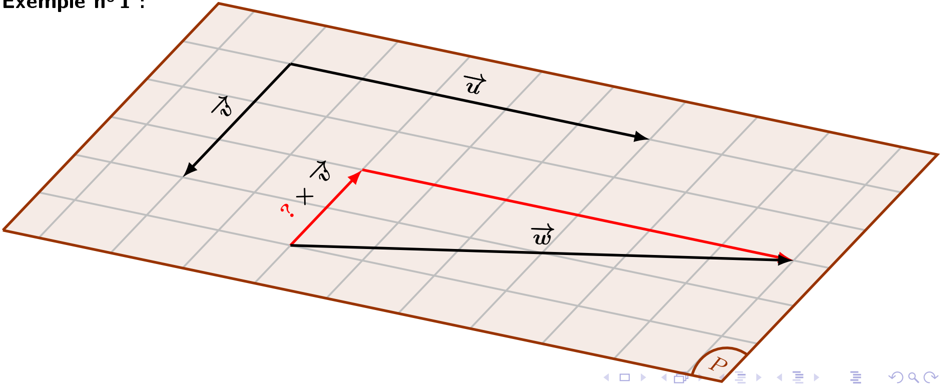
Lorsqu'on mélange la loi interne (l'**addition**) et la loi externe (la multiplication par un **scalaire**), on obtient :

Définition:

Etant donnés k vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_k}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_k}$ s'il existe k scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_k$, tels que :

$$\overrightarrow{w} = a_1 \times \overrightarrow{u_1} + a_2 \times \overrightarrow{u_2} + \ldots + a_k \times \overrightarrow{u_k}$$

Exemple n° 1 :



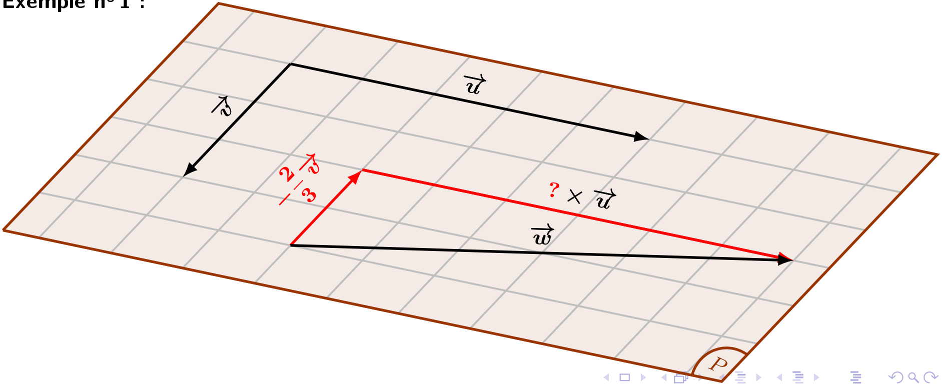
Lorsqu'on mélange la loi interne (l'**addition**) et la loi externe (la multiplication par un **scalaire**), on obtient :

Définition:

Etant donnés k vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_k}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_k}$ s'il existe k scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_k$, tels que :

$$\overrightarrow{w} = a_1 \times \overrightarrow{u_1} + a_2 \times \overrightarrow{u_2} + \ldots + a_k \times \overrightarrow{u_k}$$

Exemple n° 1 :



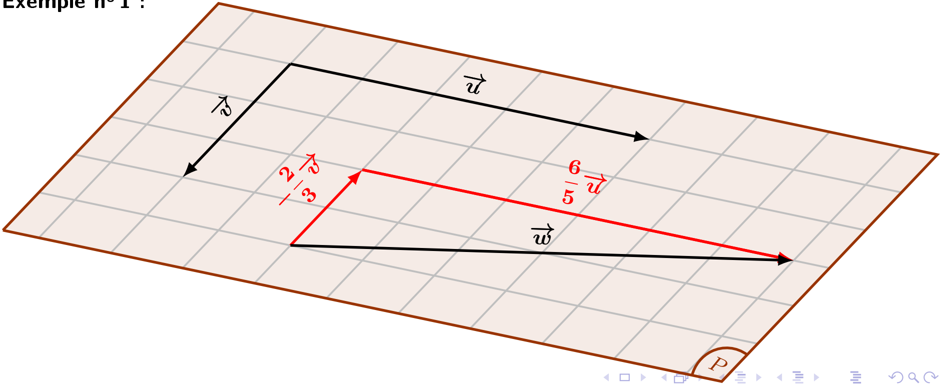
Lorsqu'on mélange la loi interne (l'**addition**) et la loi externe (la multiplication par un **scalaire**), on obtient :

Définition:

Etant donnés k vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_k}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_k}$ s'il existe k scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_k$, tels que :

$$\overrightarrow{w} = a_1 \times \overrightarrow{u_1} + a_2 \times \overrightarrow{u_2} + \ldots + a_k \times \overrightarrow{u_k}$$

Exemple n° 1 :

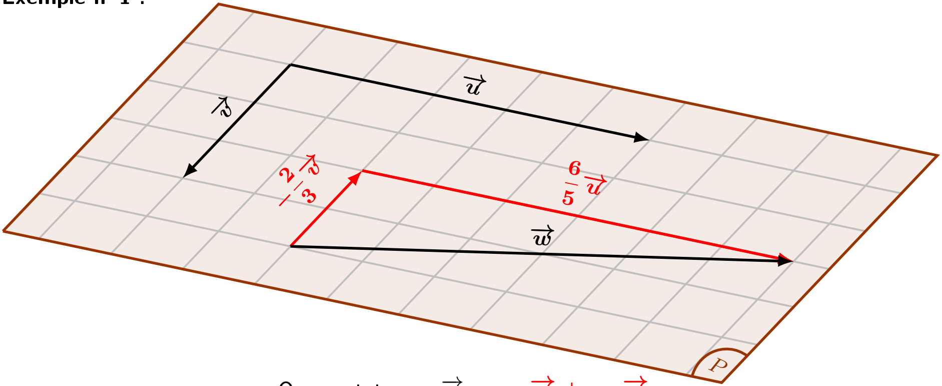


Définition:

Etant donnés k vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_k}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_k}$ s'il existe k scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_k$, tels que :

$$\overrightarrow{w} = a_1 \times \overrightarrow{u_1} + a_2 \times \overrightarrow{u_2} + \ldots + a_k \times \overrightarrow{u_k}$$

Exemple n° 1 :



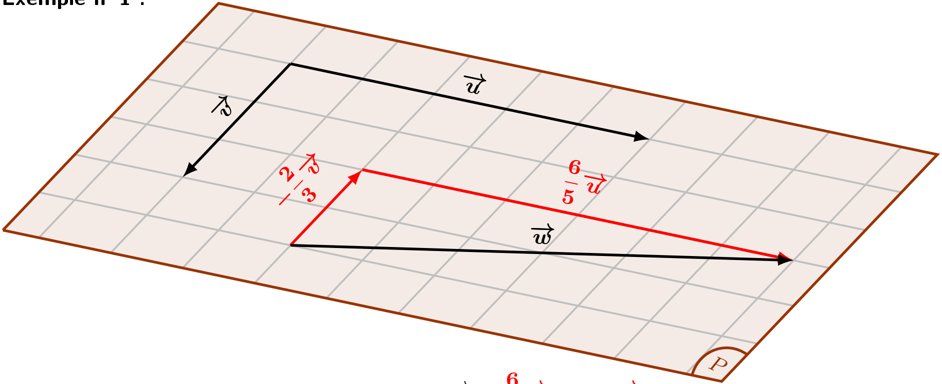
On constate que $\overrightarrow{w} = \ldots \overrightarrow{u} + \ldots \overrightarrow{v}$

Définition:

Etant donnés k vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_k}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_k}$ s'il existe k scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_k$, tels que :

$$\overrightarrow{w} = a_1 \times \overrightarrow{u_1} + a_2 \times \overrightarrow{u_2} + \ldots + a_k \times \overrightarrow{u_k}$$

Exemple n° 1 :



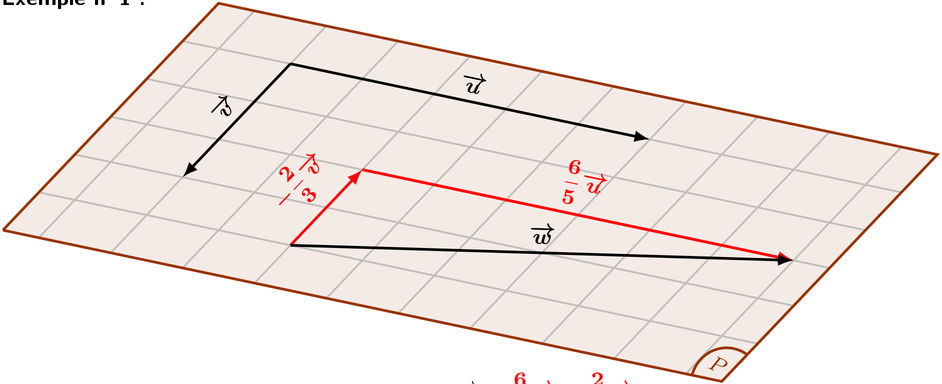
On constate que $\overrightarrow{w} = \frac{6}{5}\overrightarrow{u} + \ldots \overrightarrow{v}$

Définition:

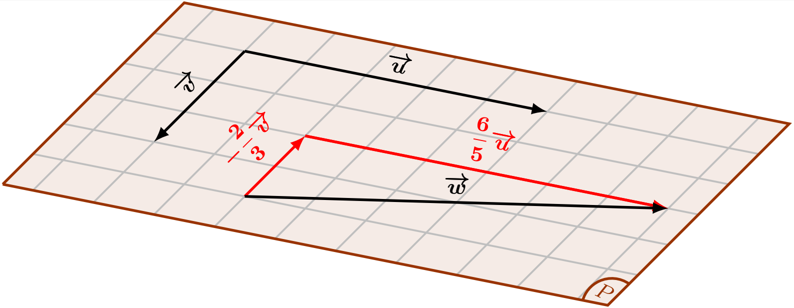
Etant donnés k vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_k}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_k}$ s'il existe k scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_k$, tels que :

$$\overrightarrow{w} = a_1 \times \overrightarrow{u_1} + a_2 \times \overrightarrow{u_2} + \ldots + a_k \times \overrightarrow{u_k}$$

Exemple n° 1 :



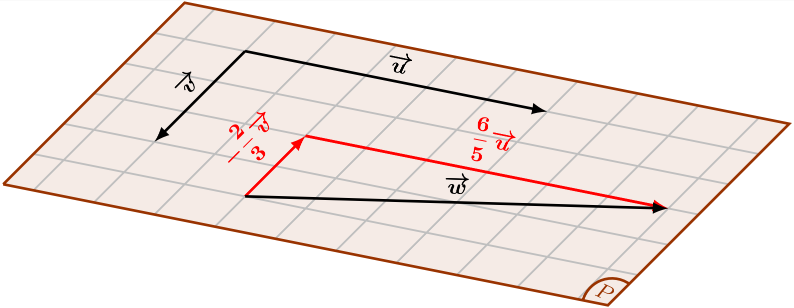
On constate que $\overrightarrow{w} = \frac{6}{5}\overrightarrow{u} - \frac{2}{3}\overrightarrow{v}$



On constate que $\overrightarrow{w} = \mathbf{\frac{6}{5}}\overrightarrow{u} - \mathbf{\frac{2}{3}}\overrightarrow{v}$

Remarque

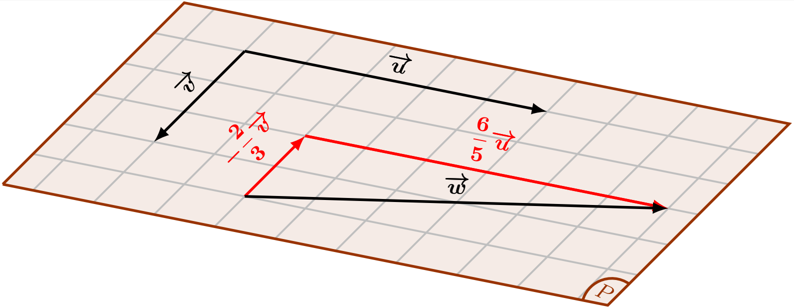
Si $\overrightarrow{w}$ est une **combinaison linéaire** d'un seul vecteur $\overrightarrow{u}$, alors $\overrightarrow{w} = a \times \overrightarrow{u}$ et on dit que $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}$ sont



On constate que $\overrightarrow{w} = \frac{6}{5}\overrightarrow{u} - \frac{2}{3}\overrightarrow{v}$

Remarque

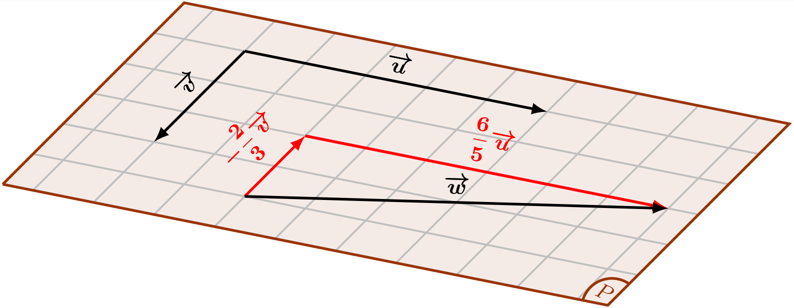
Si $\overrightarrow{w}$ est une **combinaison linéaire** d'un seul vecteur $\overrightarrow{u}$, alors $\overrightarrow{w} = a \times \overrightarrow{u}$ et on dit que $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}$ sont **colinéaires**.



On constate que $\overrightarrow{w} = \frac{6}{5}\overrightarrow{u} - \frac{2}{3}\overrightarrow{v}$

Remarque

Si $\overrightarrow{w}$ est une **combinaison linéaire** d'un seul vecteur $\overrightarrow{u}$, alors $\overrightarrow{w} = a \times \overrightarrow{u}$ et on dit que $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}$ sont **colinéaires**. La colinéarité est un cas particulier des combinaisons linéaires.



On constate que $\vec{w} = \frac{6}{5}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$

Remarque

Si $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** d'un seul vecteur $\vec{u}$, alors $\vec{w} = a \times \vec{u}$ et on dit que $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont **colinéaires**. La colinéarité est un cas particulier des combinaisons linéaires.

Géométriquement, la colinéarité de deux vecteurs correspond au **parallélisme** des flèches qui les représentent.

II. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Définition:

un **sous-espace vectoriel** E de $\mathbb{R}^n$ est une partie de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ qui est **stable** par combinaison linéaire :

II. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Définition:

un **sous-espace vectoriel** E de $\mathbb{R}^n$ est une partie de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ qui est **stable** par combinaison linéaire :

$$\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \overrightarrow{v} \in E, \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \ \boldsymbol{a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}} \in E$$

Définition:

un **sous-espace vectoriel** E de $\mathbb{R}^n$ est une partie de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ qui est **stable** par combinaison linéaire :

$$\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \overrightarrow{v} \in E, \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \; \boldsymbol{a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}} \in E$$

Remarque : $\forall \overrightarrow{u} \in E$ se lit : « Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E »

Définition:

Etant donnée une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k})$ de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, et un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}$.

- On appelle sous-espace vectoriel **engendré** par la famille $\mathcal{F}$,

II. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Définition:

Etant donnée une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k})$ de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, et un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}$.

- On appelle sous-espace vectoriel **engendré** par la famille $\mathcal{F}$, noté $\langle \boldsymbol{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k}} \rangle$,

Définition:

Etant donnée une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k})$ de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, et un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}$.

- On appelle sous-espace vectoriel **engendré** par la famille $\mathcal{F}$, noté $\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k} \rangle$, l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille.

Définition:

Etant donnée une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k})$ de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, et un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}$.

- On appelle sous-espace vectoriel **engendré** par la famille $\mathcal{F}$, noté $\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k} \rangle$, l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille.
- La famille $\mathcal{F}$ est dite **génératrice** du sous-espace vectoriel E

Définition:

Etant donnée une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k})$ de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, et un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}$.

- On appelle sous-espace vectoriel **engendré** par la famille $\mathcal{F}$, noté $\langle \boldsymbol{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k}} \rangle$, l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille.
- La famille $\mathcal{F}$ est dite **génératrice** du sous-espace vectoriel E si $E = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k} \rangle$.

Définition:

Etant donnée une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k})$ de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, et un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}$.

- On appelle sous-espace vectoriel **engendré** par la famille $\mathcal{F}$, noté $\langle \boldsymbol{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k}} \rangle$, l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille.
- La famille $\mathcal{F}$ est dite **génératrice** du sous-espace vectoriel E si $E = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k} \rangle$.

  Ce qui signifie que tous vecteurs $\overrightarrow{w}$ de ce sous-espace vectoriel peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$:

Définition:

Etant donnée une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k})$ de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, et un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}$.

- On appelle sous-espace vectoriel **engendré** par la famille $\mathcal{F}$, noté $\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k} \rangle$, l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille.
- La famille $\mathcal{F}$ est dite **génératrice** du sous-espace vectoriel E si $E = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k} \rangle$.

  Ce qui signifie que tous vecteurs $\overrightarrow{w}$ de ce sous-espace vectoriel peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$:

  $\forall \overrightarrow{w} \in E$, il existe $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ tels que $\overrightarrow{w} = \boldsymbol{a_1 \overrightarrow{u_1} + a_2 \overrightarrow{u_2} + \cdots + a_k \overrightarrow{u_k}}$.

Définition:

Etant donnée une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k})$ de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, et un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}$.

- On appelle sous-espace vectoriel **engendré** par la famille $\mathcal{F}$, noté $\langle \boldsymbol{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k}} \rangle$, l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille.
- La famille $\mathcal{F}$ est dite **génératrice** du sous-espace vectoriel E si $E = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k} \rangle$.

  Ce qui signifie que tous vecteurs $\overrightarrow{w}$ de ce sous-espace vectoriel peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$:

  $\forall \overrightarrow{w} \in E$, il existe $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ tels que $\overrightarrow{w} = \boldsymbol{a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_k\overrightarrow{u_k}}$.

  On note aussi $E = \mathbb{R}\boldsymbol{\overrightarrow{u_1}} + \mathbb{R}\boldsymbol{\overrightarrow{u_2}} + \ldots + \mathbb{R}\boldsymbol{\overrightarrow{u_k}}$

1. Sous-espaces vectoriels engendrés par un vecteur $\overrightarrow{u}$:

1. Sous-espaces vectoriels engendrés par un vecteur $\overrightarrow{u}$:

Deux cas se présentent :

1 Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{\mathbf{0}}$ qui est le sous-espace vectoriel **nul**.

1. Sous-espaces vectoriels engendrés par un vecteur $\overrightarrow{u}$:

Deux cas se présentent :

1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{\mathbf{0}}$ qui est le sous-espace vectoriel **nul**. Il ne contient qu'un seul et unique vecteur : le vecteur nul.

1. Sous-espaces vectoriels engendrés par un vecteur $\overrightarrow{u}$:

Deux cas se présentent :

1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{\mathbf{0}}$ qui est le sous-espace vectoriel **nul**. Il ne contient qu'un seul et unique vecteur : le vecteur nul.
2. Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$

1. Sous-espaces vectoriels engendrés par un vecteur $\overrightarrow{u}$:

Deux cas se présentent :

1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{\mathbf{0}}$ qui est le sous-espace vectoriel **nul**. Il ne contient qu'un seul et unique vecteur : le vecteur nul.
2. Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ qui est le sous-espace vectoriel **engendré par toutes les combinaisons** linéaires de $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire les vecteurs

1. Sous-espaces vectoriels engendrés par un vecteur $\overrightarrow{u}$:

Deux cas se présentent :

1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{\mathbf{0}}$ qui est le sous-espace vectoriel **nul**. Il ne contient qu'un seul et unique vecteur : le vecteur nul.
2. Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ qui est le sous-espace vectoriel **engendré par toutes les combinaisons** linéaires de $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire les vecteurs **colinéaires** à $\overrightarrow{u}$:

1. Sous-espaces vectoriels engendrés par un vecteur $\overrightarrow{u}$:

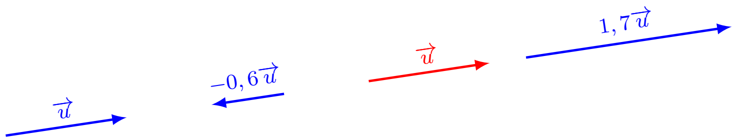
Deux cas se présentent :

1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{\mathbf{0}}$ qui est le sous-espace vectoriel **nul**. Il ne contient qu'un seul et unique vecteur : le vecteur nul.
2. Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ qui est le sous-espace vectoriel **engendré par toutes les combinaisons** linéaires de $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire les vecteurs **colinéaires** à $\overrightarrow{u}$:

1. Sous-espaces vectoriels engendrés par un vecteur $\overrightarrow{u}$:

Deux cas se présentent :

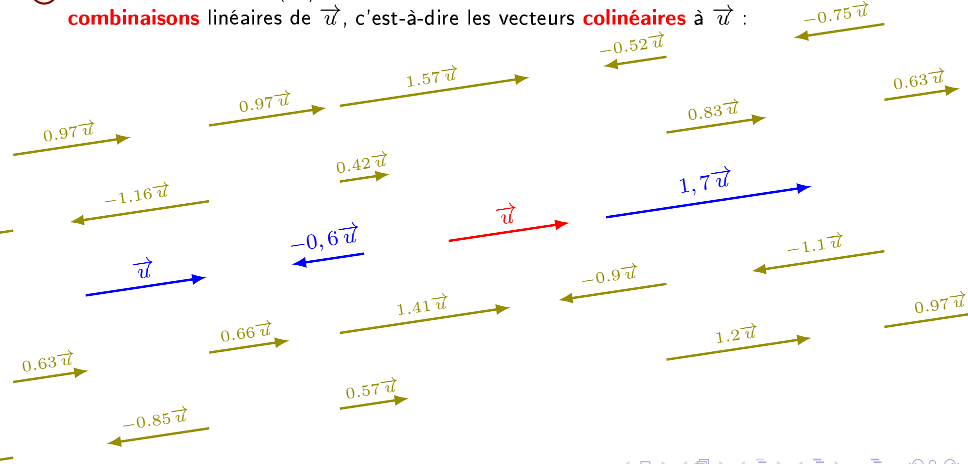
1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\,\overrightarrow{\mathbf{0}}$ qui est le sous-espace vectoriel **nul**. Il ne contient qu'un seul et unique vecteur : le vecteur nul.
2. Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\,\overrightarrow{u}$ qui est le sous-espace vectoriel **engendré par toutes les combinaisons** linéaires de $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire les vecteurs **colinéaires** à $\overrightarrow{u}$:



1. Sous-espaces vectoriels engendrés par un vecteur $\overrightarrow{u}$:

Deux cas se présentent :

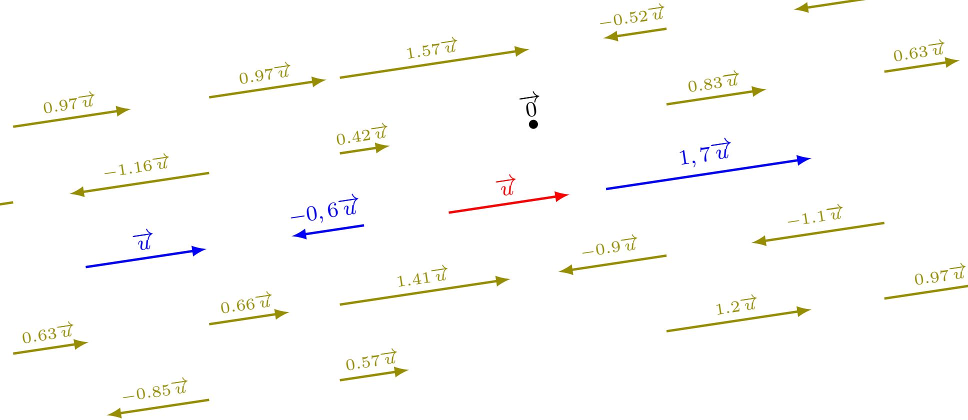
1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\,\overrightarrow{\mathbf{0}}$ qui est le sous-espace vectoriel **nul**. Il ne contient qu'un seul et unique vecteur : le vecteur nul.
2. Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\,\overrightarrow{u}$ qui est le sous-espace vectoriel **engendré par toutes les combinaisons** linéaires de $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire les vecteurs **colinéaires** à $\overrightarrow{u}$:



1. Sous-espaces vectoriels engendrés par un vecteur $\overrightarrow{u}$:

Deux cas se présentent :

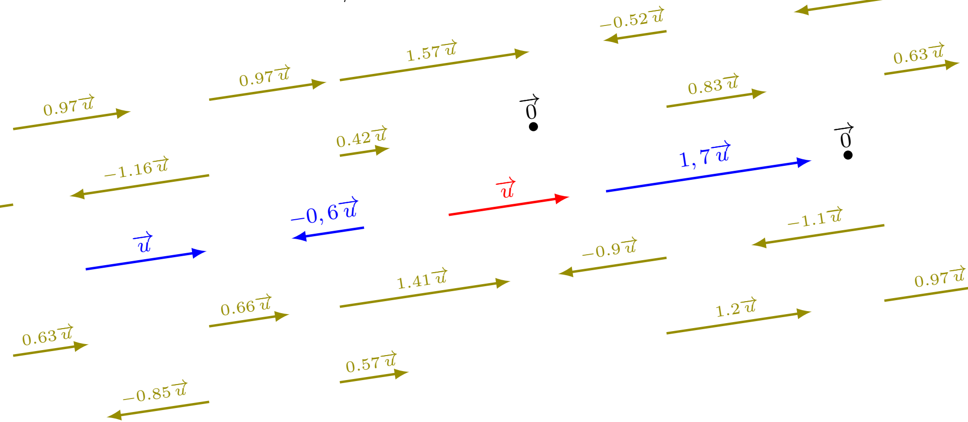
1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\,\overrightarrow{\mathbf{0}}$ qui est le sous-espace vectoriel **nul**. Il ne contient qu'un seul et unique vecteur : le vecteur nul.
2. Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\,\overrightarrow{u}$ qui est le sous-espace vectoriel **engendré par toutes les combinaisons** linéaires de $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire les vecteurs **colinéaires** à $\overrightarrow{u}$:



1. Sous-espaces vectoriels engendrés par un vecteur $\overrightarrow{u}$:

Deux cas se présentent :

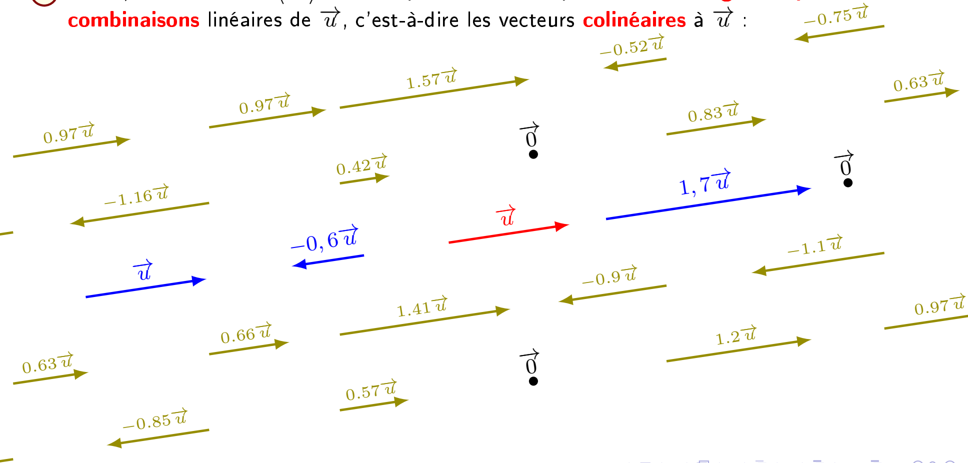
1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\,\overrightarrow{\mathbf{0}}$ qui est le sous-espace vectoriel **nul**. Il ne contient qu'un seul et unique vecteur : le vecteur nul.
2. Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ qui est le sous-espace vectoriel **engendré par toutes les combinaisons** linéaires de $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire les vecteurs **colinéaires** à $\overrightarrow{u}$:



1. Sous-espaces vectoriels engendrés par un vecteur $\overrightarrow{u}$:

Deux cas se présentent :

1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\,\overrightarrow{\mathbf{0}}$ qui est le sous-espace vectoriel **nul**. Il ne contient qu'un seul et unique vecteur : le vecteur nul.
2. Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ alors $E = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\,\overrightarrow{u}$ qui est le sous-espace vectoriel **engendré par toutes les combinaisons** linéaires de $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire les vecteurs **colinéaires** à $\overrightarrow{u}$:



Définition:

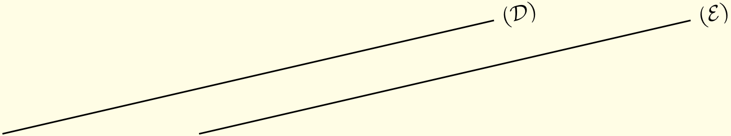
$\langle \overrightarrow{u} \rangle$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{u}$.

Remarque

Etant donnée deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E})$, on note :

- $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs contenus dans $(\mathcal{D})$;
- $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs contenus dans $(\mathcal{E})$.

Les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E})$ sont parallèles si et seulement si $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathcal{D}} = \overrightarrow{\mathcal{E}}}$



Définition:

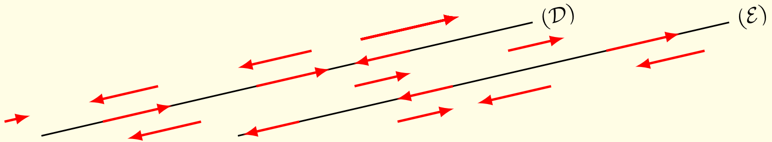
$\langle \overrightarrow{u} \rangle$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{u}$.

Remarque

Etant donnée deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E})$, on note :

- $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs contenus dans $(\mathcal{D})$;
- $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs contenus dans $(\mathcal{E})$.

Les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E})$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \overrightarrow{\mathcal{E}}$



2. Sous-espaces vectoriels engendrés par deux vecteurs non nuls :

2. Sous-espaces vectoriels engendrés par deux vecteurs non nuls :

Etant donné deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, deux cas se présentent :

2. Sous-espaces vectoriels engendrés par deux vecteurs non nuls :

Etant donné deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, deux cas se présentent :

1. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{v}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$
   et $E = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle =$

2. Sous-espaces vectoriels engendrés par deux vecteurs non nuls :

Etant donné deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, deux cas se présentent :

1. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{v}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $E = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$.

2. Sous-espaces vectoriels engendrés par deux vecteurs non nuls :

Etant donné deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, deux cas se présentent :

1. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{v}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $E = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u}$. E est une **droite vectorielle.**

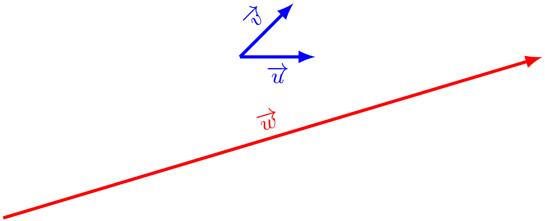
2. Sous-espaces vectoriels engendrés par deux vecteurs non nuls :

Etant donné deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, deux cas se présentent :

1. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{v}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $E = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u}$. E est une **droite vectorielle.**

2. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :

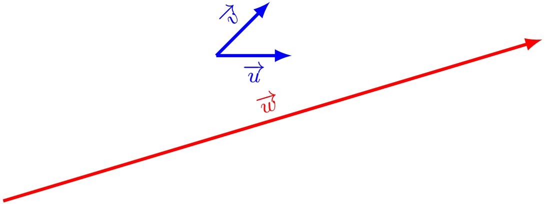
2 Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :



Attention !

Il n'y a pas d'origine, le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est pas un repère. Nous verrons plus tard que ce couple est une base du plan vectoriel P.

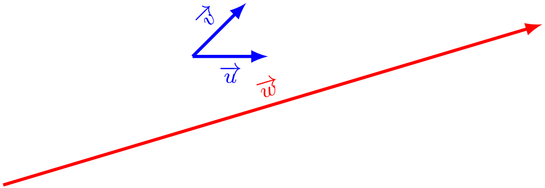
(2) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :



Attention !

Il n'y a pas d'origine, le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est pas un repère. Nous verrons plus tard que ce couple est une base du plan vectoriel P.

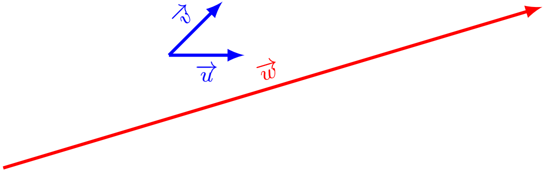
2 Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$ est un **plan** vectoriel :



Attention !

Il n'y a pas d'origine, le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas un repère. Nous verrons plus tard que ce couple est une base du plan vectoriel P.

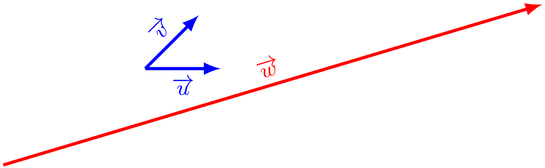
2 Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :



Attention !

Il n'y a pas d'origine, le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est pas un repère. Nous verrons plus tard que ce couple est une base du plan vectoriel P.

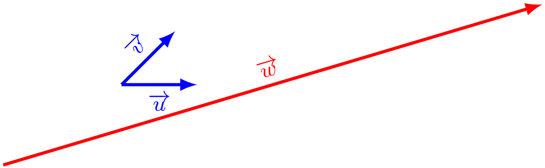
2 Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :



Attention !

Il n'y a pas d'origine, le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est pas un repère. Nous verrons plus tard que ce couple est une base du plan vectoriel P.

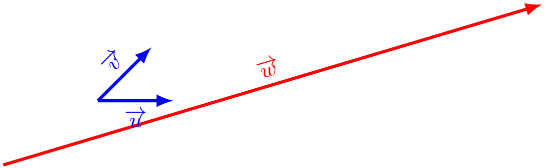
2 Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :



Attention !

Il n'y a pas d'origine, le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est pas un repère. Nous verrons plus tard que ce couple est une base du plan vectoriel P.

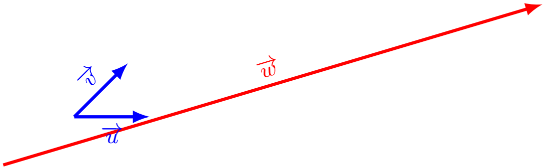
2 Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :



Attention !

Il n'y a pas d'origine, le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est pas un repère. Nous verrons plus tard que ce couple est une base du plan vectoriel P.

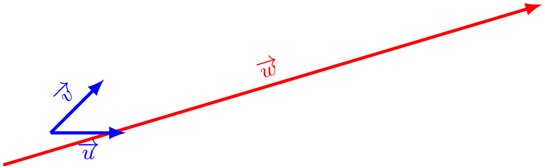
(2) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :



Attention !

Il n'y a pas d'origine, le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est pas un repère. Nous verrons plus tard que ce couple est une base du plan vectoriel P.

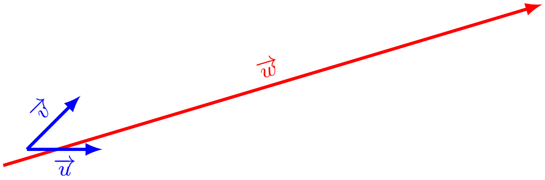
2 Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :



Attention !

Il n'y a pas d'origine, le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est pas un repère. Nous verrons plus tard que ce couple est une base du plan vectoriel P.

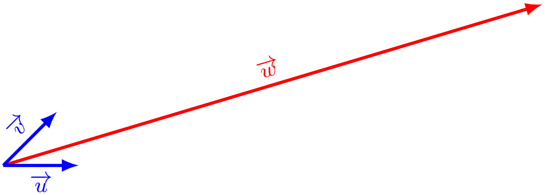
2 Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :



Attention !

Il n'y a pas d'origine, le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est pas un repère. Nous verrons plus tard que ce couple est une base du plan vectoriel P.

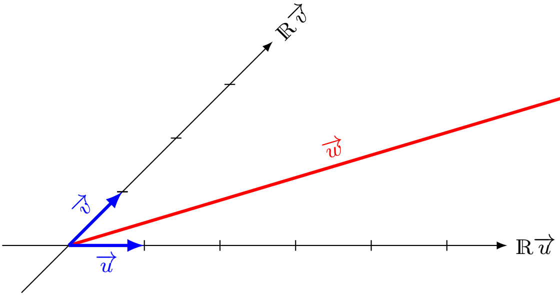
2 Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :



Attention !

Il n'y a pas d'origine, le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est pas un repère. Nous verrons plus tard que ce couple est une base du plan vectoriel P.

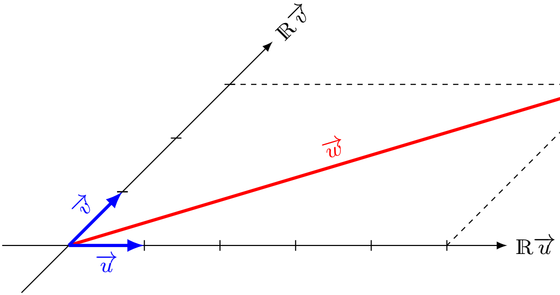
(2) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :



Attention !

Il n'y a pas d'origine, le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est pas un repère. Nous verrons plus tard que ce couple est une base du plan vectoriel P.

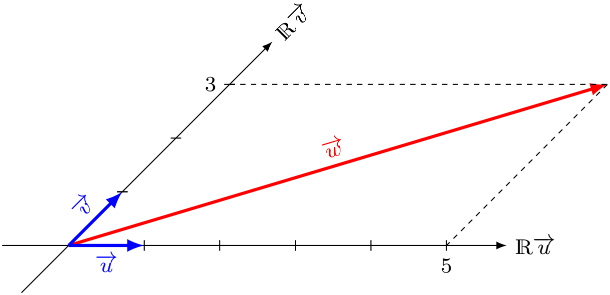
② Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :



Attention !

Il n'y a pas d'origine, le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est pas un repère. Nous verrons plus tard que ce couple est une base du plan vectoriel P.

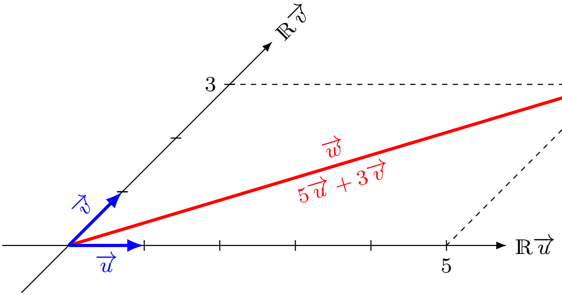
(2) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :



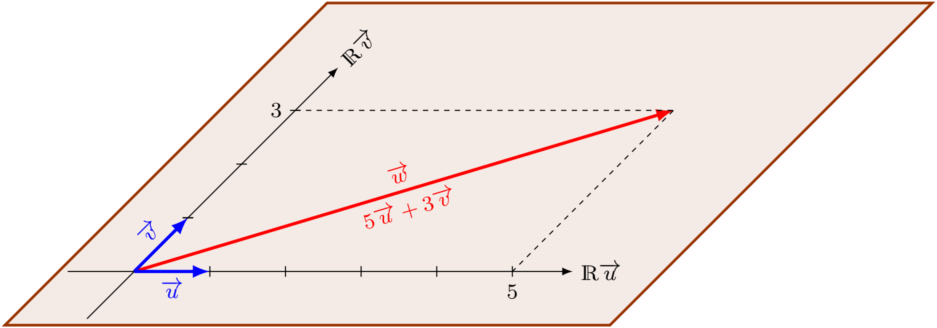
Attention !

Il n'y a pas d'origine, le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est pas un repère. Nous verrons plus tard que ce couple est une base du plan vectoriel P.

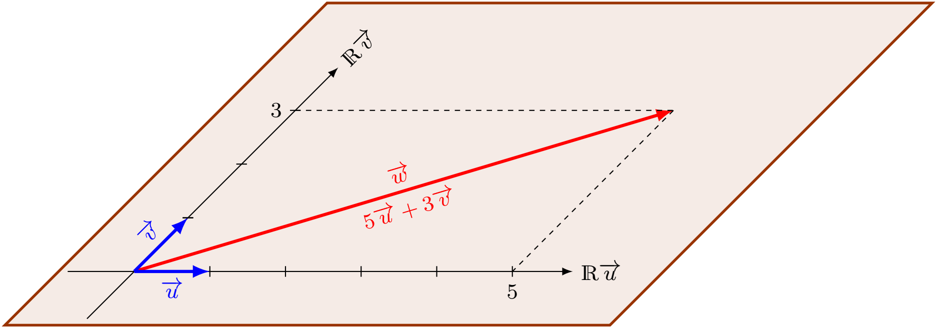
(2) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :



2 Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle =$ $\mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :



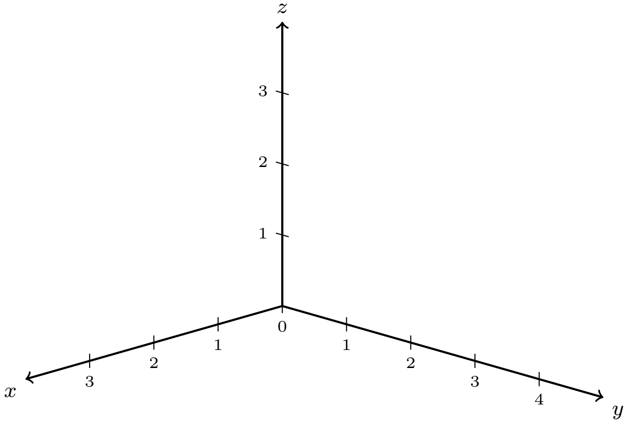
(2) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $P = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un **plan** vectoriel :



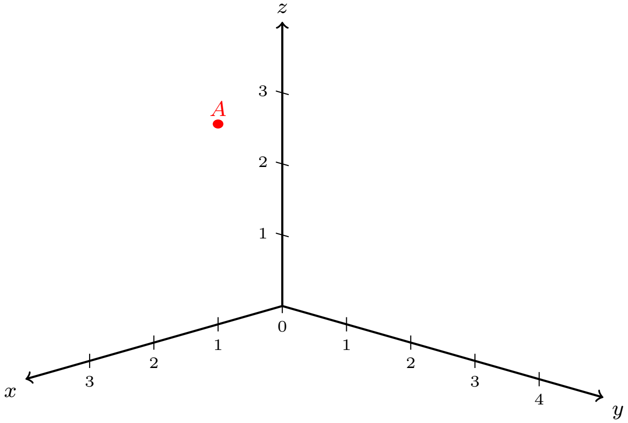
Attention !

Il n'y a pas d'origine, le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est pas un repère. Nous verrons plus tard que ce couple est une base du plan vectoriel P.

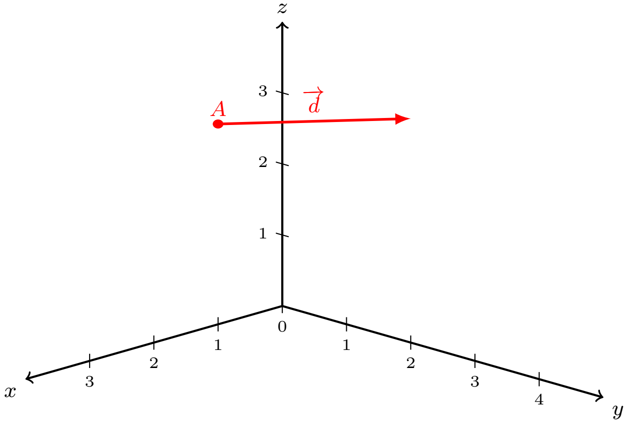
Exemple n° 2 : On considère la droite $\mathcal{D} = (A, \overrightarrow{d})$ où $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$



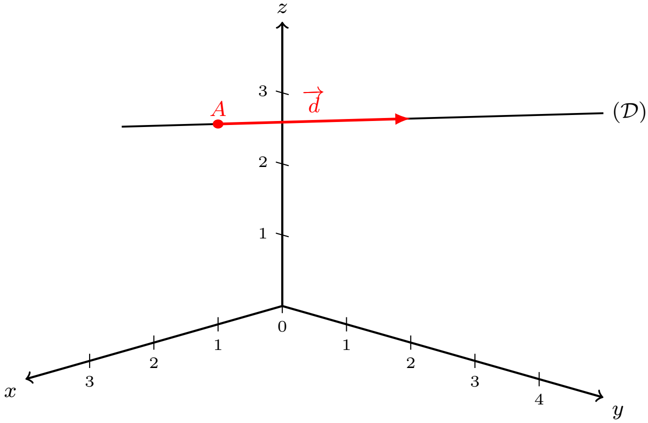
Exemple n° 2 : On considère la droite $\mathcal{D} = (A, \overrightarrow{d})$ où $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$



Exemple n° 2 : On considère la droite $\mathcal{D} = (A, \overrightarrow{d})$ où $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix}-1\\2\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}2\\1\\\frac{10}{3}\end{pmatrix}$

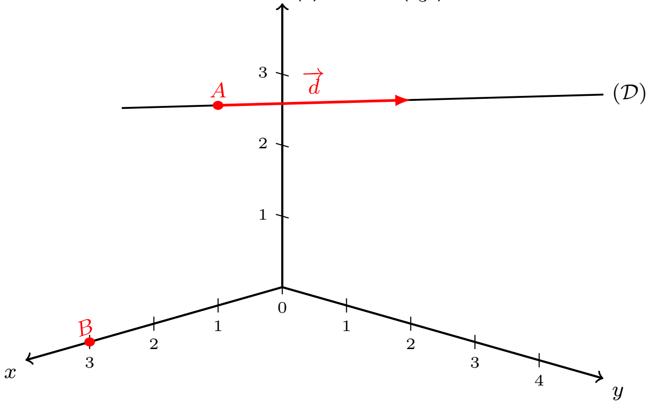


Exemple n° 2 : On considère la droite $\mathcal{D} = (A, \overrightarrow{d})$ où $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$



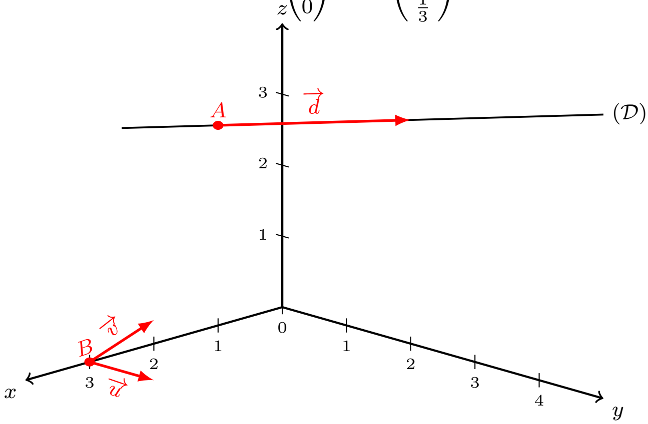
Exemple n° 2 : On considère la droite $\mathcal{D} = (A, \overrightarrow{d})$ où $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$

et le plan $\mathcal{P} = (B, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.



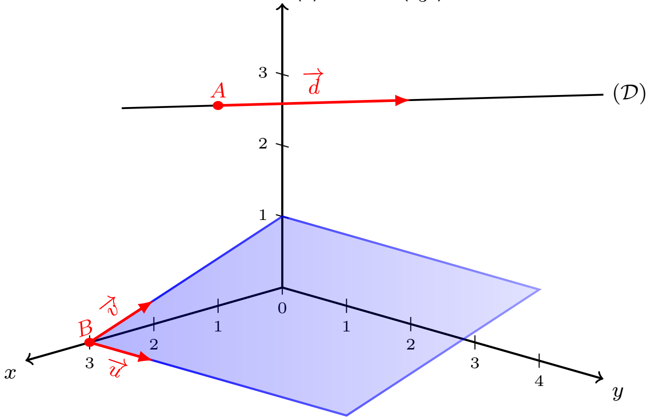
Exemple n° 2 : On considère la droite $\mathcal{D} = (A, \overrightarrow{d})$ où $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$

et le plan $\mathcal{P} = (B, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.



Exemple n° 2 : On considère la droite $\mathcal{D} = (A, \overrightarrow{d})$ où $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$

et le plan $\mathcal{P} = (B, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.



On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{d}} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in$$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que
$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$
Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} =$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

$$a\underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d}} \iff \begin{cases} \quad = \\ \quad = \\ \quad = \end{cases} \quad \begin{cases} b = \\ a = \\ b = \end{cases}$$

$$\iff \overrightarrow{d} = \ldots\ldots\ldots \quad \text{donc}$$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

$$a\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d}} \iff \left\{ \begin{array}{l} \quad = \\ \quad = \\ \quad = \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b = \\ a = \\ b = \end{array} \right.$$

$$\iff \overrightarrow{d} = \dots\dots\dots \quad \text{donc}$$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

$$a\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d}} \iff \begin{cases} \quad = \\ \quad = \\ \quad = \end{cases} \quad \begin{cases} b = \\ a = \\ b = \end{cases}$$

$$\iff \overrightarrow{d} = \dots\dots\dots \quad \text{donc}$$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

$$a\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d}} \iff \left\{ \begin{array}{l} \quad = \\ \quad = \\ \quad = \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b = \\ a = \\ b = \end{array} \right.$$

$$\iff \overrightarrow{d} = \ldots\ldots\ldots \quad \text{donc}$$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

$$a\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d}} \iff \begin{cases} -b = \\ \quad = \\ \quad = \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \\ a = \\ b = \end{cases}$$

$$\iff \overrightarrow{d} = \dots\dots\dots \quad \text{donc}$$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

$$a\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d}} \iff \begin{cases} -b = -1 \\ \quad = \\ \quad = \end{cases} \quad \begin{cases} b = \\ a = \\ b = \end{cases}$$

$$\iff \overrightarrow{d} = \ldots\ldots\ldots \quad \text{donc}$$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

$$a\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d}} \iff \begin{cases} -b = -1 \\ a = \\ \quad = \end{cases} \quad \begin{cases} b = \\ a = \\ b = \end{cases}$$

$$\iff \overrightarrow{d} = \ldots\ldots\ldots \text{ donc}$$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

$$a\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d}} \iff \begin{cases} -b = -1 \\ a = 2 \\ \quad = \end{cases} \begin{cases} b = \\ a = \\ b = \end{cases}$$

$$\iff \overrightarrow{d} = \dots\dots\dots \quad \text{donc}$$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

$$a\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d}} \iff \begin{cases} -b = -1 \\ a = 2 \\ \frac{1}{3}b = \end{cases} \quad \begin{cases} b = \\ a = \\ b = \end{cases}$$

$$\iff \overrightarrow{d} = \ldots\ldots\ldots \quad \text{donc}$$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

$$a\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d}} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -b & = & -1 \\ a & = & 2 \\ \frac{1}{3}b & = & \frac{1}{3} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b = \\ a = \\ b = \end{array} \right.$$

$$\iff \overrightarrow{d} = \ldots\ldots\ldots \quad \text{donc}$$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

$$a\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d}} \iff \begin{cases} -b = -1 \\ a = 2 \\ \frac{1}{3}b = \frac{1}{3} \end{cases} \begin{cases} b = 1 \\ a = \\ b = \end{cases}$$

$$\iff \overrightarrow{d} = \ldots\ldots\ldots \quad \text{donc}$$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

$$a \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d}} \iff \begin{cases} -b = -1 \\ a = 2 \\ \frac{1}{3}b = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \\ b = \end{cases}$$

$$\iff \overrightarrow{d} = \ldots\ldots\ldots \quad \text{donc}$$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

$$a\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d}} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -b & = & -1 \\ a & = & 2 \\ \frac{1}{3}b & = & \frac{1}{3} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} b = 1 \\ a = 2 \\ b = 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \overrightarrow{d} = \ldots\ldots\ldots \quad \text{donc}$$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

$$a\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d}} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -b & = & -1 \\ a & = & 2 \\ \frac{1}{3}b & = & \frac{1}{3} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b = 1 \\ a = 2 \\ b = 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \text{ donc}$$

On note $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{d} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{d}$, et $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ engendrent un plan vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires.**
2. Pour démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que

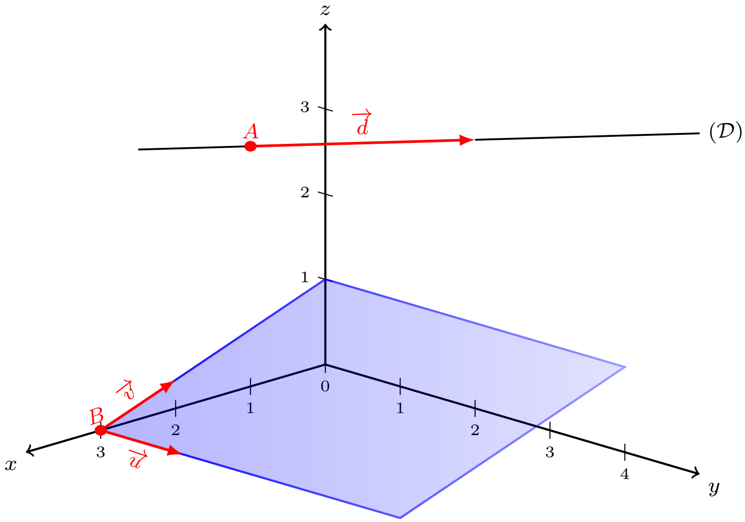
$$\overrightarrow{d} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

Ce qui revient à démontrer qu'il existe deux scalaires a et b tels que $\overrightarrow{d} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

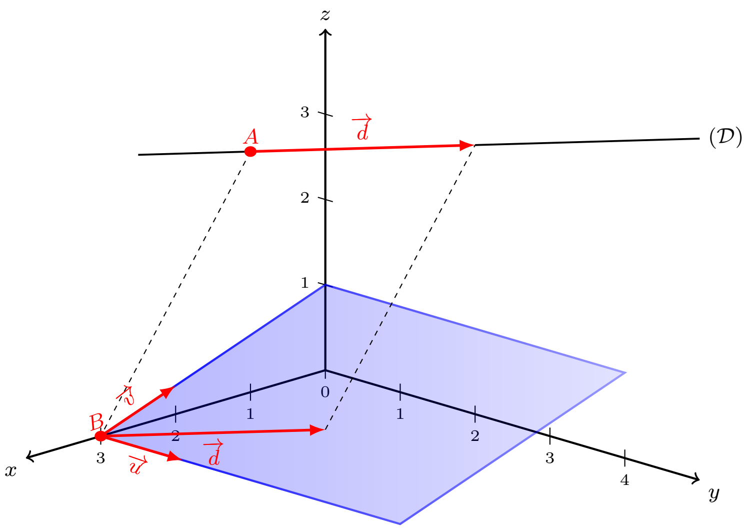
$$a\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d}} \iff \begin{cases} -b = -1 \\ a = 2 \\ \frac{1}{3}b = \frac{1}{3} \end{cases} \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\iff \overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \text{ donc } (\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P})$$

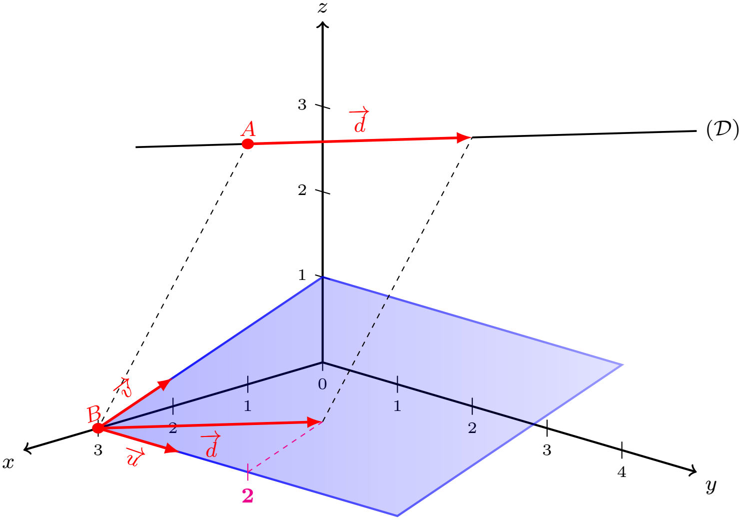
$$\iff \quad \overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \text{ donc } (\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P})$$



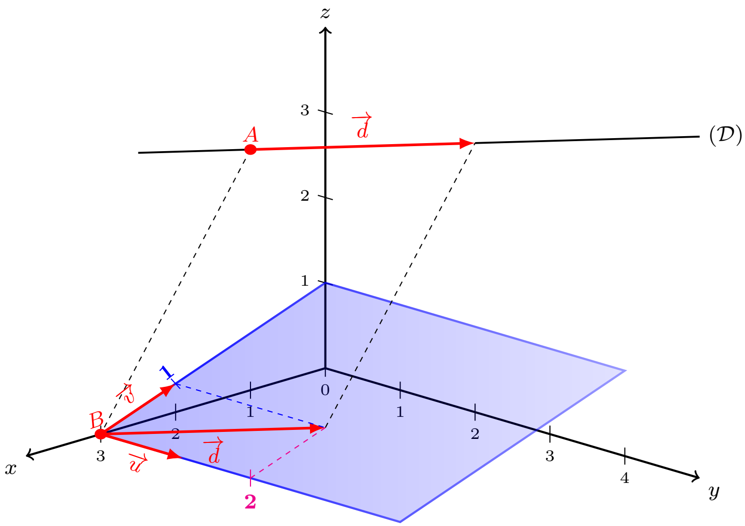
$\iff \quad \overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ donc $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P})$



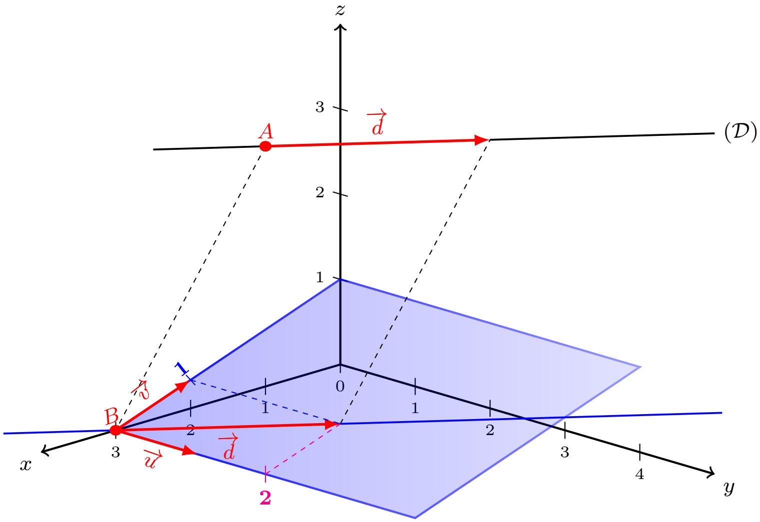
$\iff \quad \overrightarrow{d} = \mathbf{2}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ donc $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P})$



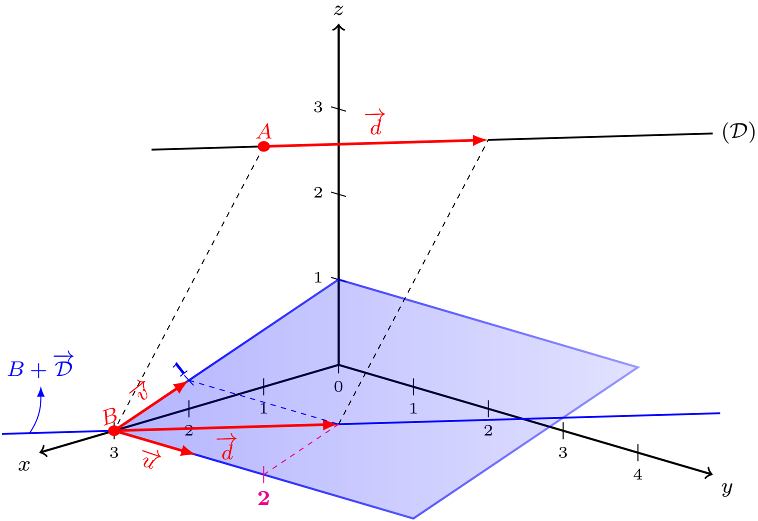
$\iff \quad \overrightarrow{d} = \mathbf{2}\overrightarrow{u} + \mathbf{1}\overrightarrow{v}$ donc $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P})$



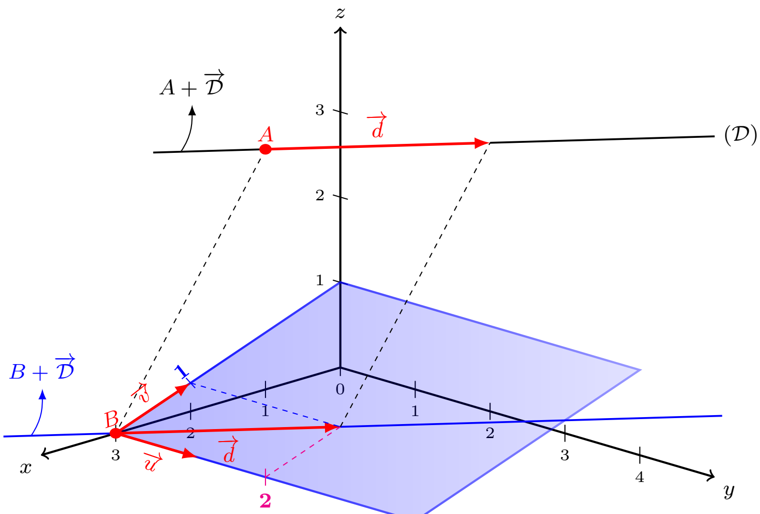
$\iff \quad \overrightarrow{d} = \mathbf{2}\,\overrightarrow{u} + \mathbf{1}\,\overrightarrow{v}$ donc $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P})$



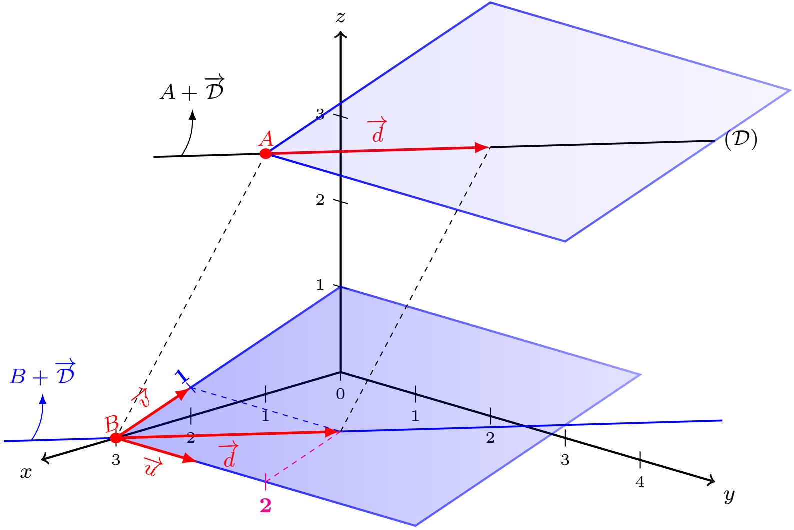
$$\iff \quad \overrightarrow{d} = \mathbf{2}\,\overrightarrow{u} + \mathbf{1}\,\overrightarrow{v} \text{ donc } (\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P})$$



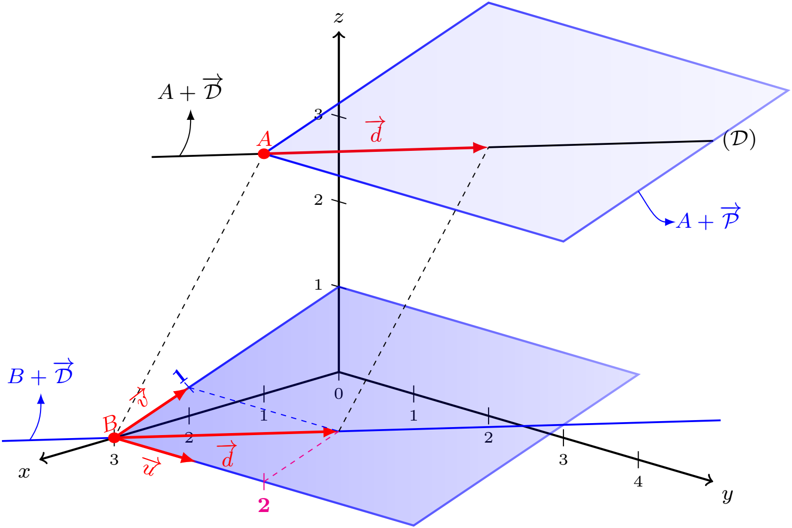
$$\iff \quad \overrightarrow{d} = \mathbf{2}\overrightarrow{u} + \mathbf{1}\overrightarrow{v} \text{ donc } (\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P})$$



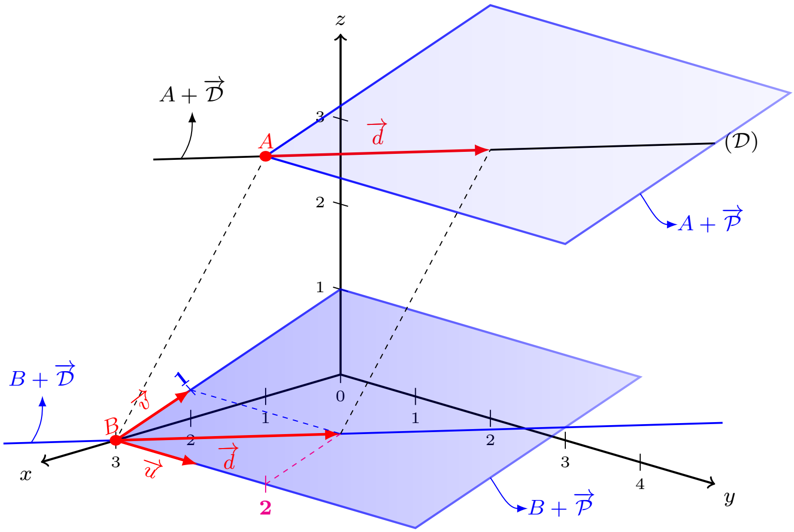
$\iff \quad \overrightarrow{d} = \mathbf{2}\overrightarrow{u} + \mathbf{1}\overrightarrow{v}$ donc $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P})$



$$\iff \overrightarrow{d} = \mathbf{2}\overrightarrow{u} + \mathbf{1}\overrightarrow{v} \text{ donc } (\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P})$$



$$\iff \overrightarrow{d} = \mathbf{2}\,\overrightarrow{u} + \mathbf{1}\,\overrightarrow{v} \text{ donc } (\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P})$$



3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrons que $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$ est un plan vectoriel.

   Il suffit de démontrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrons que $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$ est un plan vectoriel.

   Il suffit de démontrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas **colinéaires**.

   Cherchons un scalaire a tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{v}}$:

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrons que $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$ est un plan vectoriel.

   Il suffit de démontrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas **colinéaires**.

   Cherchons un scalaire a tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{v}}$:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} = \boldsymbol{a}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right.$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrons que $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$ est un plan vectoriel.

   Il suffit de démontrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas **colinéaires**.

   Cherchons un scalaire a tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{v}}$:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} = \boldsymbol{a}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\mathbf{4 = \boldsymbol{a} \times 0 = 0}\\ \\ \end{cases}$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrons que $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$ est un plan vectoriel.

   Il suffit de démontrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas **colinéaires**.

   Cherchons un scalaire a tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{v}}$:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} = \boldsymbol{a}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\mathbf{4 = a \times 0 = 0}\\\mathbf{0 = a \times 3}\\ \end{cases}$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrons que $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$ est un plan vectoriel.

   Il suffit de démontrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas **colinéaires**.

   Cherchons un scalaire a tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{v}}$:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} = \boldsymbol{a}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\mathbf{4 = a \times 0 = 0}\\\mathbf{0 = a \times 3}\\\mathbf{2 = a \times 1}\end{cases}$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrons que $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$ est un plan vectoriel.

   Il suffit de démontrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas **colinéaires**.

   Cherchons un scalaire a tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{v}}$:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} = \boldsymbol{a}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\mathbf{4} = \boldsymbol{a}\times\mathbf{0} = \mathbf{0}\\ \mathbf{0} = \boldsymbol{a}\times\mathbf{3}\\ \mathbf{2} = \boldsymbol{a}\times\mathbf{1}\end{cases}$$ **qui n'a pas de solution.**

   Les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrons que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ est un plan vectoriel.

   Il suffit de démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas **colinéaires**.

   Cherchons un scalaire a tel que $\boldsymbol{\vec{u} = a\vec{v}}$:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} = \boldsymbol{a}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\mathbf{4 = a \times 0 = 0}\\\mathbf{0 = a \times 3}\\\mathbf{2 = a \times 1}\end{cases}$$

qui n'a pas de solution.

Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas **proportionnelles**,

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrons que $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ est un plan vectoriel.

   Il suffit de démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas **colinéaires**.

   Cherchons un scalaire a tel que $\boldsymbol{\vec{u} = a\vec{v}}$:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} = \boldsymbol{a}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\mathbf{4 = \boldsymbol{a} \times 0 = 0}\\\mathbf{0 = \boldsymbol{a} \times 3}\\\mathbf{2 = \boldsymbol{a} \times 1}\end{cases}$$

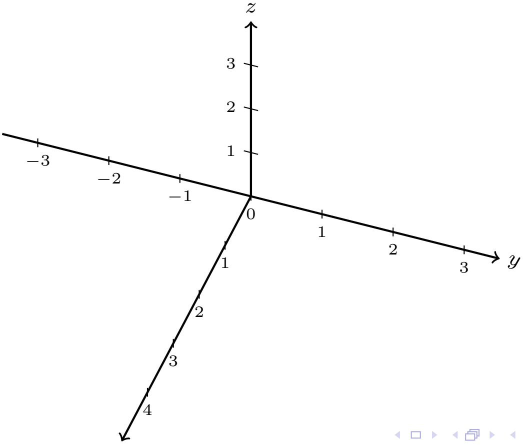
qui n'a pas de solution.

Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas **proportionnelles**,
donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas **colinéaires**.

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

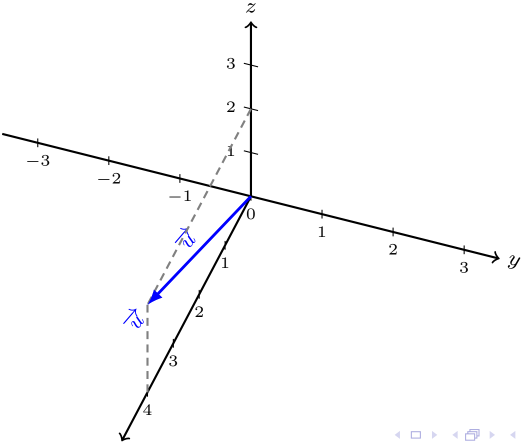
2. Trace les vecteurs dans le repère ci-contre, et construis un plan vectoriel.



3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

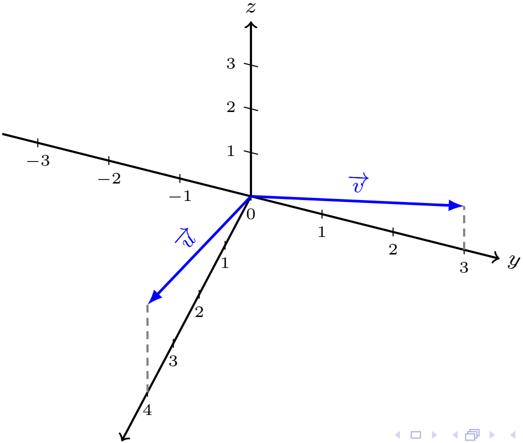
2. Trace les vecteurs dans le repère ci-contre, et construis un plan vectoriel.



3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

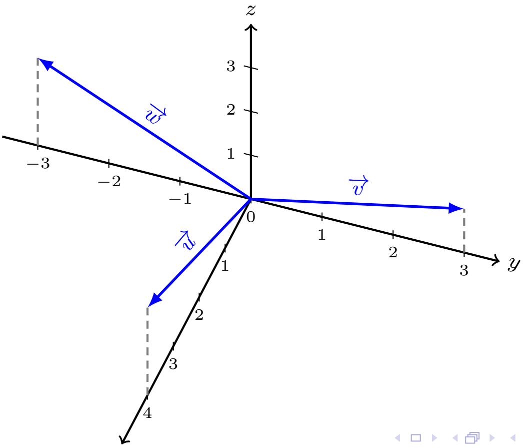
2. Trace les vecteurs dans le repère ci-contre, et construis un plan vectoriel.



3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

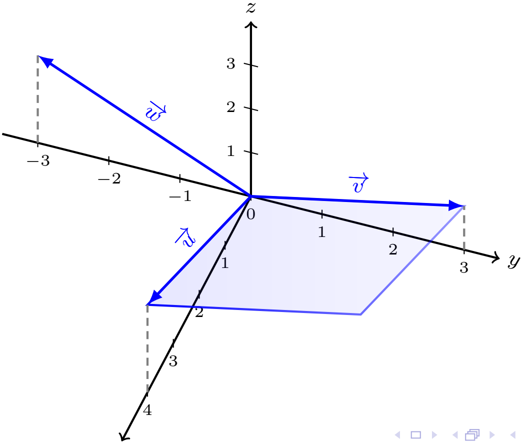
2. Trace les vecteurs dans le repère ci-contre, et construis un plan vectoriel.



3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

2. Trace les vecteurs dans le repère ci-contre, et construis un plan vectoriel.



3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

3. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$.

$$\overrightarrow{w}\in\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle \iff \overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

3. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$.

$$\overrightarrow{w}\in\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle \iff \overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}+$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

3. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.

$$\overrightarrow{w} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \iff \overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

3. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.

$$\overrightarrow{w} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \iff \overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \quad = \\ \quad = \\ \quad = \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \\ b = \\ 2 = \end{cases}$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

3. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$.

$$\overrightarrow{w}\in\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle \iff \overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}\mathbf{0} & = \\ & = \\ & = \end{cases} \qquad \begin{cases}a & = \\ b & = \\ 2 & = \end{cases}$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

3. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$.

$$\overrightarrow{w}\in\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle \iff \overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}\mathbf{0} &= \mathbf{4a}\\ &=\\ &=\end{cases} \qquad \begin{cases}a =\\ b =\\ 2 =\end{cases}$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

3. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$.

$$\overrightarrow{w}\in\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle \iff \overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}\mathbf{0} &= \mathbf{4a}\\ \mathbf{-3} &= \\ &= \end{cases} \qquad \begin{cases}a =\\ b =\\ 2 =\end{cases}$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

3. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$.

$$\overrightarrow{w}\in\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle \iff \overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}\mathbf{0} = \mathbf{4a}\\ \mathbf{-3} = \mathbf{3b}\\ \quad = \end{cases} \qquad \begin{cases}a =\\ b =\\ 2 =\end{cases}$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

3. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$.

$$\overrightarrow{w}\in\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle \iff \overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl}\mathbf{0} &= \mathbf{4a}\\ \mathbf{-3} &= \mathbf{3b}\\ \mathbf{2} &= \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl}a &= \\ b &= \\ 2 &= \end{array}\right.$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

3. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$.

$$\overrightarrow{w}\in\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle \iff \overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}\mathbf{0} &= \mathbf{4a}\\ \mathbf{-3} &= \mathbf{3b}\\ \mathbf{2} &= \mathbf{2a+b}\end{cases} \quad \begin{cases}a =\\ b =\\ 2 =\end{cases}$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

3. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.

$$\overrightarrow{w} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \iff \overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \mathbf{0} & = \mathbf{4a} \\ \mathbf{-3} & = \mathbf{3b} \\ \mathbf{2} & = \mathbf{2a+b} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \mathbf{0} \\ b = \\ 2 = \end{cases}$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

3. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$.

$$\overrightarrow{w}\in\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle \iff \overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}\mathbf{0} &= \mathbf{4a}\\ \mathbf{-3} &= \mathbf{3b}\\ \mathbf{2} &= \mathbf{2a+b}\end{cases} \quad \begin{cases}a = \mathbf{0}\\ b = \mathbf{-1}\\ 2 = \end{cases}$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

3. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$.

$$\overrightarrow{w}\in\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle \iff \overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}\mathbf{0} &= \mathbf{4a}\\ \mathbf{-3} &= \mathbf{3b}\\ \mathbf{2} &= \mathbf{2a+b}\end{cases} \quad \begin{cases}a = \mathbf{0}\\ b = \mathbf{-1}\\ 2 = \mathbf{-1}\end{cases}$$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

3. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$.

$$\overrightarrow{w}\in\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle \iff \overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}\mathbf{0} &= \mathbf{4a}\\ \mathbf{-3} &= \mathbf{3b}\\ \mathbf{2} &= \mathbf{2a+b}\end{cases} \quad \begin{cases}a=\mathbf{0}\\ b=\mathbf{-1}\\ 2=\mathbf{-1}\end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ donc

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

3. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.

$$\overrightarrow{w} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \iff \overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \mathbf{0} &= \mathbf{4a} \\ \mathbf{-3} &= \mathbf{3b} \\ \mathbf{2} &= \mathbf{2a+b} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \mathbf{0} \\ b = \mathbf{-1} \\ 2 = \mathbf{-1} \end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ donc $\overrightarrow{w} \notin \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par trois vecteurs non nuls :

Exemple n° 3 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

3. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$.

$$\overrightarrow{w}\in\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle \iff \overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}\mathbf{0} &= \mathbf{4a}\\ \mathbf{-3} &= \mathbf{3b}\\ \mathbf{2} &= \mathbf{2a+b}\end{cases} \quad \begin{cases}a=\mathbf{0}\\ b=\mathbf{-1}\\ 2=\mathbf{-1}\end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ donc $\overrightarrow{w}\notin\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$

On verra bientôt que la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ engendre tout l'espace $\mathbb{R}^3$.

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$?

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} =$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \quad = \\ \quad = \\ \quad = \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} L_1 : & = \\ L_2 + \ldots L_1 : & = \\ L_3 + \ldots L_1 : & = \end{array}\right.$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\mathbf{-2} = \mathbf{-2a} \\ \quad = \\ \quad = \end{cases} \qquad \begin{cases}L_1 : & = \\ L_2 + \ldots L_1 : & = \\ L_3 + \ldots L_1 : & = \end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\vec{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{-2} = \mathbf{-2a + b} \\ \quad = \\ \quad = \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 : \qquad = \\ L_2 + \ldots L_1 : \qquad = \\ L_3 + \ldots L_1 : \qquad = \end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\vec{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{-2} = \mathbf{-2a + b} \\ \mathbf{1} = \\ \quad = \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 : \qquad = \\ L_2 + \dots L_1 : \qquad = \\ L_3 + \dots L_1 : \qquad = \end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\vec{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2 = -2a + b \\ 1 = 3a - 2b \\ \quad = \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 : \quad = \\ L_2 + \ldots L_1 : \quad = \\ L_3 + \ldots L_1 : \quad = \end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{-2} = \mathbf{-2a + b} \\ \mathbf{1} = \mathbf{3a - 2b} \\ \mathbf{-1} = \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 : \qquad = \\ L_2 + \ldots L_1 : \qquad = \\ L_3 + \ldots L_1 : \qquad = \end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\mathbf{-2} = \mathbf{-2a} + \mathbf{b}\\ \mathbf{1} = \mathbf{3a} - \mathbf{2b}\\ \mathbf{-1} = \mathbf{5a} - \mathbf{4b}\end{cases} \qquad \begin{cases}L_1 : \qquad\qquad =\\ L_2+\ldots L_1 : \qquad =\\ L_3+\ldots L_1 : \qquad =\end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2 = -2a + b \\ 1 = 3a - 2b \\ -1 = 5a - 4b \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 : & -2 = -2a + b \\ L_2 + \ldots L_1 : & = \\ L_3 + \ldots L_1 : & = \end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{-2} = \mathbf{-2a} + \mathbf{b} \\ \mathbf{1} = \mathbf{3a} - \mathbf{2b} \\ \mathbf{-1} = \mathbf{5a} - \mathbf{4b} \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 : & \mathbf{-2} = \mathbf{-2a} + \mathbf{b} \\ L_2 + \mathbf{2}L_1 : & = \\ L_3 + \ldots L_1 : & = \end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\mathbf{-2} = \mathbf{-2a} + \mathbf{b}\\ \mathbf{1} = \mathbf{3a} - \mathbf{2b}\\ \mathbf{-1} = \mathbf{5a} - \mathbf{4b}\end{cases} \quad \begin{cases}L_1 : & \mathbf{-2} = \mathbf{-2a} + \mathbf{b}\\ L_2 + \mathbf{2}L_1 : & \mathbf{-3} = \\ L_3 + \ldots L_1 : & =\end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\mathbf{-2} = \mathbf{-2a} + \mathbf{b}\\ \mathbf{1} = \mathbf{3a} - \mathbf{2b}\\ \mathbf{-1} = \mathbf{5a} - \mathbf{4b}\end{cases} \quad \begin{cases}L_1 : & \mathbf{-2} = \mathbf{-2a+b}\\ L_2+\mathbf{2}L_1 : & \mathbf{-3} = \mathbf{-a}\\ L_3+\ldots L_1 : & =\end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{-2} = \mathbf{-2a} + \mathbf{b} \\ \mathbf{1} = \mathbf{3a} - \mathbf{2b} \\ \mathbf{-1} = \mathbf{5a} - \mathbf{4b} \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 : \quad \mathbf{-2} = \mathbf{-2a} + \mathbf{b} \\ L_2 + \mathbf{2}L_1 : \mathbf{-3} = \mathbf{-a} \\ L_3 + \mathbf{4}L_1 : \quad = \end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\vec{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\mathbf{-2} = \mathbf{-2a} + \mathbf{b}\\ \mathbf{1} = \mathbf{3a} - \mathbf{2b}\\ \mathbf{-1} = \mathbf{5a} - \mathbf{4b}\end{cases} \quad \begin{cases}L_1 : & \mathbf{-2} = \mathbf{-2a} + \mathbf{b}\\ L_2 + \mathbf{2}L_1 : & \mathbf{-3} = \mathbf{-a}\\ L_3 + \mathbf{4}L_1 : & \mathbf{-9} = \end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\mathbf{-2} = \mathbf{-2a} + \mathbf{b}\\ \mathbf{1} = \mathbf{3a} - \mathbf{2b}\\ \mathbf{-1} = \mathbf{5a} - \mathbf{4b}\end{cases} \qquad \begin{cases}L_1 : \quad \mathbf{-2} = \mathbf{-2a} + \mathbf{b}\\ L_2+\mathbf{2}L_1 : \mathbf{-3} = \mathbf{-a}\\ L_3+\mathbf{4}L_1 : \mathbf{-9} = \mathbf{-3a}\end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2 = -2a + b \\ 1 = 3a - 2b \\ -1 = 5a - 4b \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 : & -2 = -2a + b \\ L_2 + 2L_1 : & -3 = -a \\ L_3 + 4L_1 : & -9 = -3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \\ a = \\ a = \end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-2 = -2a + b\\ 1 = 3a - 2b\\ -1 = 5a - 4b\end{cases} \quad \begin{cases}L_1 : & -2 = -2a + b\\ L_2+2L_1 : & -3 = -a\\ L_3+4L_1 : & -9 = -3a\end{cases}$$

$$\begin{cases}b = -2+2a = \\ a = \\ a = \end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\mathbf{-2}=\mathbf{-2a+b}\\ \mathbf{1}=\mathbf{3a-2b}\\ \mathbf{-1}=\mathbf{5a-4b}\end{cases}\quad \begin{cases}L_1: & \mathbf{-2}=\mathbf{-2a+b}\\ L_2+\mathbf{2}L_1: & \mathbf{-3}=\mathbf{-a}\\ L_3+\mathbf{4}L_1: & \mathbf{-9}=\mathbf{-3a}\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=\mathbf{-2+2a=4}\\ a=\\ a=\end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-2=-2a+b\\1=3a-2b\\-1=5a-4b\end{cases}\quad\begin{cases}L_1: & -2=-2a+b\\L_2+2L_1: & -3=-a\\L_3+4L_1: & -9=-3a\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=-2+2a=4\\a=3\\a=\end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{-2} = \mathbf{-2a + b} \\ \mathbf{1} = \mathbf{3a - 2b} \\ \mathbf{-1} = \mathbf{5a - 4b} \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 : & \mathbf{-2} = \mathbf{-2a + b} \\ L_2 + \mathbf{2}L_1 : & \mathbf{-3} = \mathbf{-a} \\ L_3 + \mathbf{4}L_1 : & \mathbf{-9} = \mathbf{-3a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \mathbf{-2 + 2a = 4} \\ a = \mathbf{3} \\ a = \mathbf{3} \end{cases}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\vec{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{-2} = \mathbf{-2a} + \mathbf{b} \\ \mathbf{1} = \mathbf{3a} - \mathbf{2b} \\ \mathbf{-1} = \mathbf{5a} - \mathbf{4b} \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 : & \mathbf{-2} = \mathbf{-2a + b} \\ L_2 + \mathbf{2}L_1 : & \mathbf{-3} = \mathbf{-a} \\ L_3 + \mathbf{4}L_1 : & \mathbf{-9} = \mathbf{-3a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \mathbf{-2 + 2a = 4} \\ a = \mathbf{3} \\ a = \mathbf{3} \end{cases} \qquad \boldsymbol{\vec{w} = 3\vec{u} + 4\vec{v} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\vec{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\mathbf{-2} = \mathbf{-2a + b}\\ \mathbf{1} = \mathbf{3a - 2b}\\ \mathbf{-1} = \mathbf{5a - 4b}\end{cases} \qquad \begin{cases}L_1 : & \mathbf{-2} = \mathbf{-2a + b}\\ L_2+\mathbf{2}L_1 : & \mathbf{-3} = \mathbf{-a}\\ L_3+\mathbf{4}L_1 : & \mathbf{-9} = \mathbf{-3a}\end{cases}$$

$$\begin{cases}b = \mathbf{-2+2a=4}\\ a = \mathbf{3}\\ a = \mathbf{3}\end{cases} \qquad \boldsymbol{\vec{w} = 3\vec{u}+4\vec{v} \in \langle\vec{u},\vec{v}\rangle}$$

2. Le vecteur $\vec{v}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\vec{u},\vec{w}\rangle$?

$$\boldsymbol{\vec{v}} =$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\vec{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2 = -2a + b \\ 1 = 3a - 2b \\ -1 = 5a - 4b \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 : & -2 = -2a + b \\ L_2 + 2L_1 : & -3 = -a \\ L_3 + 4L_1 : & -9 = -3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2 + 2a = 4 \\ a = 3 \\ a = 3 \end{cases} \qquad \vec{w} = 3\vec{u} + 4\vec{v} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

2. Le vecteur $\vec{v}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$?

$$\vec{v} = \frac{\vec{w} - 3\vec{u}}{4} =$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\vec{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2 = -2a + b \\ 1 = 3a - 2b \\ -1 = 5a - 4b \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 : & -2 = -2a + b \\ L_2 + 2L_1 : & -3 = -a \\ L_3 + 4L_1 : & -9 = -3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2 + 2a = 4 \\ a = 3 \\ a = 3 \end{cases} \qquad \vec{w} = 3\vec{u} + 4\vec{v} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

2. Le vecteur $\vec{v}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$?

$$\vec{v} = \frac{\vec{w} - 3\vec{u}}{4} = \frac{1}{4}\vec{w} - \frac{3}{4}\vec{u}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2 = -2a + b \\ 1 = 3a - 2b \\ -1 = 5a - 4b \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 : & -2 = -2a + b \\ L_2 + 2L_1 : & -3 = -a \\ L_3 + 4L_1 : & -9 = -3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2 + 2a = 4 \\ a = 3 \\ a = 3 \end{cases} \qquad \overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$$

2. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle$?

$\overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{w} - 3\overrightarrow{u}}{4} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{w} - \dfrac{3}{4}\overrightarrow{u}$ **donc** $\overrightarrow{v}$ **est une combinaison linéaire de** $\overrightarrow{u}$ **et** $\overrightarrow{v}$ **:**

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\vec{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b = \mathbf{-2+2a=4} \\ a = \mathbf{3} \\ a = \mathbf{3} \end{cases} \qquad \boldsymbol{\vec{w} = 3\vec{u} + 4\vec{v} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}$$

2. Le vecteur $\vec{v}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$?

$\boldsymbol{\vec{v} = \dfrac{\vec{w} - 3\vec{u}}{4} = \dfrac{1}{4}\vec{w} - \dfrac{3}{4}\vec{u}}$ **donc** $\vec{v}$ **est une combinaison linéaire de** $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **:**

$$\boldsymbol{\vec{v} \in \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b=\mathbf{-2+2a=4}\\ a=\mathbf{3}\\ a=\mathbf{3}\end{cases} \qquad \boldsymbol{\overrightarrow{w}=3\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}\in\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle}$$

2. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\rangle$?

$\boldsymbol{\overrightarrow{v}=\frac{\overrightarrow{w}-3\overrightarrow{u}}{4}=\frac{1}{4}\overrightarrow{w}-\frac{3}{4}\overrightarrow{u}}$ **donc** $\overrightarrow{v}$ **est une combinaison linéaire de** $\overrightarrow{u}$ **et** $\overrightarrow{v}$ **:**

$$\boldsymbol{\overrightarrow{v}\in\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\rangle}$$

3. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle$?

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

   $$\overrightarrow{w}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}\iff\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

   $$\begin{cases}b=\mathbf{-2+2a=4}\\a=\mathbf{3}\\a=\mathbf{3}\end{cases}\qquad \boldsymbol{\overrightarrow{w}=3\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}\in\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle}$$

2. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\rangle$?

   $\boldsymbol{\overrightarrow{v}=\dfrac{\overrightarrow{w}-3\overrightarrow{u}}{4}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{w}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{u}}$ **donc** $\boldsymbol{\overrightarrow{v}}$ **est une combinaison linéaire de** $\boldsymbol{\overrightarrow{u}}$ **et** $\boldsymbol{\overrightarrow{v}}$ **:** $\boldsymbol{\overrightarrow{v}\in\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\rangle}$

3. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle$?

   $\boldsymbol{\overrightarrow{u}=}$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b = \mathbf{-2+2a=4} \\ a = \mathbf{3} \\ a = \mathbf{3} \end{cases} \qquad \boldsymbol{\overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v} \in \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle}$$

2. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\rangle$?

$\boldsymbol{\overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{w} - 3\overrightarrow{u}}{4} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{w} - \dfrac{3}{4}\overrightarrow{u}}$ **donc** $\boldsymbol{\overrightarrow{v}}$ **est une combinaison linéaire de** $\boldsymbol{\overrightarrow{u}}$ **et** $\boldsymbol{\overrightarrow{v}}$ **:**

$$\boldsymbol{\overrightarrow{v} \in \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\rangle}$$

3. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle$?

$$\boldsymbol{\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{w} - 4\overrightarrow{v}}{3} =}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\vec{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b = \mathbf{-2+2a=4} \\ a = \mathbf{3} \\ a = \mathbf{3} \end{cases} \qquad \boldsymbol{\vec{w} = 3\vec{u} + 4\vec{v} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}$$

2. Le vecteur $\vec{v}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$?

$\boldsymbol{\vec{v} = \dfrac{\vec{w} - 3\vec{u}}{4} = \dfrac{1}{4}\vec{w} - \dfrac{3}{4}\vec{u}}$ **donc** $\boldsymbol{\vec{v}}$ **est une combinaison linéaire de** $\boldsymbol{\vec{u}}$ **et** $\boldsymbol{\vec{v}}$ **:**

$$\boldsymbol{\vec{v} \in \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle}$$

3. Le vecteur $\vec{u}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$?

$$\boldsymbol{\vec{u} = \dfrac{\vec{w} - 4\vec{v}}{3} = \dfrac{1}{3}\vec{w} - \dfrac{4}{3}\vec{v}}$$

Exemple n° 4 : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\vec{w}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$?

   On recherche deux scalaires a et b tels que :

$$\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v} \iff \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b = \mathbf{-2+2a=4} \\ a = \mathbf{3} \\ a = \mathbf{3} \end{cases} \qquad \boldsymbol{\vec{w}=3\vec{u}+4\vec{v}\in\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}$$

2. Le vecteur $\vec{v}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\vec{u},\vec{w}\rangle$?

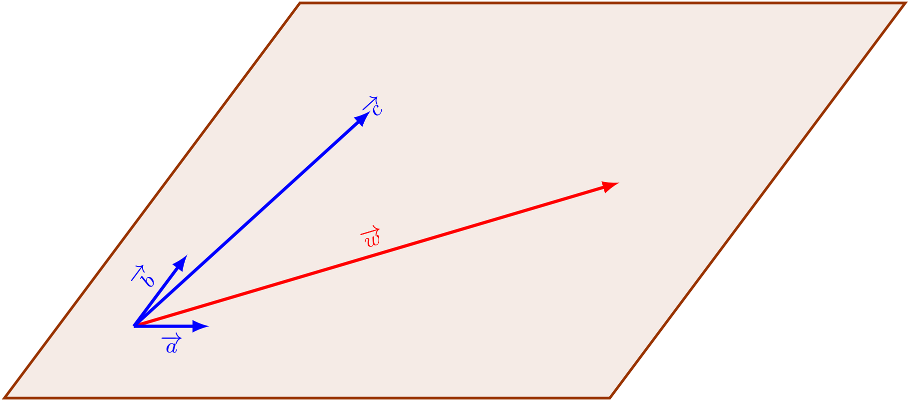
$\boldsymbol{\vec{v}=\dfrac{\vec{w}-3\vec{u}}{4}=\dfrac{1}{4}\vec{w}-\dfrac{3}{4}\vec{u}}$ **donc** $\boldsymbol{\vec{v}}$ **est une combinaison linéaire de** $\boldsymbol{\vec{u}}$ **et** $\boldsymbol{\vec{v}}$ **:** $\boldsymbol{\vec{v}\in\langle\vec{u},\vec{w}\rangle}$

3. Le vecteur $\vec{u}$ appartient-il au plan vectoriel $\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$?

$\boldsymbol{\vec{u}=\dfrac{\vec{w}-4\vec{v}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{w}-\dfrac{4}{3}\vec{v}}$ **donc** $\boldsymbol{\vec{u}\in\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}$

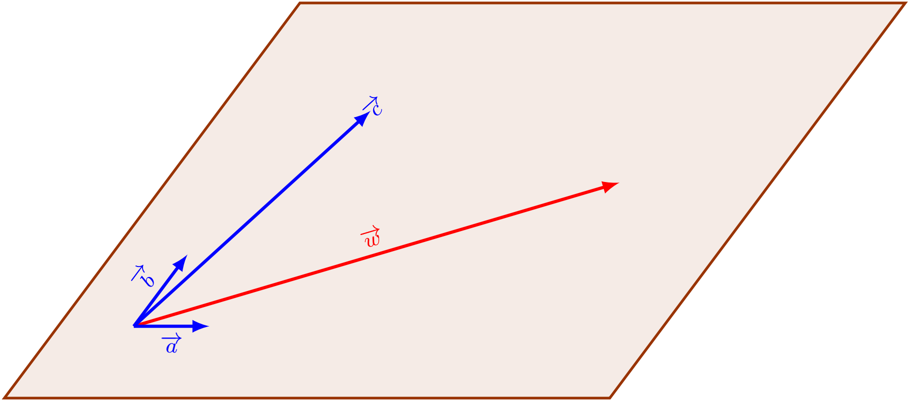
III. Familles libres, bases, et coordonnées.

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :



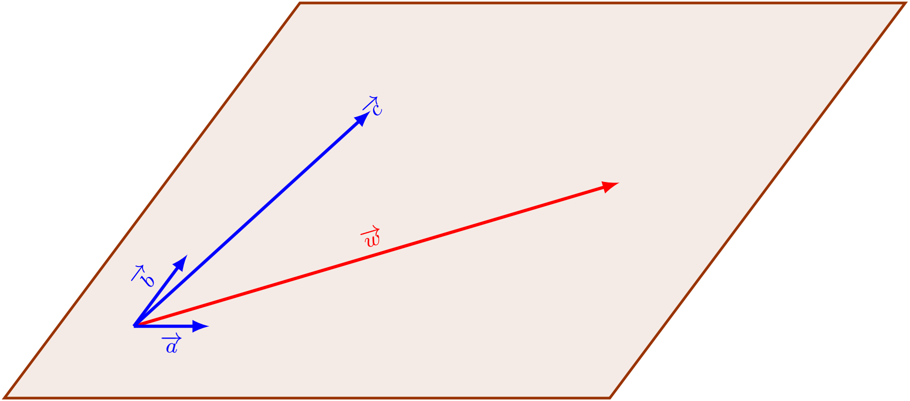
Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ engendrent un

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :



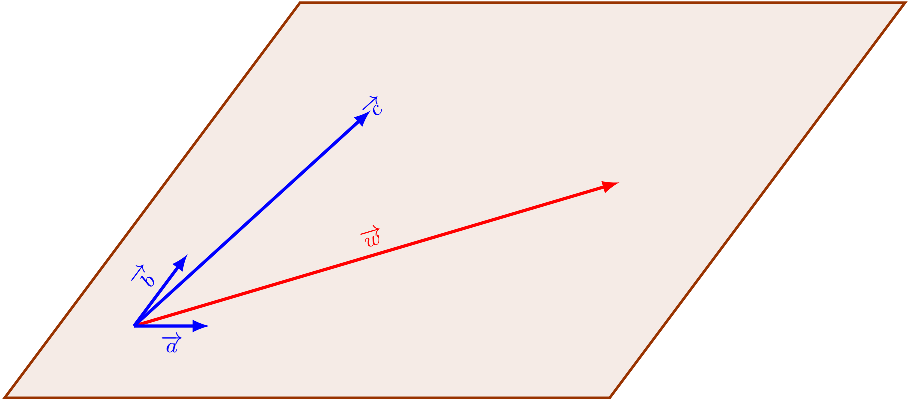
Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ engendrent un **plan**

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :



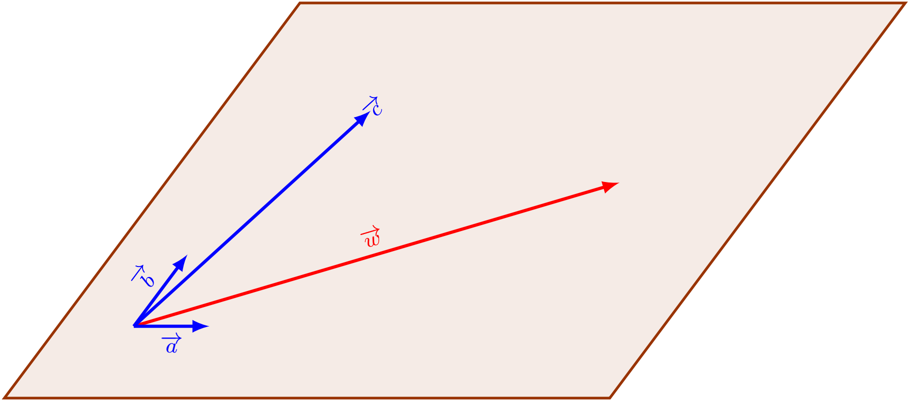
Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ engendrent un **plan** vectoriel, car

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :



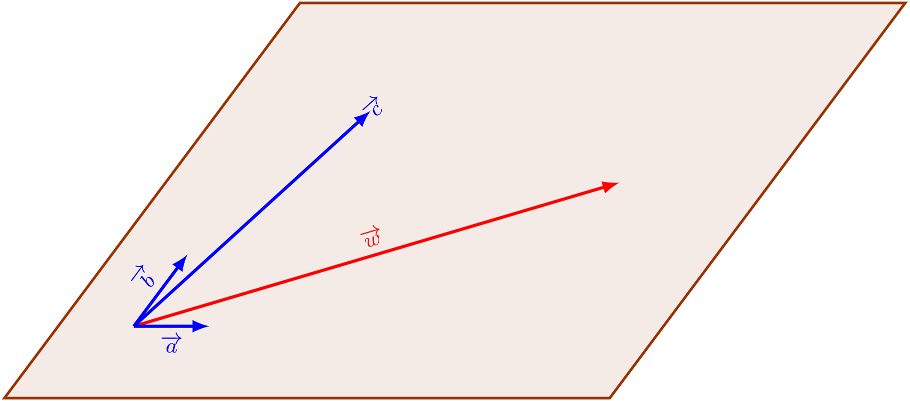
Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ engendrent un **plan** vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires**.

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :



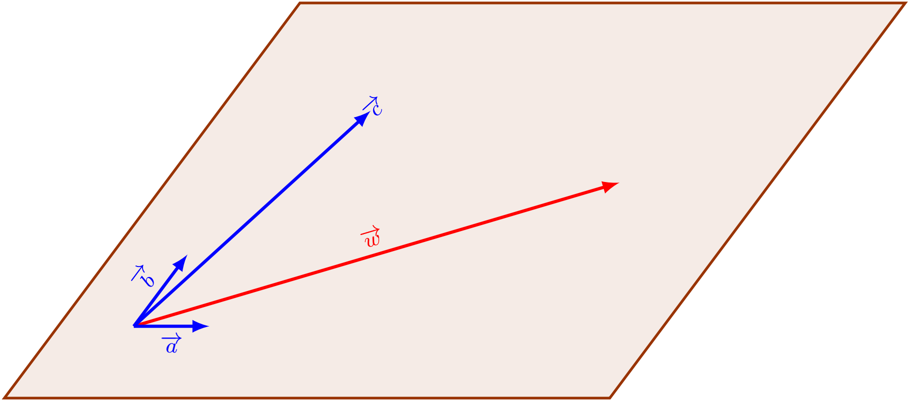
Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ engendrent un **plan** vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires**. Les trois vecteurs engendrent le même plan vectoriel, car $\overrightarrow{c}$ est une

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :



Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ engendrent un **plan** vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires**. Les trois vecteurs engendrent le même plan vectoriel, car $\overrightarrow{c}$ est une **combinaison linéaire** de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$:

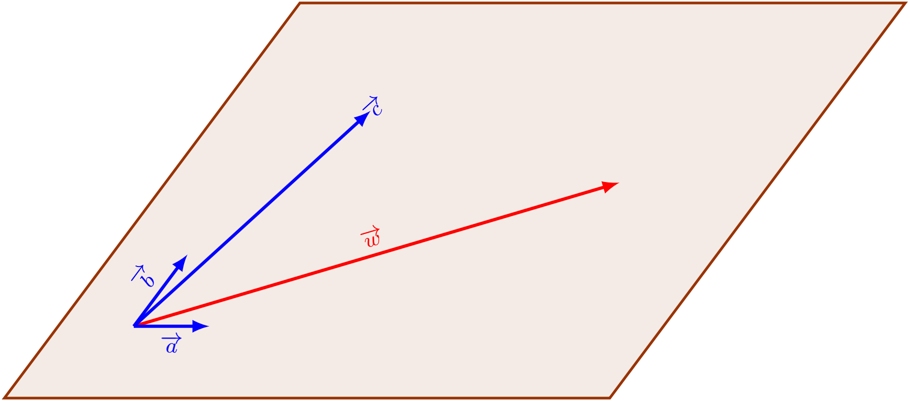
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :



Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ engendrent un **plan** vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires**. Les trois vecteurs engendrent le même plan vectoriel, car $\overrightarrow{c}$ est une **combinaison linéaire** de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$:

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle =$$

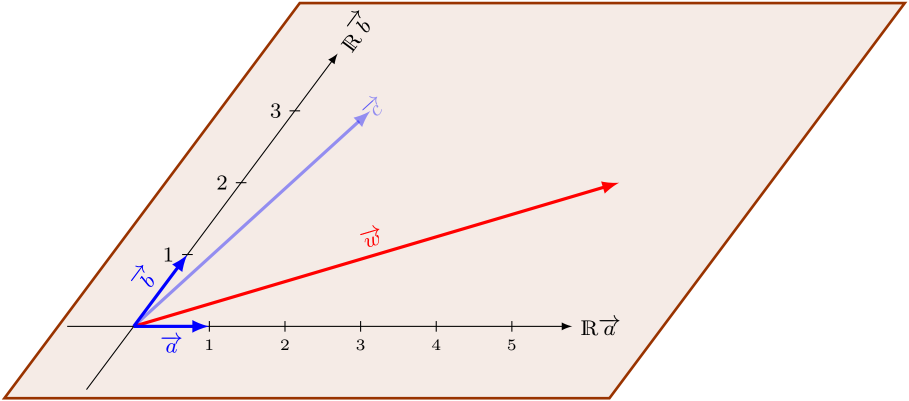
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :



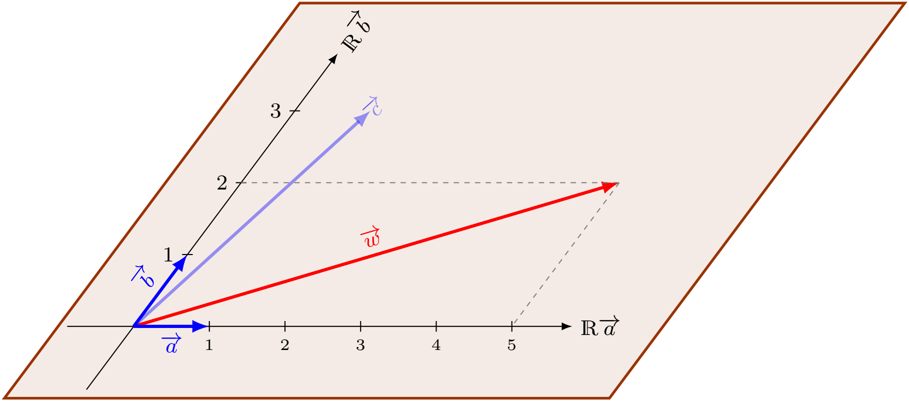
Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ engendrent un **plan** vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires**. Les trois vecteurs engendrent le même plan vectoriel, car $\overrightarrow{c}$ est une **combinaison linéaire** de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$:

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle = \langle \boldsymbol{\overrightarrow{a}}, \boldsymbol{\overrightarrow{b}} \rangle$$

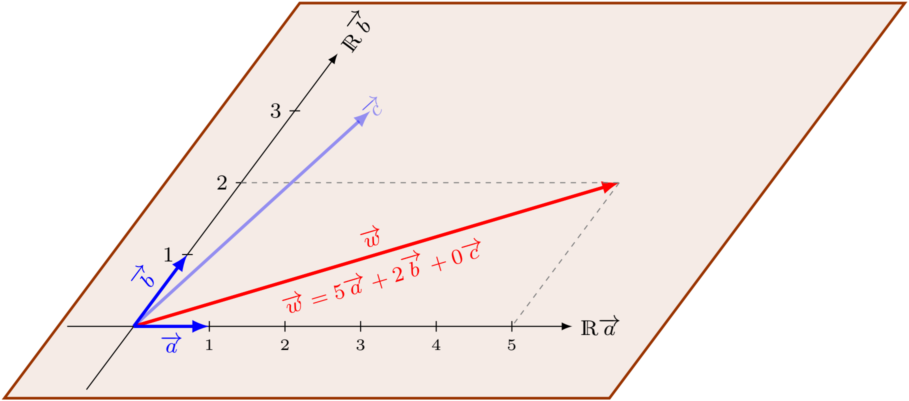
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :



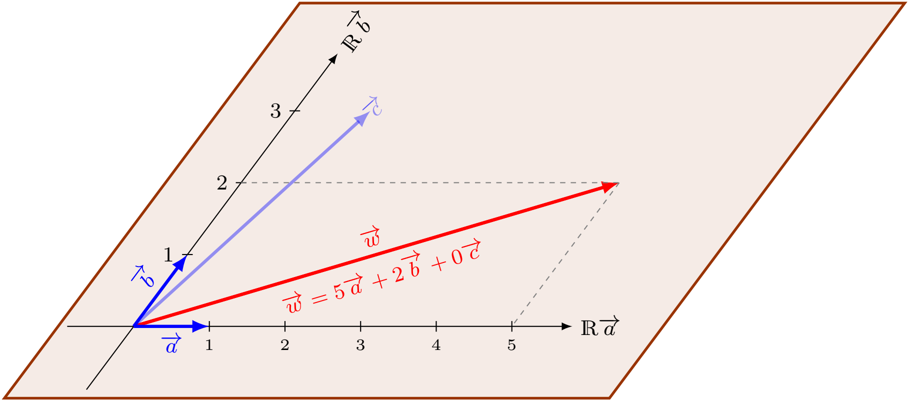
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :



Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :

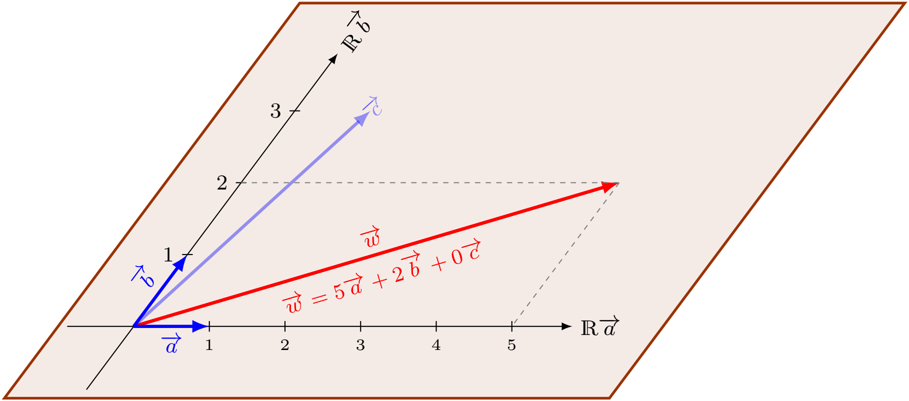


Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :



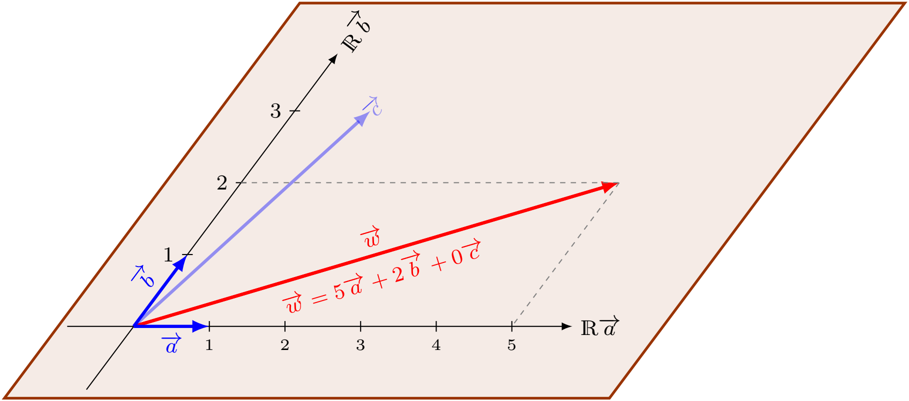
Dans le « repère sans **origine** » $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ aurait pour coordonnées $\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :



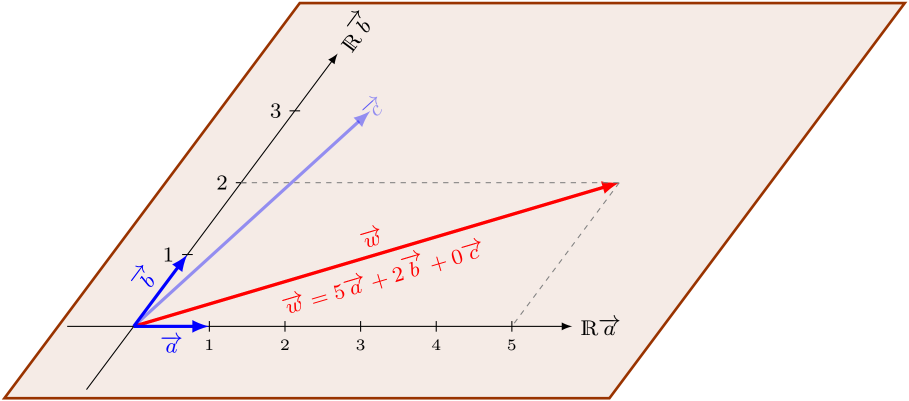
Dans le « repère sans **origine** » $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ aurait pour coordonnées $\begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :



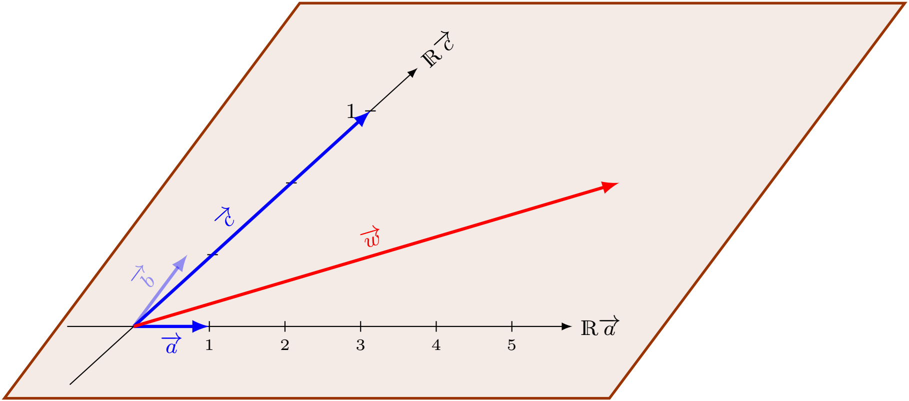
Dans le « repère sans **origine** » $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ aurait pour coordonnées $\begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \\ \dots \end{pmatrix}$

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :



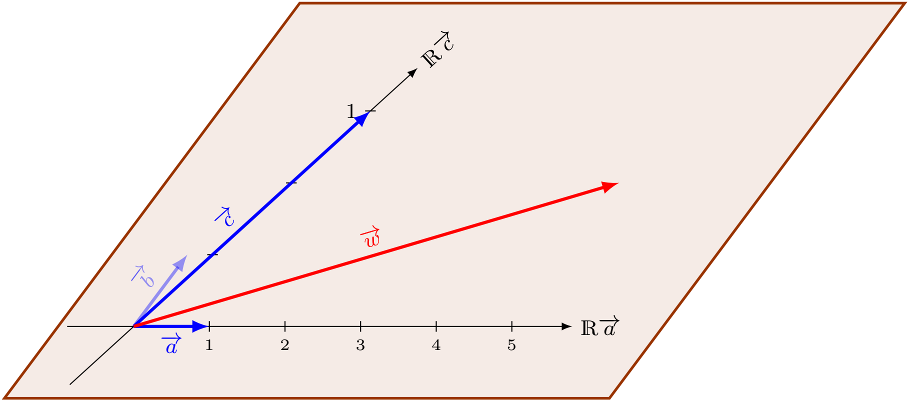
Dans le « repère sans **origine** » $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ aurait pour coordonnées $\begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :



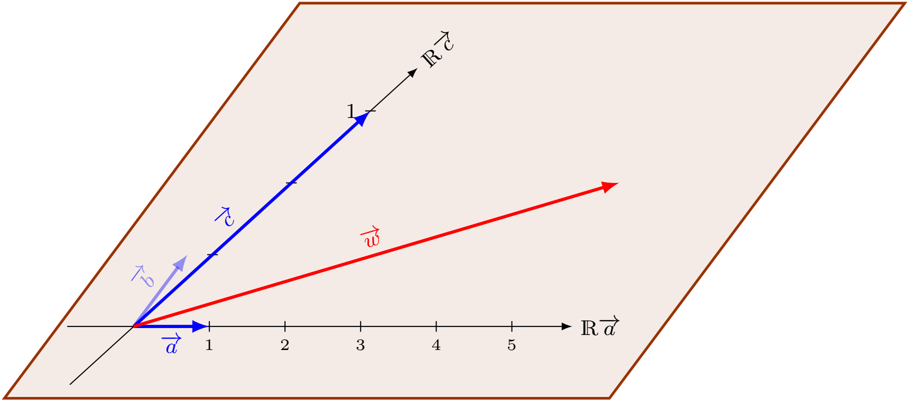
Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ engendrent un

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :



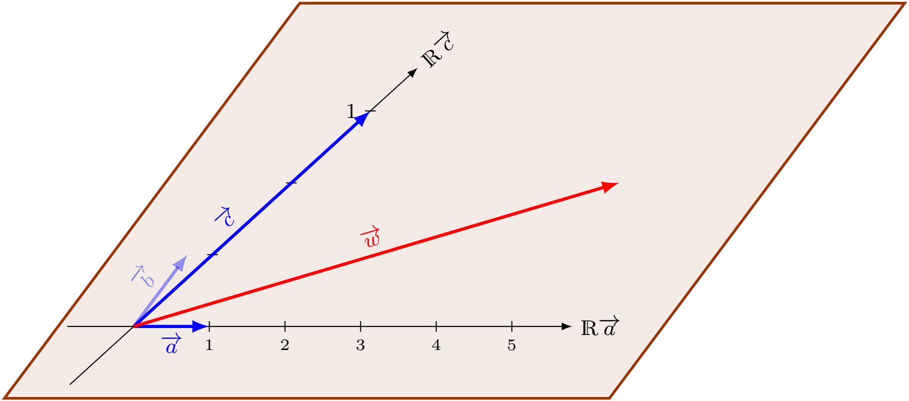
Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ engendrent un **plan**

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :



Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ engendrent un **plan** vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires**.

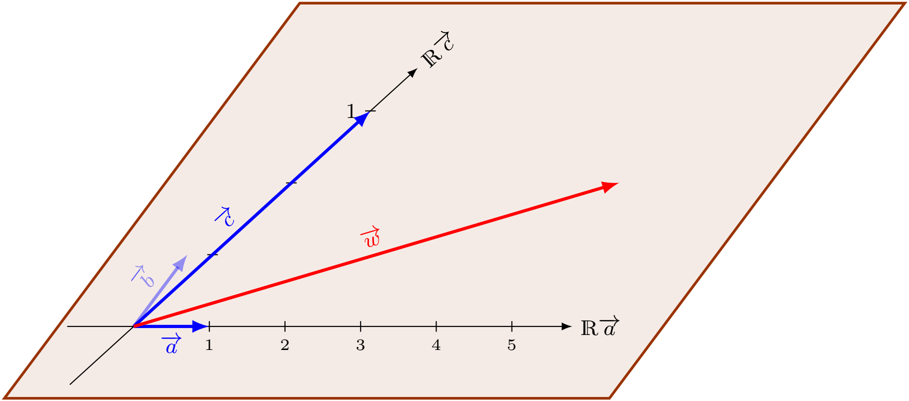
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :



Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ engendrent un **plan** vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires**.

Comme $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle =$

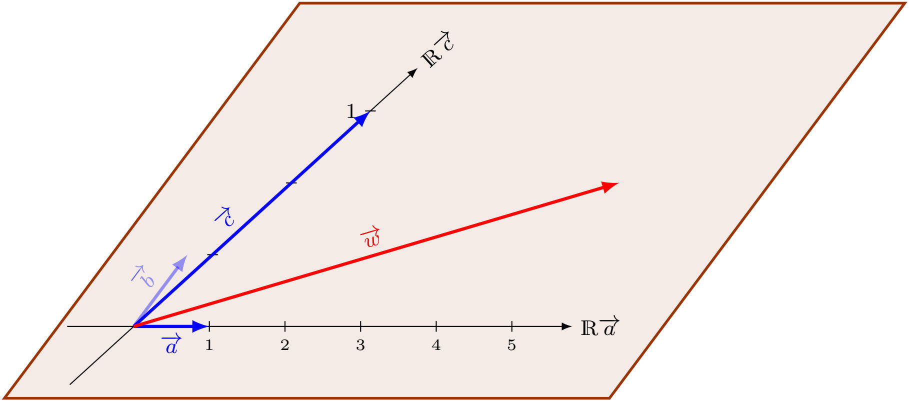
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :



Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ engendrent un **plan** vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires**.

Comme $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle = \boldsymbol{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle}$,

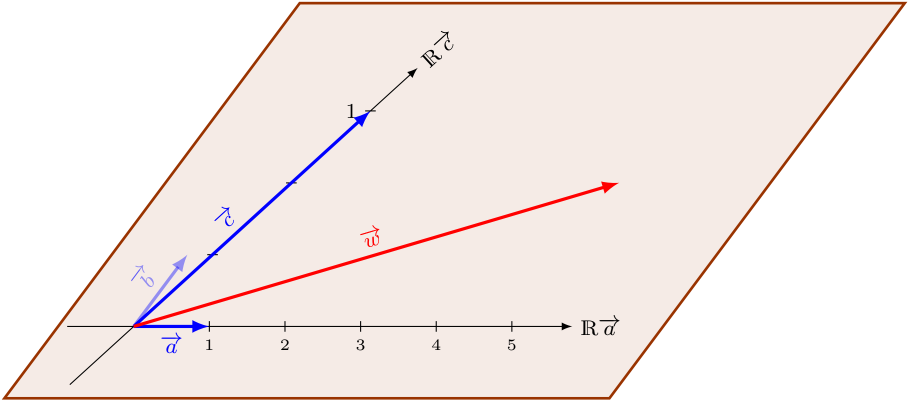
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :



Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ engendrent un **plan** vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires**.

Comme $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle = \langle \boldsymbol{\overrightarrow{a}}, \boldsymbol{\overrightarrow{b}} \rangle$, le vecteur $\overrightarrow{b}$ est une

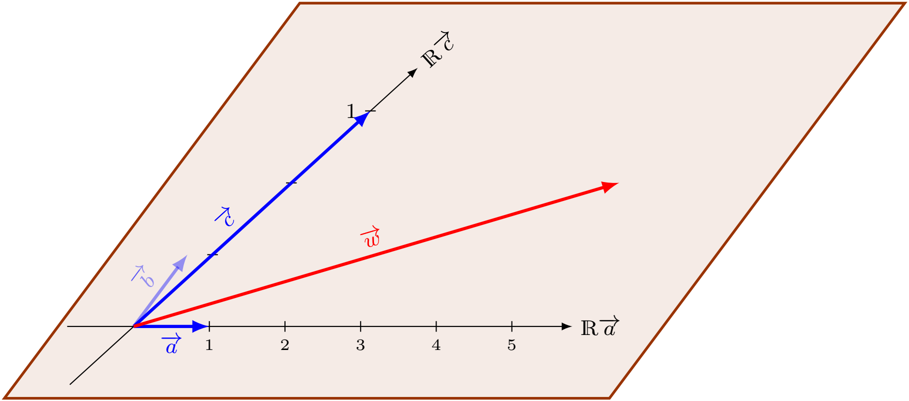
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :



Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ engendrent un **plan** vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires**.

Comme $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle = \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle$, le vecteur $\overrightarrow{b}$ est une **combinaison linéaire** de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$.

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :

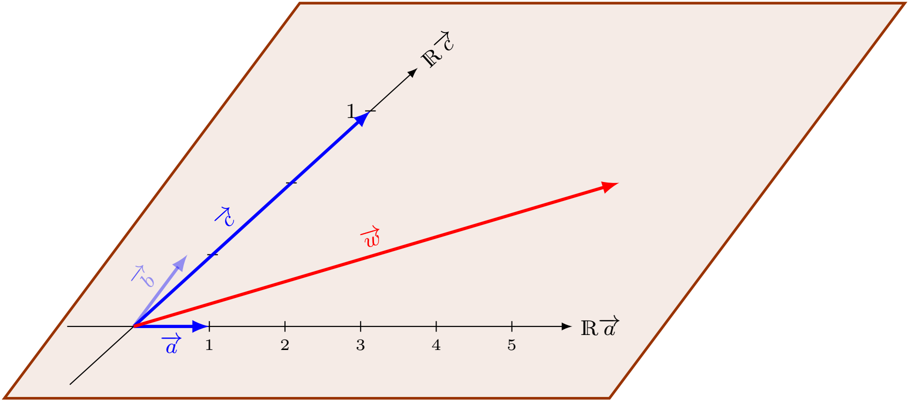


Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ engendrent un **plan** vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires**.

Comme $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle = \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle$, le vecteur $\overrightarrow{b}$ est une **combinaison linéaire** de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$.

D'ailleurs $\overrightarrow{b} =$

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :

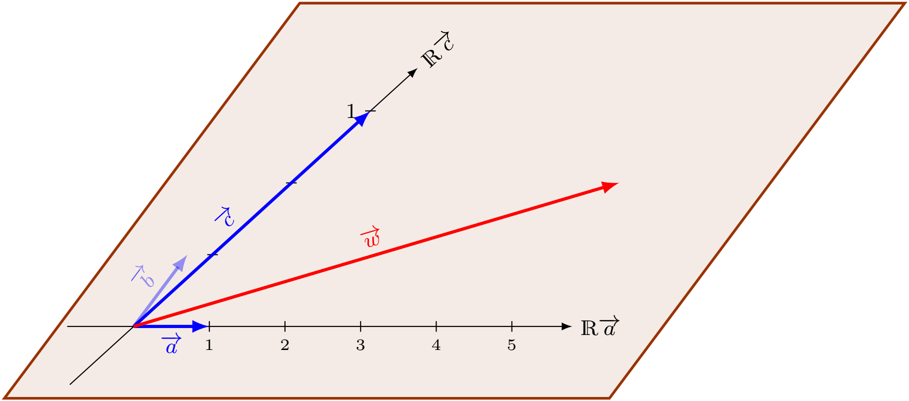


Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ engendrent un **plan** vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires**.

Comme $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle = \boldsymbol{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle}$, le vecteur $\overrightarrow{b}$ est une **combinaison linéaire** de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$.

D'ailleurs $\overrightarrow{b} = \boldsymbol{\dfrac{\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}}{3}}$

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :

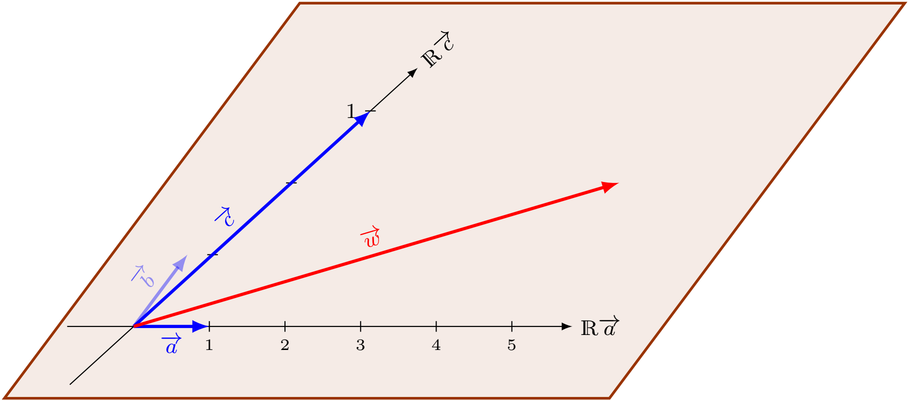


Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ engendrent un **plan** vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires**.

Comme $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle = \langle \boldsymbol{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}} \rangle$, le vecteur $\overrightarrow{b}$ est une **combinaison linéaire** de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$.

D'ailleurs $\overrightarrow{b} = \dfrac{\boldsymbol{\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}}}{\boldsymbol{3}}$ soit : $\overrightarrow{b} = \ldots\ \overrightarrow{c} - \ldots\ \overrightarrow{a}$.

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, et $\vec{c} = \vec{a} + 3\,\vec{b}$ suivants :

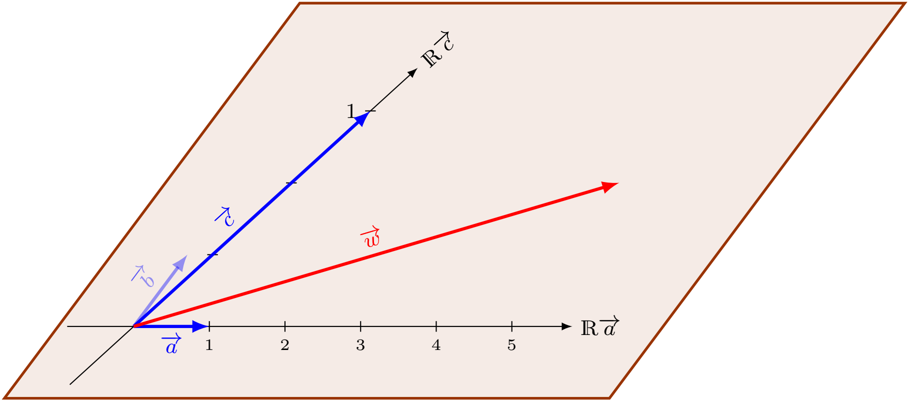


Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$ engendrent un **plan** vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires**.

Comme $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, le vecteur $\vec{b}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{a}$ et $\vec{c}$.

D'ailleurs $\vec{b} = \dfrac{\vec{c} - \vec{a}}{3}$ soit : $\vec{b} = \dfrac{1}{3}\,\vec{c} - \ldots\,\vec{a}$.

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :

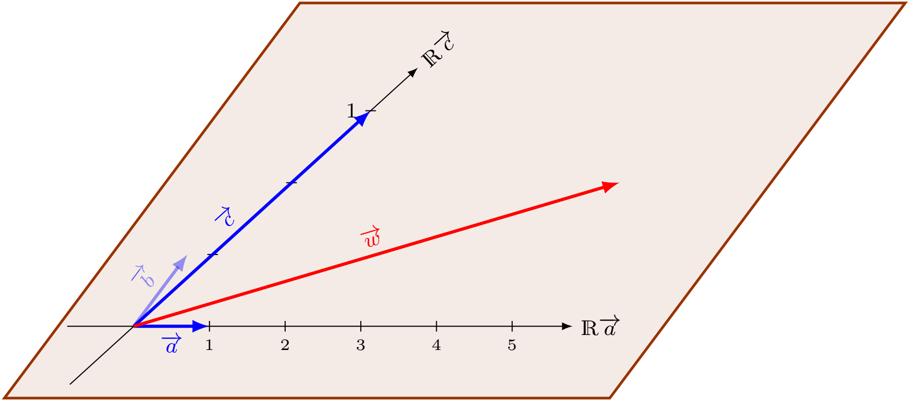


Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ engendrent un **plan** vectoriel, car **ils ne sont pas colinéaires**.

Comme $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle = \langle \boldsymbol{\overrightarrow{a}}, \boldsymbol{\overrightarrow{b}} \rangle$, le vecteur $\overrightarrow{b}$ est une **combinaison linéaire** de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$.

D'ailleurs $\overrightarrow{b} = \dfrac{\boldsymbol{\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}}}{\mathbf{3}}$ soit : $\overrightarrow{b} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\,\overrightarrow{c} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\,\overrightarrow{a}$.

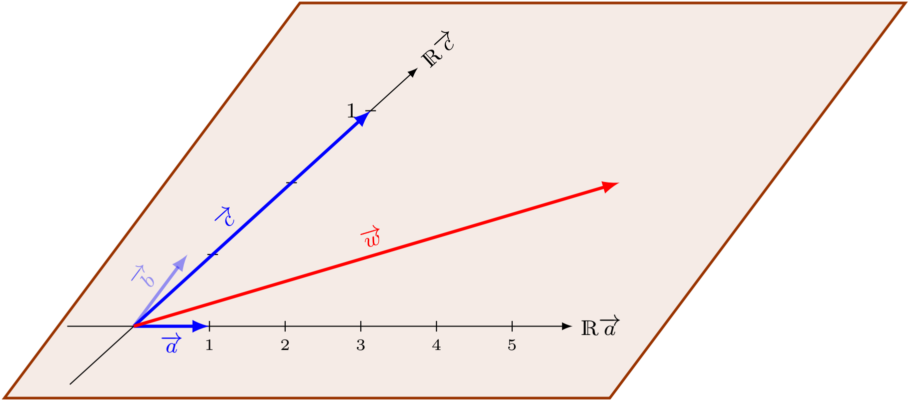
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, et $\vec{c} = \vec{a} + 3\,\vec{b}$ suivants :



D'ailleurs $\vec{b} = \dfrac{\vec{c} - \vec{a}}{3}$ soit : $\vec{b} = \dfrac{1}{3}\,\vec{c} - \dfrac{1}{3}\,\vec{a}$.

Ainsi, $\vec{w} = 5\,\vec{a} + 2\,\vec{b} =$

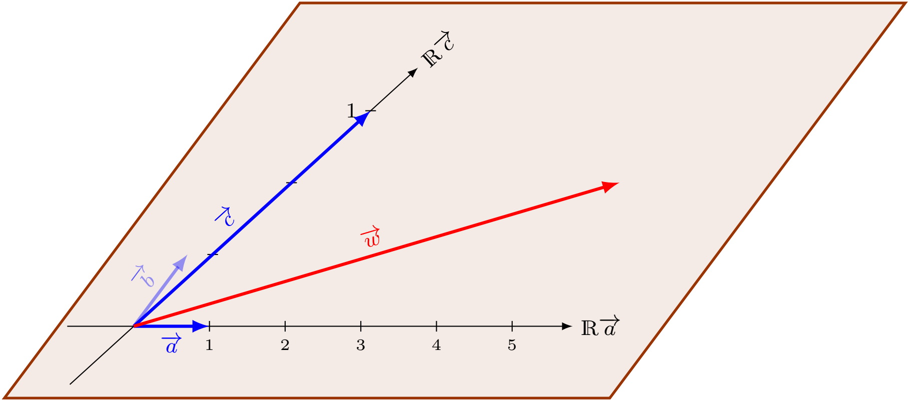
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :



D'ailleurs $\overrightarrow{b} = \dfrac{\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}}{3}$ soit : $\overrightarrow{b} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{c} - \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{a}$.

Ainsi, $\overrightarrow{w} = 5\overrightarrow{a} + 2\,\overrightarrow{b} = 5\overrightarrow{a} + 2\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{c} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}\right) =$

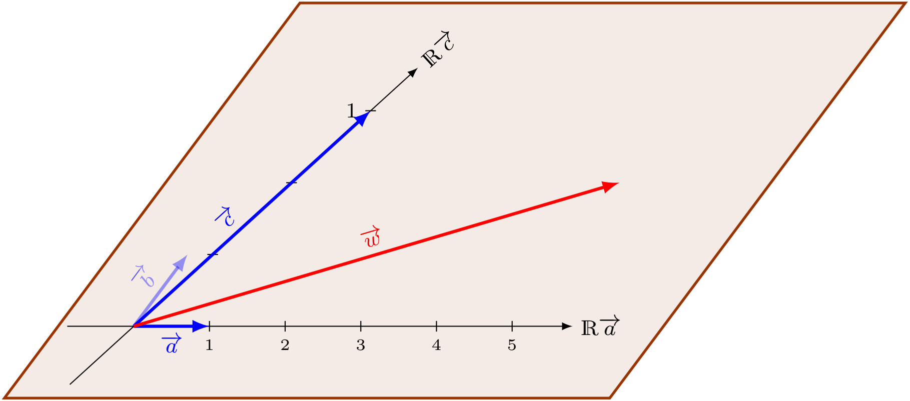
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :



D'ailleurs $\overrightarrow{b} = \dfrac{\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}}{3}$ soit : $\overrightarrow{b} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{c} - \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{a}$.

Ainsi, $\overrightarrow{w} = 5\,\overrightarrow{a} + 2\,\overrightarrow{b} = \mathbf{5\,\overrightarrow{a} + 2\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{c} - \frac{1}{3}\overrightarrow{a}\right)} = \ldots\,\overrightarrow{a} + \ldots\,\overrightarrow{b} + \ldots\,\overrightarrow{c}$

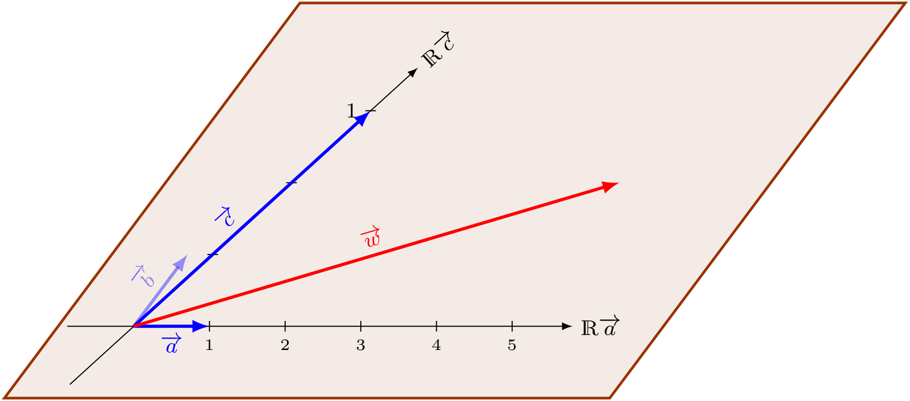
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, et $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$ suivants :



D'ailleurs $\vec{b} = \dfrac{\vec{c} - \vec{a}}{3}$ soit : $\vec{b} = \dfrac{1}{3}\vec{c} - \dfrac{1}{3}\vec{a}$.

Ainsi, $\vec{w} = 5\vec{a} + 2\vec{b} = 5\vec{a} + 2\left(\dfrac{1}{3}\vec{c} - \dfrac{1}{3}\vec{a}\right) = \dfrac{13}{3}\vec{a} + \ldots\vec{b} + \ldots\vec{c}$

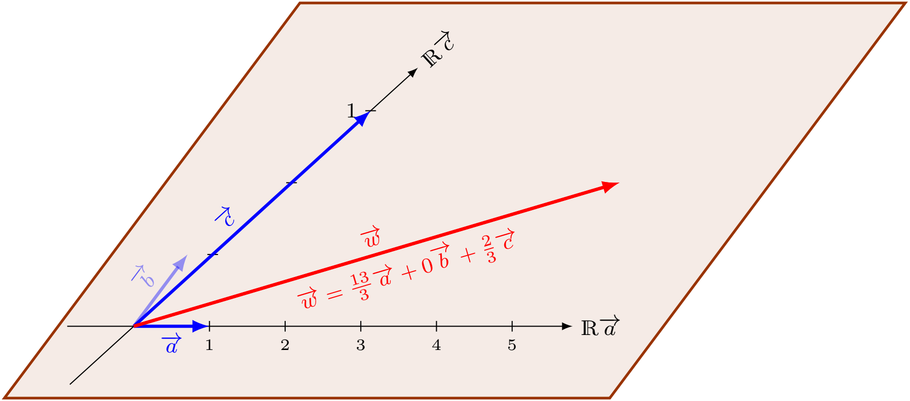
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :



D'ailleurs $\overrightarrow{b} = \dfrac{\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}}{3}$ soit : $\overrightarrow{b} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{c} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}$.

Ainsi, $\overrightarrow{w} = 5\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} = 5\overrightarrow{a} + 2\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{c} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}\right) = \dfrac{13}{3}\overrightarrow{a} + 0\,\overrightarrow{b} + \ldots\,\overrightarrow{c}$

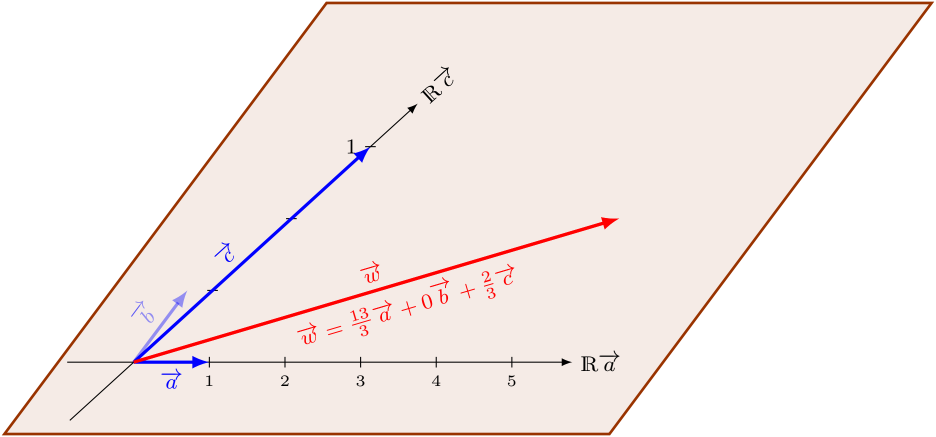
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :



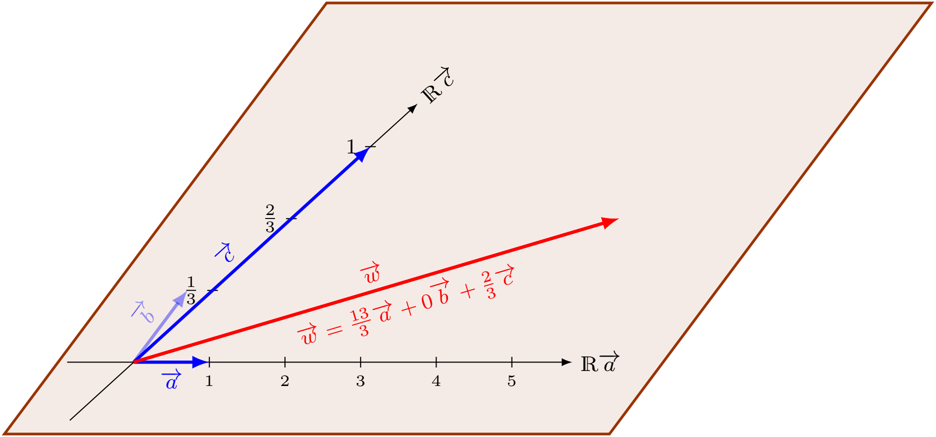
D'ailleurs $\overrightarrow{b} = \dfrac{\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}}{3}$ soit : $\overrightarrow{b} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{c} - \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{a}$.

Ainsi, $\overrightarrow{w} = 5\,\overrightarrow{a} + 2\,\overrightarrow{b} = 5\,\overrightarrow{a} + 2\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{c} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}\right) = \dfrac{13}{3}\,\overrightarrow{a} + 0\,\overrightarrow{b} + \dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{c}$

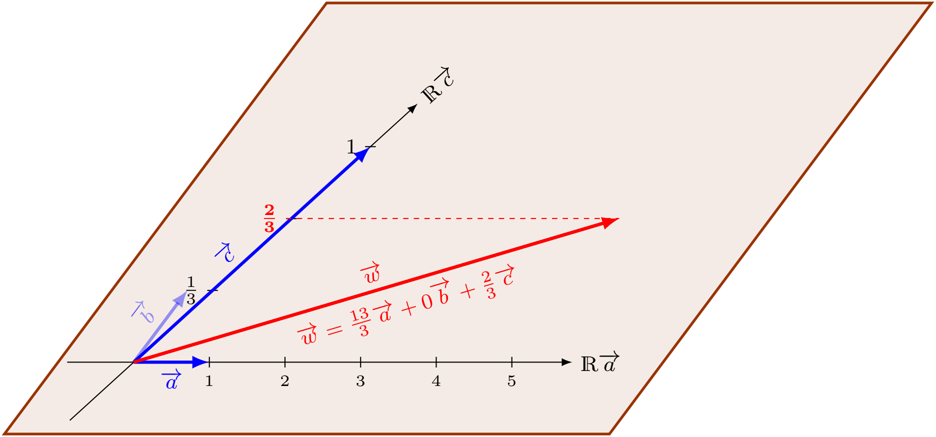
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :



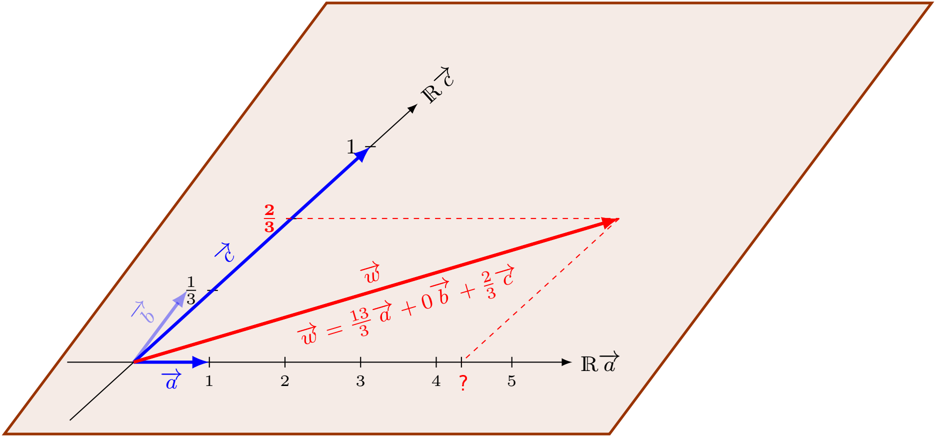
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, et $\vec{c} = \vec{a} + 3\,\vec{b}$ suivants :



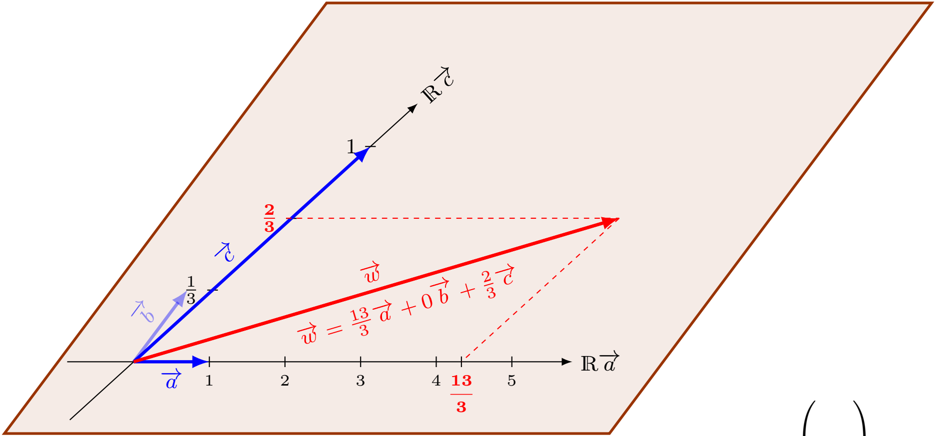
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :



Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :

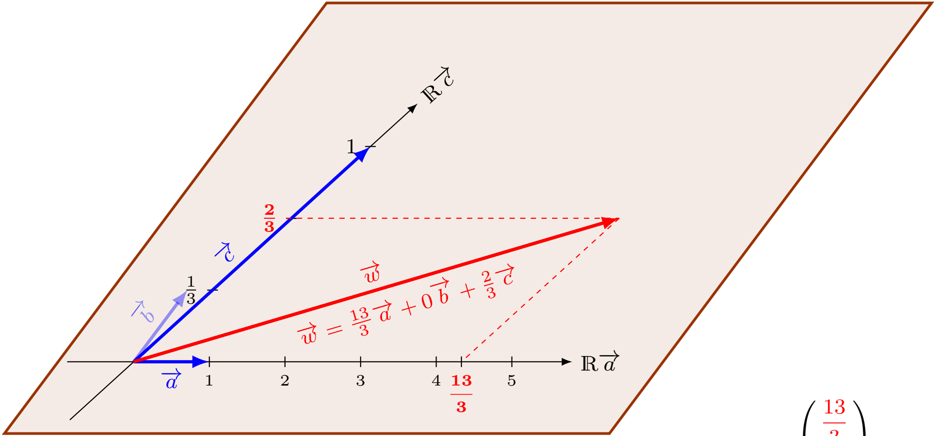


Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :



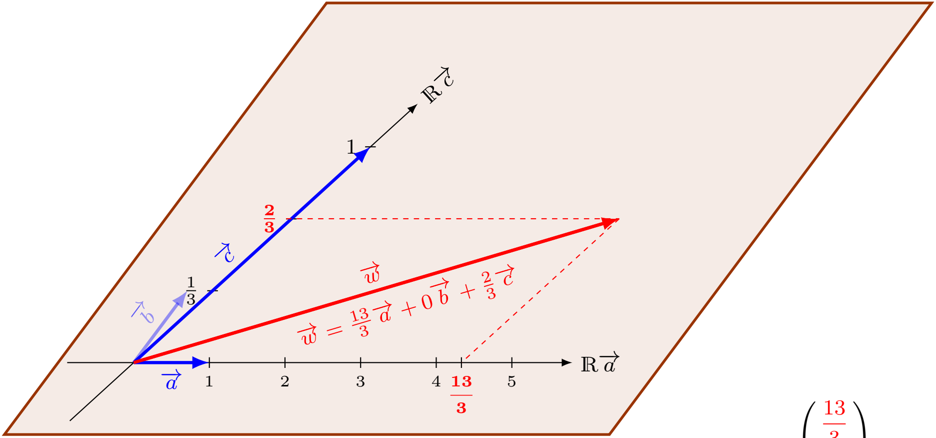
Dans le « repère sans **origine** » $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ aurait pour coordonnées $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :



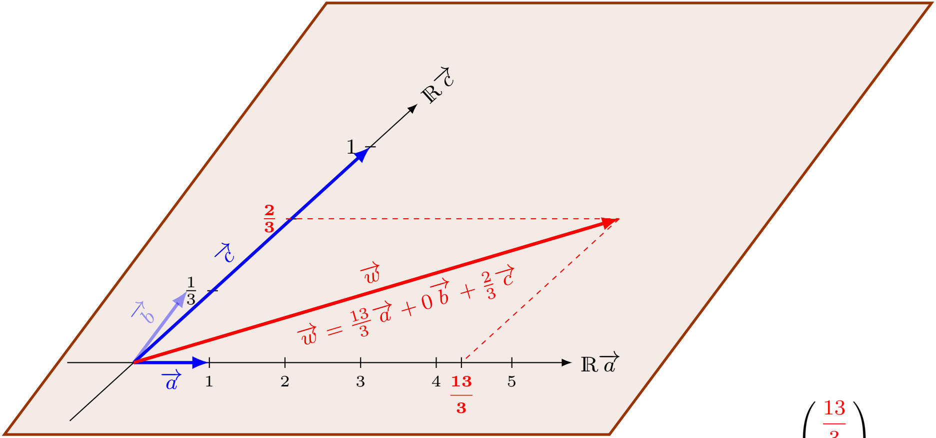
Dans le « repère sans **origine** » $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ aurait pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$ suivants :

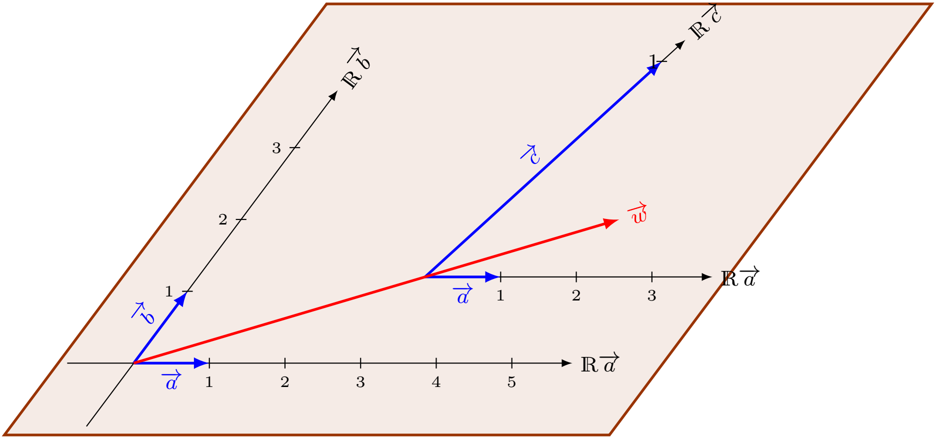


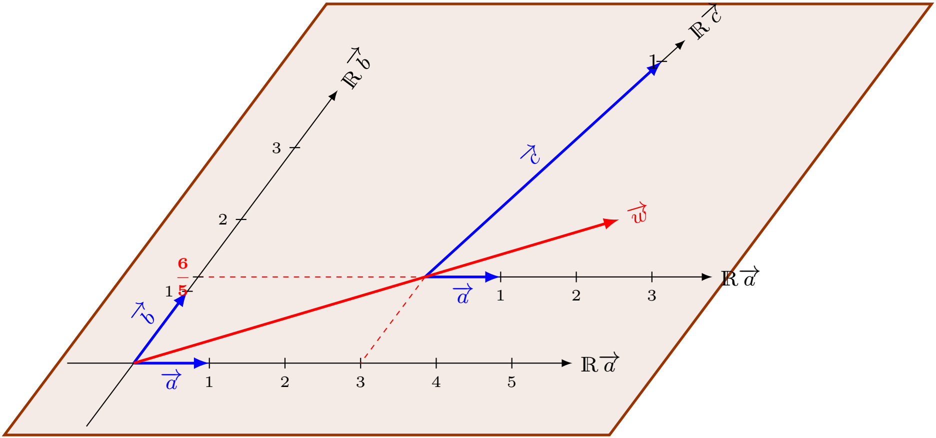
Dans le « repère sans **origine** » $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ aurait pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ \end{pmatrix}$

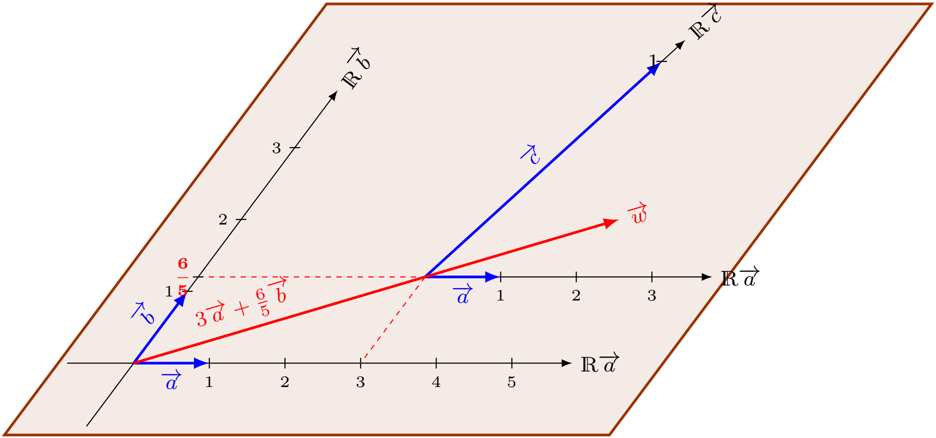
Considérons le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ suivants :



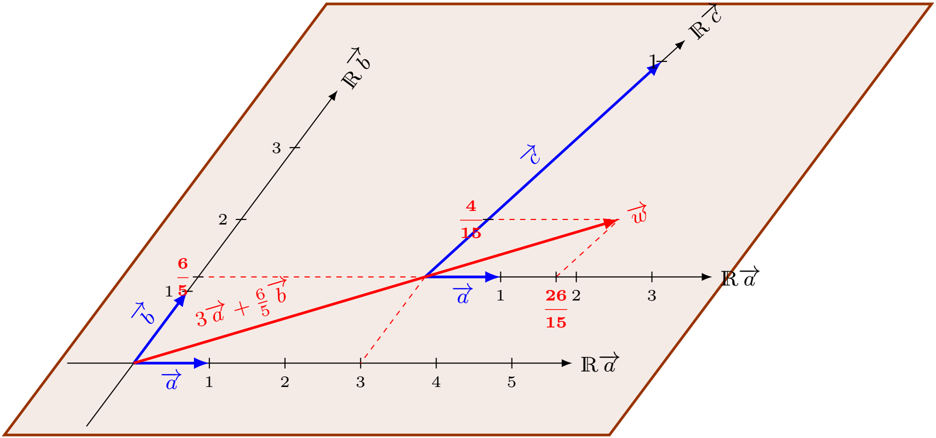
Dans le « repère sans **origine** » $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ aurait pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

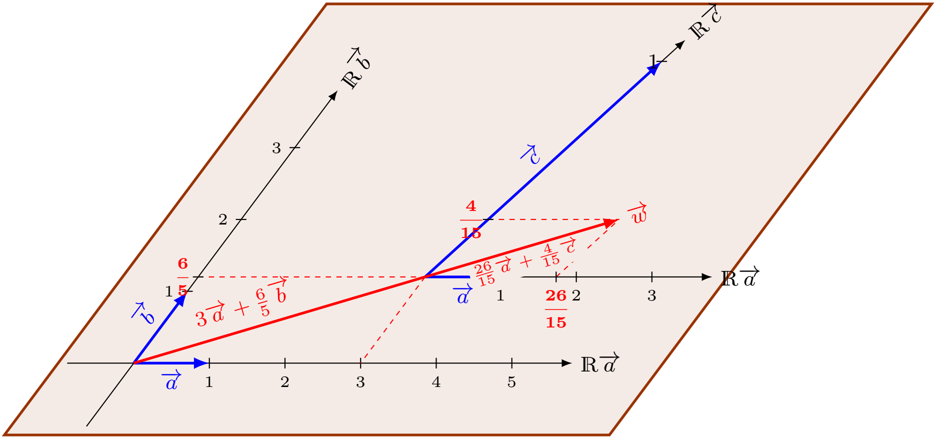

$\mathbb{R}\vec{c}$
1
$\mathbb{R}\vec{b}$
3
2
1
$\vec{c}$
$\vec{w}$
$\vec{b}$
$\vec{a}$
1
2
3
$\mathbb{R}\vec{a}$
$\vec{a}$
1
2
3
4
5
$\mathbb{R}\vec{a}$

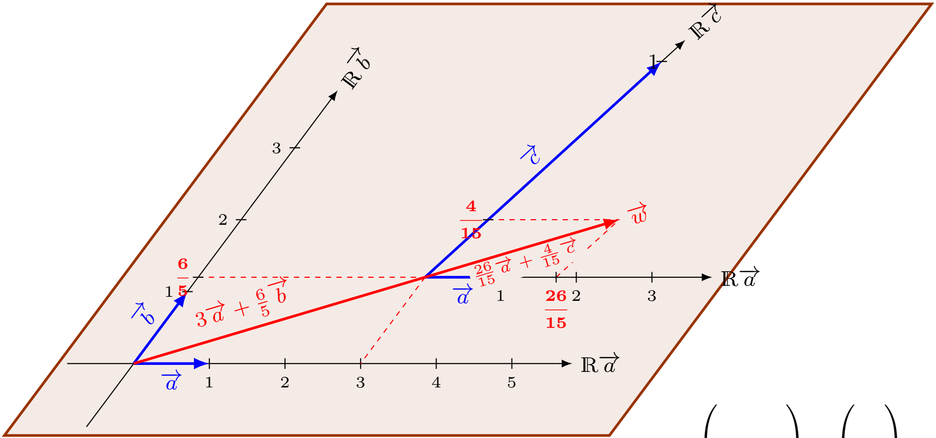

$\mathbb{R}\overrightarrow{b}$
$\mathbb{R}\overrightarrow{c}$
$\mathbb{R}\overrightarrow{a}$
$\mathbb{R}\overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{c}$
$\overrightarrow{w}$
$\overrightarrow{b}$
$\overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{a}$
$\frac{6}{5}$
1
2
3
1
1
2
3
1
2
3
4
5



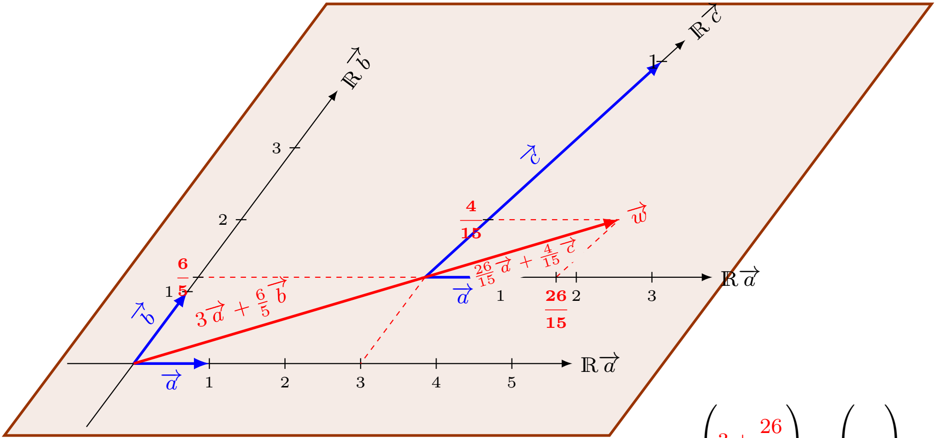
$\mathbb{R}\overrightarrow{c}$
1
$\mathbb{R}\overrightarrow{b}$
3
$\overrightarrow{c}$
$\overrightarrow{w}$
2
$\frac{6}{5}$
1
$\overrightarrow{b}$
$3\overrightarrow{a} + \frac{6}{5}\overrightarrow{b}$
$\overrightarrow{a}$
1
2
3
$\mathbb{R}\overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{a}$
1
2
3
4
5
$\mathbb{R}\overrightarrow{a}$


$\mathbb{R}\vec{c}$
1
$\mathbb{R}\vec{b}$
3
$\vec{c}$
2
$\frac{4}{15}$
$\vec{w}$
$\frac{6}{5}$
1
$\mathbb{R}\vec{a}$
$\vec{b}$
$3\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b}$
$\vec{a}$
1
$\frac{26}{15}$
2
3
$\mathbb{R}\vec{a}$
$\vec{a}$
1
2
3
4
5

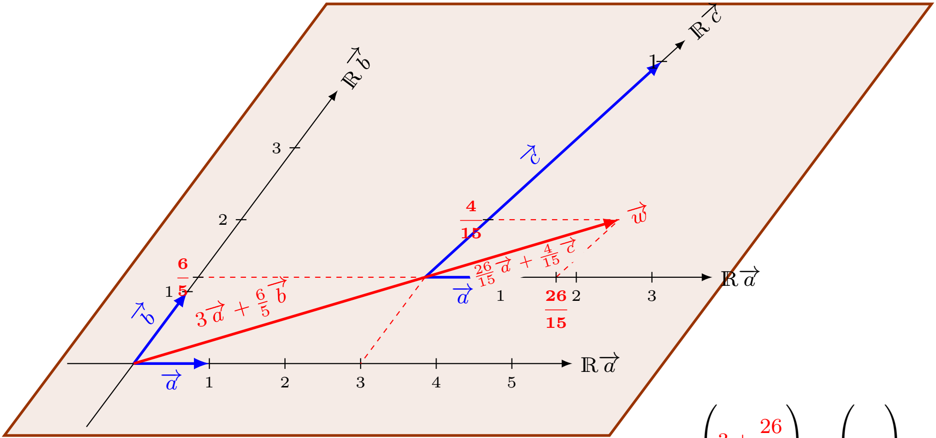

$\mathbb{R}\vec{c}$
$\mathbb{R}\vec{b}$
$\vec{c}$
$\vec{w}$
$\frac{4}{15}$
$\frac{6}{5}$
$\frac{26}{15}\vec{a} + \frac{4}{15}\vec{c}$
$3\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b}$
$\vec{b}$
$\vec{a}$
$\frac{26}{15}$
$\mathbb{R}\vec{a}$
1 2 3 4 5



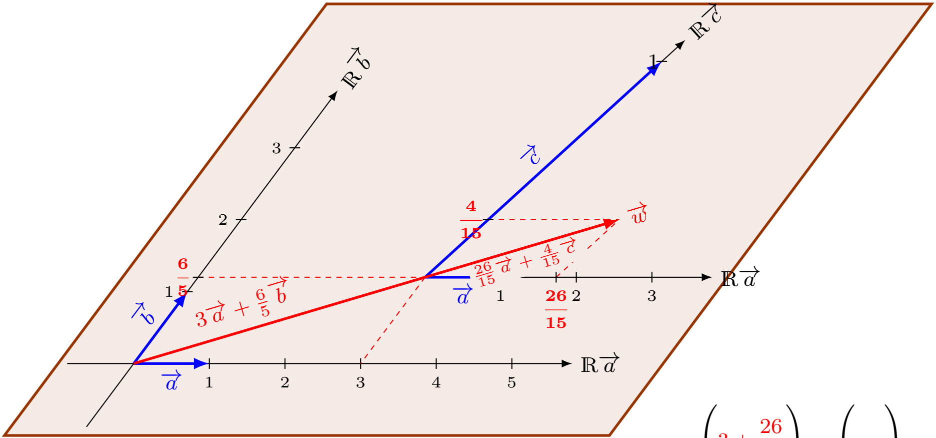
Dans le « repère sans **origine** » $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $\vec{w}$ aurait pour coordonnées $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$



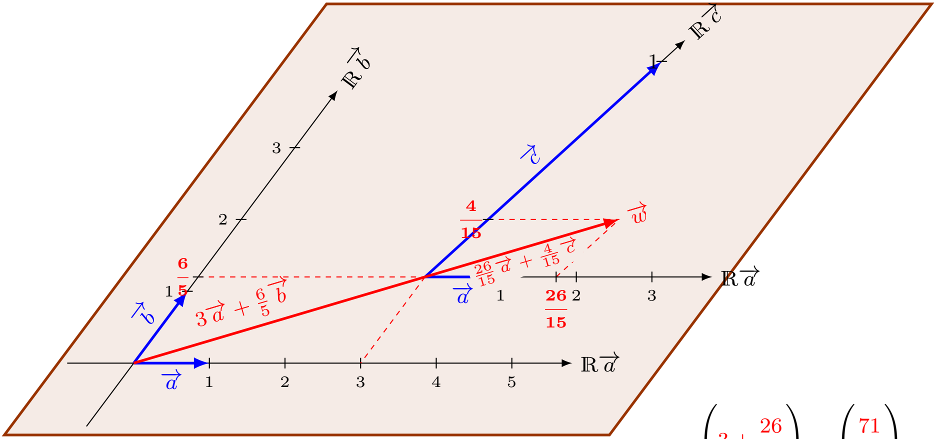
Dans le « repère sans **origine** » $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $\vec{w}$ aurait pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 + \dfrac{26}{15} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$



Dans le « repère sans **origine** » $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $\vec{w}$ aurait pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 + \frac{26}{15} \\ \frac{6}{5} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$



Dans le « repère sans **origine** » $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $\vec{w}$ aurait pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 + \frac{26}{15} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$



Dans le « repère sans **origine** » $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $\vec{w}$ aurait pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3+\frac{26}{15} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{71}{15} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$

En résumé, dans la famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{71}{15} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

Si on se tente de répérer le vecteur $\overrightarrow{w}$ avec la famille de vecteurs $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, on se retrouve avec au moins trois coordonnées différentes pour le même vecteur.

En résumé, dans la famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{71}{15} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

Si on se tente de répérer le vecteur $\overrightarrow{w}$ avec la famille de vecteurs $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, on se retrouve avec au moins trois coordonnées différentes pour le même vecteur.
Or un système de coordonnées se doit d'attribuer un et un seul n-uplet (couple, triplet, etc.) de coordonnées à un vecteur.

En résumé, dans la famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{71}{15} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

Si on se tente de répérer le vecteur $\overrightarrow{w}$ avec la famille de vecteurs $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, on se retrouve avec au moins trois coordonnées différentes pour le même vecteur. Or un système de coordonnées se doit d'attribuer un et un seul n-uplet (couple, triplet, etc.) de coordonnées à un vecteur.

La raison pour laquelle, nous obtenons des coordonnées différentes pour un même vecteur est que le plan vectoriel dont il est issu est bien engendré par la famille des trois vecteurs $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$,

En résumé, dans la famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{71}{15} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

Si on se tente de répérer le vecteur $\overrightarrow{w}$ avec la famille de vecteurs $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, on se retrouve avec au moins trois coordonnées différentes pour le même vecteur. Or un système de coordonnées se doit d'attribuer un et un seul n-uplet (couple, triplet, etc.) de coordonnées à un vecteur.

La raison pour laquelle, nous obtenons des coordonnées différentes pour un même vecteur est que le plan vectoriel dont il est issu est bien engendré par la famille des trois vecteurs $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, mais il est aussi engendré par les couples $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$, et $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

En résumé, dans la famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{71}{15} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

Si on se tente de répérer le vecteur $\overrightarrow{w}$ avec la famille de vecteurs $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, on se retrouve avec au moins trois coordonnées différentes pour le même vecteur. Or un système de coordonnées se doit d'attribuer un et un seul n-uplet (couple, triplet, etc.) de coordonnées à un vecteur.

La raison pour laquelle, nous obtenons des coordonnées différentes pour un même vecteur est que le plan vectoriel dont il est issu est bien engendré par la famille des trois vecteurs $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, mais il est aussi engendré par les couples $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$, et $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

En effet, deux vecteurs non colinéaires suffisent à définir un plan vectoriel.

En résumé, dans la famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{71}{15} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

Si on se tente de répérer le vecteur $\overrightarrow{w}$ avec la famille de vecteurs $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, on se retrouve avec au moins trois coordonnées différentes pour le même vecteur. Or un système de coordonnées se doit d'attribuer un et un seul n-uplet (couple, triplet, etc.) de coordonnées à un vecteur.

La raison pour laquelle, nous obtenons des coordonnées différentes pour un même vecteur est que le plan vectoriel dont il est issu est bien engendré par la famille des trois vecteurs $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, mais il est aussi engendré par les couples $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$, et $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

En effet, deux vecteurs non colinéaires suffisent à définir un plan vectoriel. Il y a donc un vecteur de trop dans la famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

En résumé, dans la famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{71}{15} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

Si on se tente de répérer le vecteur $\overrightarrow{w}$ avec la famille de vecteurs $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, on se retrouve avec au moins trois coordonnées différentes pour le même vecteur. Or un système de coordonnées se doit d'attribuer un et un seul n-uplet (couple, triplet, etc.) de coordonnées à un vecteur.

La raison pour laquelle, nous obtenons des coordonnées différentes pour un même vecteur est que le plan vectoriel dont il est issu est bien engendré par la famille des trois vecteurs $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, mais il est aussi engendré par les couples $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$, et $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

En effet, deux vecteurs non colinéaires suffisent à définir un plan vectoriel. Il y a donc un vecteur de trop dans la famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Alors, comment savoir si une famille génératrice n'est pas « trop grande » ?

En résumé, dans la famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{71}{15} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

Si on se tente de répérer le vecteur $\overrightarrow{w}$ avec la famille de vecteurs $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, on se retrouve avec au moins trois coordonnées différentes pour le même vecteur. Or un système de coordonnées se doit d'attribuer un et un seul n-uplet (couple, triplet, etc.) de coordonnées à un vecteur.

La raison pour laquelle, nous obtenons des coordonnées différentes pour un même vecteur est que le plan vectoriel dont il est issu est bien engendré par la famille des trois vecteurs $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, mais il est aussi engendré par les couples $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$, et $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

En effet, deux vecteurs non colinéaires suffisent à définir un plan vectoriel. Il y a donc un vecteur de trop dans la famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Alors, comment savoir si une famille génératrice n'est pas « trop grande » ? Nous allons voir que cette famille est « trop grande », car elle n'est pas libre.

En résumé, dans la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, le vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{71}{15} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

Si on se tente de répérer le vecteur $\vec{w}$ avec la famille de vecteurs $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, on se retrouve avec au moins trois coordonnées différentes pour le même vecteur.

Or un … uple,

triplet, …

La rais… même

vecteur… mille des

trois ve…),

$(\vec{a}, \vec{c})$, et $(\vec{b}, \vec{c})$.

Attention !

Un vecteur n'a pas plusieurs coordonnées. L'étude précédente montre juste la nécessité d'introduire la notion de familles **libres** et de familles **liées**.

En effet, deux vecteurs non colinéaires suffisent à définir un plan vectoriel. Il y a donc un vecteur de trop dans la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Alors, comment savoir si une famille génératrice n'est pas « trop grande » ? Nous allons voir que cette famille est « trop grande », car elle n'est pas libre.

4. Famille libre de vecteurs.

4. Famille libre de vecteurs.

Définition:

On dit qu'une famille de vecteurs est **libre** si aucun d'eux ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.

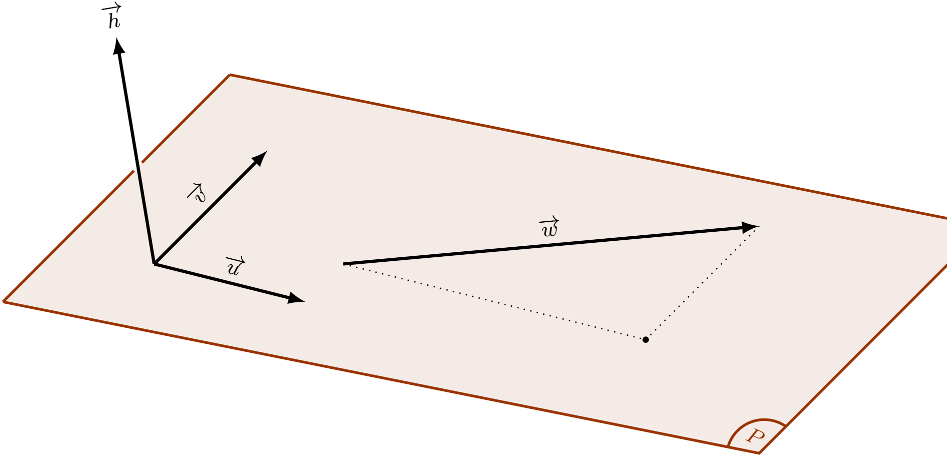
4. Famille libre de vecteurs.

Définition:

On dit qu'une famille de vecteurs est **libre** si aucun d'eux ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.

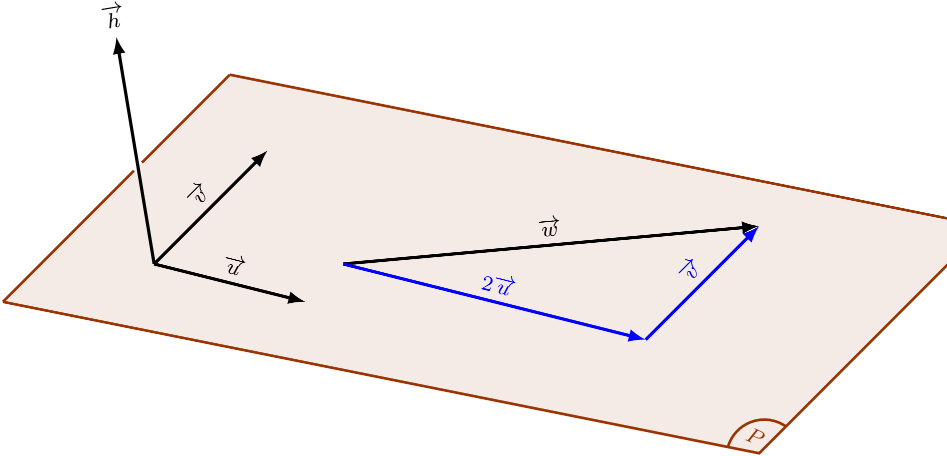
Ainsi, deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont libres si on ne peut pas écrire $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{u}$, autrement dit si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas **colinéaires**.

Exemple n° 5 : On note $\overrightarrow{P}$ le plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.



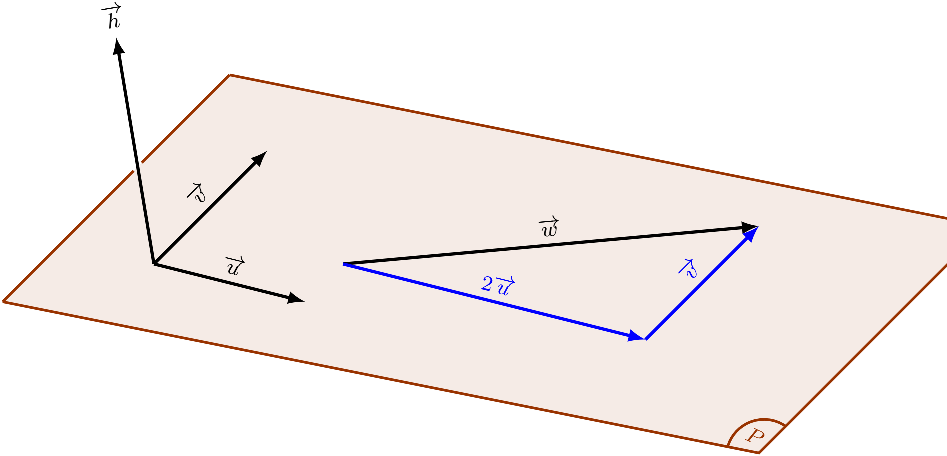
a. $\overrightarrow{w} = \ldots \overrightarrow{u} + \ldots \overrightarrow{v}$

Exemple n° 5 : On note $\overrightarrow{P}$ le plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.



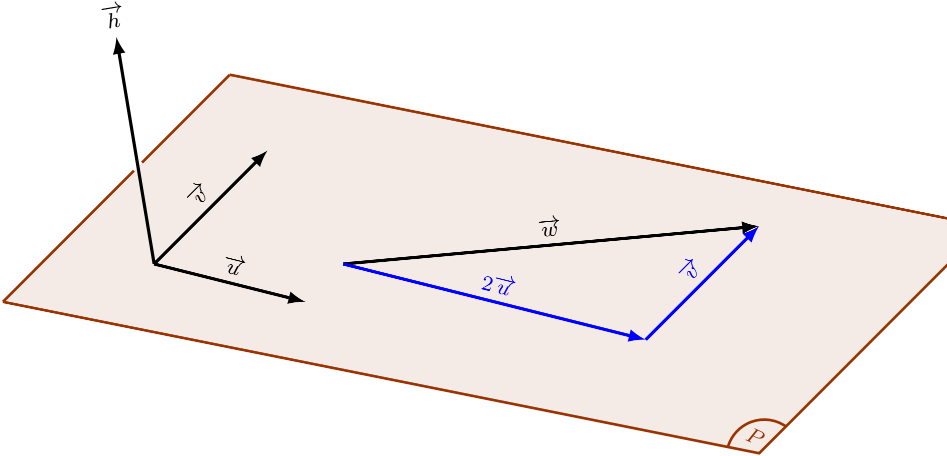
- a. $\overrightarrow{w} = \ldots \overrightarrow{u} + \ldots \overrightarrow{v}$

Exemple n° 5 : On note $\overrightarrow{P}$ le plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.



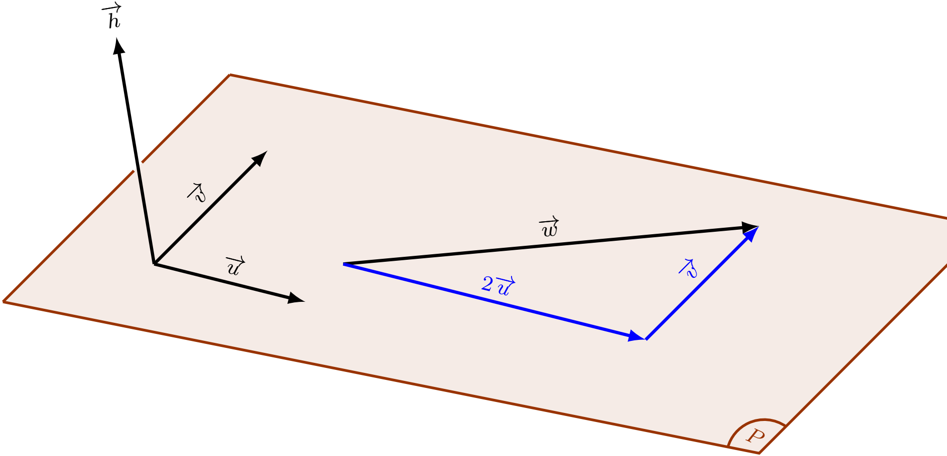
- a. $\overrightarrow{w} = \mathbf{2}\overrightarrow{u} + \ldots \overrightarrow{v}$

Exemple n° 5 : On note $\overrightarrow{P}$ le plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.

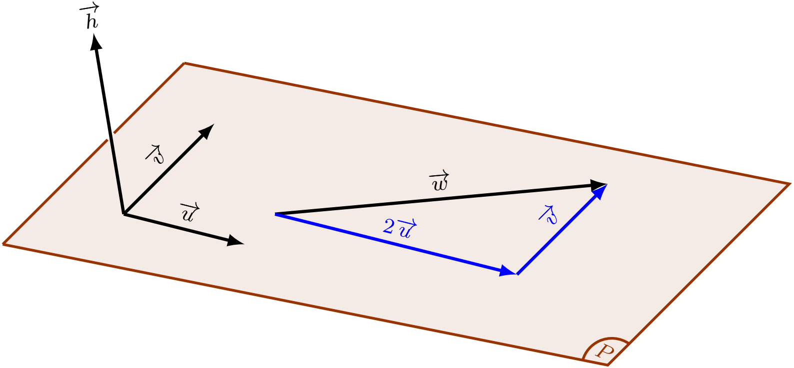


- a. $\overrightarrow{w} = \mathbf{2}\overrightarrow{u} + \mathbf{1}\overrightarrow{v}$

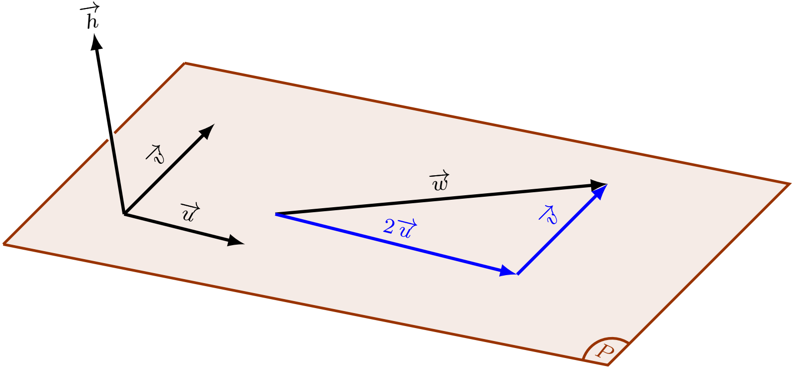
Exemple n° 5 : On note $\overrightarrow{P}$ le plan vectoriel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.



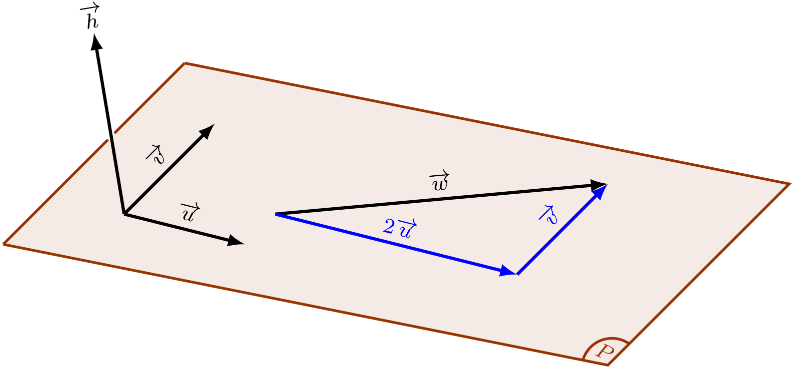
- $\overrightarrow{w} = \mathbf{2}\overrightarrow{u} + \mathbf{1}\overrightarrow{v}$ donc $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$



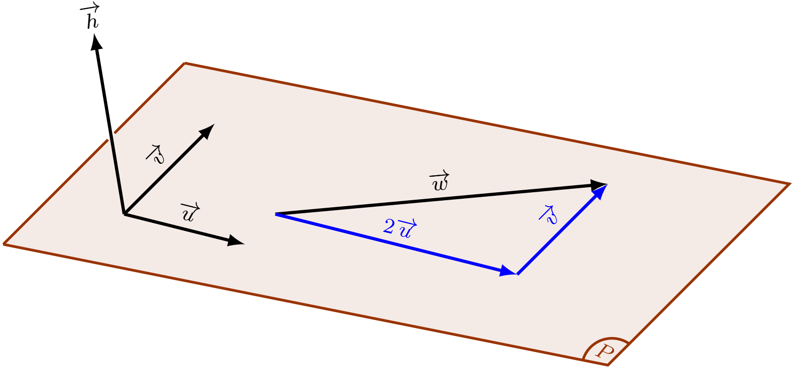
- a. $\vec{w} = \mathbf{2}\vec{u} + \mathbf{1}\vec{v}$ donc $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- b. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont libres car



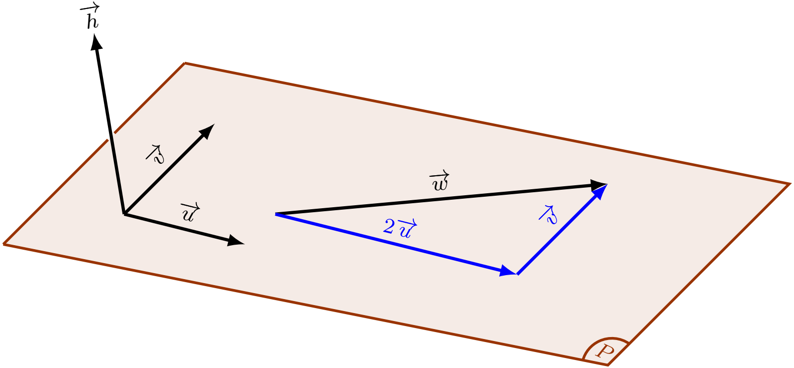
a. $\overrightarrow{w} = \mathbf{2}\overrightarrow{u} + \mathbf{1}\overrightarrow{v}$ donc $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$
b. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont libres car **ils ne sont pas colinéaires**.



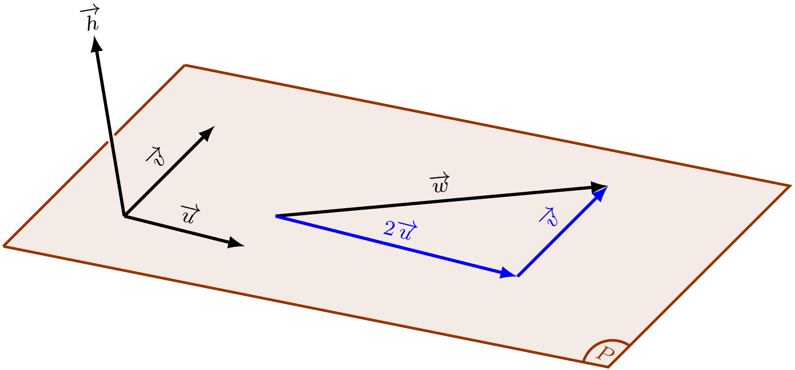
- a. $\vec{w} = \mathbf{2}\vec{u} + \mathbf{1}\vec{v}$ donc $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- b. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont libres car **ils ne sont pas colinéaires**.
- c. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas libre, car $\vec{w}$ **est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$**.



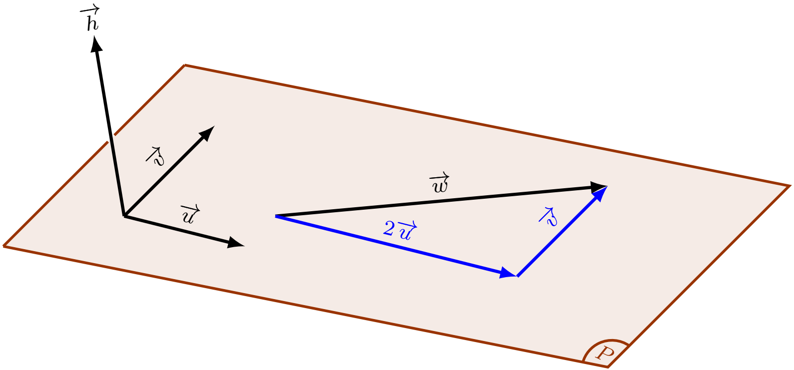
- a. $\vec{w} = \mathbf{2}\vec{u} + \mathbf{1}\vec{v}$ donc $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- b. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont libres car **ils ne sont pas colinéaires**.
- c. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas libre, car $\vec{w}$ **est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$**.
- d. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{h})$



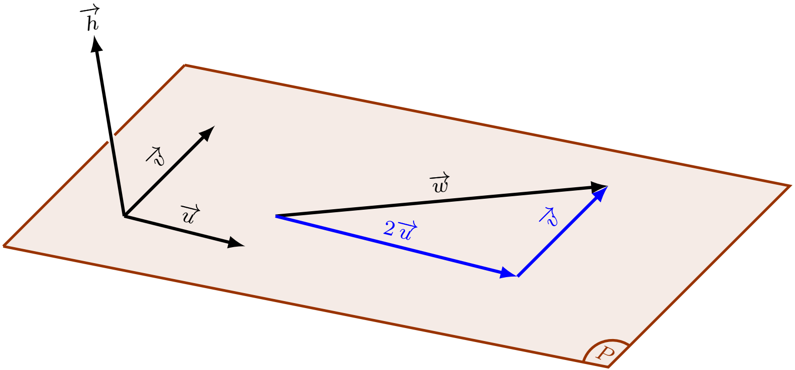
a. $\overrightarrow{w} = \mathbf{2}\overrightarrow{u} + \mathbf{1}\overrightarrow{v}$ donc $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$
b. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont libres car **ils ne sont pas colinéaires**.
c. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ n'est pas libre, car $\overrightarrow{w}$ **est une combinaison linéaire de** $\overrightarrow{u}$ **et** $\overrightarrow{v}$.
d. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{h})$ **est libre, car** $\overrightarrow{h} \notin \overrightarrow{P}$



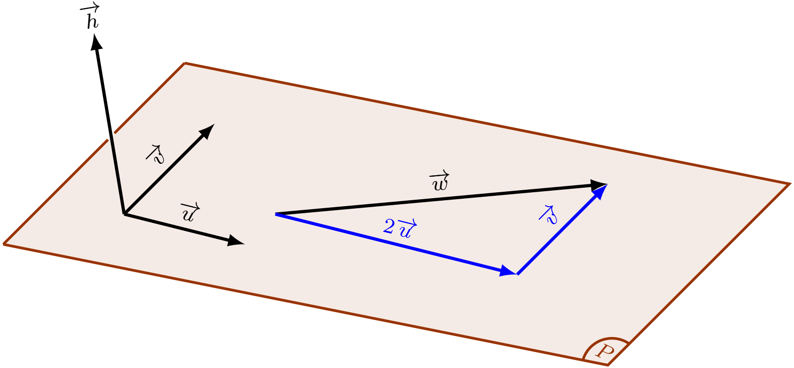
a. $\overrightarrow{w} = \mathbf{2}\overrightarrow{u} + \mathbf{1}\overrightarrow{v}$ donc $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$
b. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont libres car **ils ne sont pas colinéaires**.
c. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ n'est pas libre, car $\overrightarrow{w}$ **est une combinaison linéaire de** $\overrightarrow{u}$ **et** $\overrightarrow{v}$.
d. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{h})$ **est libre, car** $\overrightarrow{h} \notin \overrightarrow{P} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$



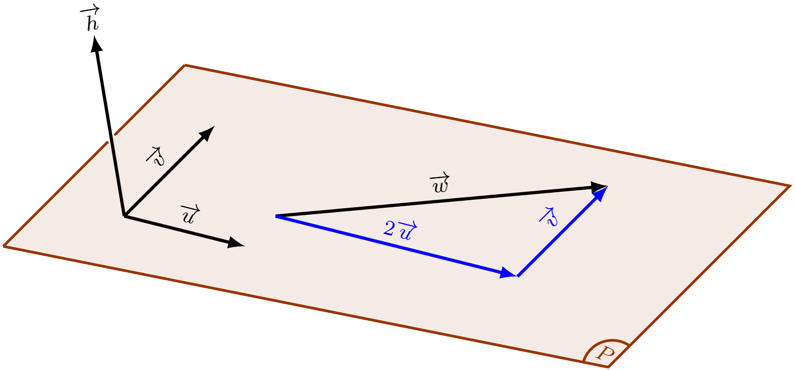
- a. $\vec{w} = \mathbf{2}\vec{u} + \mathbf{1}\vec{v}$ donc $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- b. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont libres car **ils ne sont pas colinéaires**.
- c. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas libre, car $\vec{w}$ **est une combinaison linéaire de** $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$.
- d. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{h})$ **est libre, car** $\vec{h} \notin \vec{P} = \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$
  Autrement dit, $\vec{h}$ n'est dans aucun plan parallèle au plan (P).



- a. $\overrightarrow{w} = \mathbf{2}\overrightarrow{u} + \mathbf{1}\overrightarrow{v}$ donc $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$
- b. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont libres car **ils ne sont pas colinéaires**.
- c. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ n'est pas libre, car $\overrightarrow{w}$ **est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$**.
- d. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{h})$ **est libre, car $\overrightarrow{h} \notin \overrightarrow{P} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$**
  Autrement dit, $\overrightarrow{h}$ n'est dans aucun plan parallèle au plan (P).
- e. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{h})$



- a. $\overrightarrow{w} = \mathbf{2}\overrightarrow{u} + \mathbf{1}\overrightarrow{v}$ donc $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$
- b. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont libres car **ils ne sont pas colinéaires**.
- c. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ n'est pas libre, car $\overrightarrow{w}$ **est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$**.
- d. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{h})$ **est libre, car $\overrightarrow{h} \notin \overrightarrow{P} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$**
  Autrement dit, $\overrightarrow{h}$ n'est dans aucun plan parallèle au plan (P).
- e. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{h})$ **n'est pas libre, car**



- a. $\vec{w} = \mathbf{2}\vec{u} + \mathbf{1}\vec{v}$ donc $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- b. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont libres car **ils ne sont pas colinéaires**.
- c. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas libre, car $\vec{w}$ **est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$**.
- d. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{h})$ **est libre, car $\vec{h} \notin \vec{P} = \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$**
  Autrement dit, $\vec{h}$ n'est dans aucun plan parallèle au plan (P).
- e. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{h})$ **n'est pas libre, car $\vec{w} \in \vec{P} = \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$**

Définition:

Un famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Définition:

Un famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Une famille $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p})$ est **liée** si et seulement si, il existe un indice j tel que : $\overrightarrow{v_j}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Définition:

Un famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Une famille $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p})$ est **liée** si et seulement si, il existe un indice j tel que : $\overrightarrow{v_j}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Autrement dit, il existe des scalaires λ_i **non tous nuls** tels que $\overrightarrow{v_j} = \sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{v_i}$.

Définition:

Un famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Une famille $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ est **liée** si et seulement si, il existe un indice j tel que : $\overrightarrow{v_j}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Autrement dit, il existe des scalaires λ_i **non tous nuls** tels que $\overrightarrow{v_j} = \sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{v_i}$.

soit $\sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{v_i} - \overrightarrow{v_j} = \overrightarrow{0}$ soit en posant $\lambda_j = -1$ on obtient

Définition:

Un famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Une famille $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p})$ est **liée** si et seulement si, il existe un indice j tel que : $\overrightarrow{v_j}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Autrement dit, il existe des scalaires λ_i **non tous nuls** tels que $\overrightarrow{v_j} = \sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{v_i}$.

soit $\sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{v_i} - \overrightarrow{v_j} = \overrightarrow{0}$ soit en posant $\lambda_j = -1$ on obtient $\boxed{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0}}$

Définition:

Un famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Une famille $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p})$ est **liée** si et seulement si, il existe un indice j tel que : $\overrightarrow{v_j}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Autrement dit, il existe des scalaires λ_i **non tous nuls** tels que $\overrightarrow{v_j} = \sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{v_i}$.

soit $\sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{v_i} - \overrightarrow{v_j} = \overrightarrow{0}$ soit en posant $\lambda_j = -1$ on obtient $\boxed{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0}}$

Théorème

Une famille $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p})$ est

- **libre** si et seulement si : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0}$ entraîne que les λ_i sont tous nuls ;
- **liée** si et seulement si, il existe un λ_i non nul tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0}$.

Remarque

- Une famille contenant le vecteur nul n'est jamais libre.

Remarque

Une famille contenant le vecteur nul n'est jamais libre.

Exemple n° 6 : Considérons la famille $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{0}\right)$

Remarque

Une famille contenant le vecteur nul n'est jamais libre.

Exemple n° 6 : Considérons la famille $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{0}\right)$

où $\overrightarrow{v}$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Remarque

Une famille contenant le vecteur nul n'est jamais libre.

Exemple n° 6 : Considérons la famille $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{0}\right)$

où $\overrightarrow{v}$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.

On a $\overrightarrow{0} = \mathbf{0} \times \overrightarrow{v}$

Remarque

Une famille contenant le vecteur nul n'est jamais libre.

Exemple n° 6 : Considérons la famille $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{0}\right)$

où $\overrightarrow{v}$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.

On a $\overrightarrow{0} = 0 \times \overrightarrow{v}$ **(le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.)**

Remarque

Une famille contenant le vecteur nul n'est jamais libre.

Exemple n° 6 : Considérons la famille $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{0}\right)$

où $\overrightarrow{v}$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.

On a $\overrightarrow{0} = \mathbf{0} \times \overrightarrow{v}$ **(le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.)**

Donc, le vecteur $\overrightarrow{0}$ de la famille $\mathcal{F}$ est une

Remarque

Une famille contenant le vecteur nul n'est jamais libre.

Exemple n° 6 : Considérons la famille $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{0}\right)$

où $\overrightarrow{v}$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.

On a $\overrightarrow{0} = 0 \times \overrightarrow{v}$ **(le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.)**

Donc, le vecteur $\overrightarrow{0}$ de la famille $\mathcal{F}$ est une **combinaison linéaire** du vecteur $\overrightarrow{v}$.

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est liée.

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \text{ soit}$$

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + \boxed{b} + c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$$ on permute les variables :

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \text{ on permute les variables : } \begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ = & L_1 + L_2 \\ = & L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + \boxed{b} + c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \text{ on permute les variables : } \begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ 3a = & L_1 + L_2 \\ = & L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + \boxed{b} + c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \text{ on permute les variables : } \begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ 3a + 6c = & L_1 + L_2 \\ = & L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + \boxed{b} + c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \text{ on permute les variables : } \begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ 3a + 6c = 0 & L_1 + L_2 \\ = & L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \text{ on permute les variables : } \begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ 3a + 6c = 0 & L_1 + L_2 \\ 5a = & L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2a + \boxed{b} + c = 0\\ a - b + 5c = 0\\ 3a + 2b = 0\end{cases} \text{ on permute les variables : } \begin{cases}b + 2a + c = 0 & L_1\\ 3a + 6c = 0 & L_1+L_2\\ 5a + 10c = & L_3+2L_2\end{cases}$$

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + \boxed{b} + c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$$ on permute les variables : $$\begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ 3a + 6c = 0 & L_1+L_2 \\ 5a + 10c = 0 & L_3+2L_2 \end{cases}$$

III. Familles libres, bases, et coordonnées.

Exemple n° 7 : $\vec{u}(2,1,3)$, $\vec{v}(1,-1,2)$, et $\vec{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$:

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \text{ on permute les variables : } \begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ 3a + 6c = 0 & L_1 + L_2 \\ 5a + 10c = 0 & L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ = & L_2/3 \\ = & L_3/5 \end{cases}$$

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + \boxed{b} + c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \text{ on permute les variables : } \begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ 3a + 6c = 0 & L_1 + L_2 \\ 5a + 10c = 0 & L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ a + 2c = 0 & L_2/3 \\ = & L_3/5 \end{cases}$$

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2a+b+c=0\\ a-b+5c=0\\ 3a+2b=0\end{cases}$$ on permute les variables : $$\begin{cases}b+2a+c=0 & L_1\\ 3a+6c=0 & L_1+L_2\\ 5a+10c=0 & L_3+2L_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}b+2a+c=0 & L_1\\ a+2c=0 & L_2/3\\ a+2c=0 & L_3/5\end{cases}$$

Exemple n° 7 : $\vec{u}(2,1,3)$, $\vec{v}(1,-1,2)$, et $\vec{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$:

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + \boxed{b} + c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$$ on permute les variables : $$\begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ 3a + 6c = 0 & L_1 + L_2 \\ 5a + 10c = 0 & L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ a + 2c = 0 & L_2/3 \\ a + 2c = 0 & L_3/5 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 2a + c = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases}$$

III. Familles libres, bases, et coordonnées.

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \text{ on permute les variables : } \begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ 3a + 6c = 0 & L_1 + L_2 \\ 5a + 10c = 0 & L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ a + 2c = 0 & L_2/3 \\ a + 2c = 0 & L_3/5 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 2a + c = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \\ a = \end{cases}$$

III. Familles libres, bases, et coordonnées.

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \text{ on permute les variables : } \begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ 3a + 6c = 0 & L_1 + L_2 \\ 5a + 10c = 0 & L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ a + 2c = 0 & L_2/3 \\ a + 2c = 0 & L_3/5 \end{cases} \quad \begin{cases} b + 2a + c = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = \\ a = -2c \end{cases}$$

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2a+b+c=0\\a-b+5c=0\\3a+2b=0\end{cases} \text{ on permute les variables : } \begin{cases}b+2a+c=0 & L_1\\3a+6c=0 & L_1+L_2\\5a+10c=0 & L_3+2L_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}b+2a+c=0 & L_1\\a+2c=0 & L_2/3\\a+2c=0 & L_3/5\end{cases} \qquad \begin{cases}b+2a+c=0\\a+2c=0\end{cases} \qquad \begin{cases}b=3c\\a=-2c\end{cases}$$

Exemple n° 7 : $\vec{u}(2,1,3)$, $\vec{v}(1,-1,2)$, et $\vec{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$:

$$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2a+\boxed{b}+c=0\\ a-b+5c=0\\ 3a+2b=0\end{cases}$$ on permute les variables : $$\begin{cases}b+2a+c=0 & L_1\\ 3a+6c=0 & L_1+L_2\\ 5a+10c=0 & L_3+2L_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}b+2a+c=0 & L_1\\ a+2c=0 & L_2/3\\ a+2c=0 & L_3/5\end{cases} \qquad \begin{cases}b+2a+c=0\\ a+2c=0\end{cases} \qquad \begin{cases}b=3c\\ a=-2c\end{cases}$$

En prenant $c=1$, pause on obtient $a=-2$ et $b=3$

Exemple n° 7 : $\vec{u}(2,1,3)$, $\vec{v}(1,-1,2)$, et $\vec{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$:

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + \boxed{b} + c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$$ on permute les variables : $$\begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ 3a + 6c = 0 & L_1 + L_2 \\ 5a + 10c = 0 & L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ a + 2c = 0 & L_2/3 \\ a + 2c = 0 & L_3/5 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 2a + c = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 3c \\ a = -2c \end{cases}$$

En prenant $c = 1$, pause on obtient $a = -2$ et $b = 3$ soit $-2\vec{u} + 3\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2a+b+c=0\\ a-b+5c=0\\ 3a+2b=0\end{cases} \text{ on permute les variables : } \begin{cases}b+2a+c=0 & L_1\\ 3a+6c=0 & L_1+L_2\\ 5a+10c=0 & L_3+2L_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}b+2a+c=0 & L_1\\ a+2c=0 & L_2/3\\ a+2c=0 & L_3/5\end{cases} \qquad \begin{cases}b+2a+c=0\\ a+2c=0\end{cases} \qquad \begin{cases}b=3c\\ a=-2c\end{cases}$$

En prenant $c=1$, pause on obtient $a=-2$ et $b=3$ soit $-2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$.

On a une combinaison à coefficients non nuls qui s'annule : la famille est **liée**.

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée.

Démonstration

Donnons-nous un combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$:

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \text{ soit } a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + \boxed{b} + c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$$

on permute les variables :

$$\begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ 3a + 6c = 0 & L_1 + L_2 \\ 5a + 10c = 0 & L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 2a + c = 0 & L_1 \\ a + 2c = 0 & L_2/3 \\ a + 2c = 0 & L_3/5 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 2a + c = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 3c \\ a = -2c \end{cases}$$

En prenant $c = 1$, pause on obtient $a = -2$ et $b = 3$ soit $-2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

On a une combinaison à coefficients non nuls qui s'annule : la famille est **liée**.

D'ailleurs : $\overrightarrow{u} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{v} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\overrightarrow{w}$.

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ est **libre**

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ est **libre**

Démonstration

Résolvons le système $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ (combinaison linéaire nulle).

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ est **libre**

Démonstration

Résolvons le système $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ (combinaison linéaire nulle).

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + 5b = 0 \\ 3a = 0 \end{cases}$$

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$ est **libre**

Démonstration

Résolvons le système $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ (combinaison linéaire nulle).

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + 5b = 0 \\ 3a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Exemple n° 7 : $\overrightarrow{u}(2,1,3)$, $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$, et $\overrightarrow{w}(1,5,0)$.

- Démontrons que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ est **libre**

Démonstration

Résolvons le système $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ (combinaison linéaire nulle).

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + 5b = 0 \\ 3a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$ donc la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ est libre !

5. Bases et dimension.

5. Bases et dimension.

Définition:

- On appelle **base** de E toute famille libre et génératrice de E.

5. Bases et dimension.

Définition:

- On appelle **base** de E toute famille libre et génératrice de E.

Les bases permettent de définir les coordonnées des vecteurs.

5. Bases et dimension.

Définition:

On appelle **base** de E toute famille libre et génératrice de E.

Les bases permettent de définir les coordonnées des vecteurs. En effet, étant donnée une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$, et un vecteur $\overrightarrow{a}$:

5. Bases et dimension.

Définition:

On appelle **base** de E toute famille libre et génératrice de E.

Les bases permettent de définir les coordonnées des vecteurs. En effet, étant donnée une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$, et un vecteur $\overrightarrow{a}$:

- $\mathcal{B}$ est génératrice donc $\overrightarrow{a}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

5. Bases et dimension.

Définition:

On appelle **base** de E toute famille libre et génératrice de E.

Les bases permettent de définir les coordonnées des vecteurs. En effet, étant donnée une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$, et un vecteur $\overrightarrow{a}$:

- $\mathcal{B}$ est génératrice donc $\overrightarrow{a}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Autrement dit,

5. Bases et dimension.

Définition:

On appelle **base** de E toute famille libre et génératrice de E.

Les bases permettent de définir les coordonnées des vecteurs. En effet, étant donnée une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$, et un vecteur $\overrightarrow{a}$:

- $\mathcal{B}$ est génératrice donc $\overrightarrow{a}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Autrement dit, il existe une famille de scalaires $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telle que $\overrightarrow{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{e_n}$.

5. Bases et dimension.

Définition:

On appelle **base** de E toute famille libre et génératrice de E.

Les bases permettent de définir les coordonnées des vecteurs. En effet, étant donnée une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$, et un vecteur $\overrightarrow{a}$:

- $\mathcal{B}$ est génératrice donc $\overrightarrow{a}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Autrement dit, il existe une famille de scalaires $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telle que $\overrightarrow{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{e_n}$.
- $\mathcal{B}$ est libre, donc cette famille de scalaires est unique.

5. Bases et dimension.

Définition:

On appelle **base** de E toute famille libre et génératrice de E.

Les bases permettent de définir les coordonnées des vecteurs. En effet, étant donnée une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$, et un vecteur $\overrightarrow{a}$:

- $\mathcal{B}$ est génératrice donc $\overrightarrow{a}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Autrement dit, il existe une famille de scalaires $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ telle que $\overrightarrow{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \dots + x_n\overrightarrow{e_n}$.
- $\mathcal{B}$ est libre, donc cette famille de scalaires est unique.

Définition:

Cette famille de scalaires $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est appelée les **coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{a}$ dans la base $\mathcal{B}$.

5. Bases et dimension.

Définition:

On appelle **base** de E toute famille libre et génératrice de E.

Les bases permettent de définir les coordonnées des vecteurs. En effet, étant donnée une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$, et un vecteur $\overrightarrow{a}$:

- $\mathcal{B}$ est génératrice donc $\overrightarrow{a}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Autrement dit, il existe une famille de scalaires $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ telle que $\overrightarrow{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \dots + x_n\overrightarrow{e_n}$.
- $\mathcal{B}$ est libre, donc cette famille de scalaires est unique.

Définition:

Cette famille de scalaires $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est appelée les **coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{a}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Et on note $\dots\dots = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

5. Bases et dimension.

Définition:

On appelle **base** de E toute famille libre et génératrice de E.

Les bases permettent de définir les coordonnées des vecteurs. En effet, étant donnée une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$, et un vecteur $\overrightarrow{a}$:

- $\mathcal{B}$ est génératrice donc $\overrightarrow{a}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Autrement dit, il existe une famille de scalaires $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ telle que $\overrightarrow{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \dots + x_n\overrightarrow{e_n}$.
- $\mathcal{B}$ est libre, donc cette famille de scalaires est unique.

Définition:

Cette famille de scalaires $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est appelée les **coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{a}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Et on note $\left[\overrightarrow{a}\right]_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

6. Bases et dimension.

Définition:

On appelle **base** de E toute famille libre et génératrice de E.

Théorème

Etant donné un espace vectoriel E. Si E est engendré par un nombre fini de vecteurs alors :

- Il existe une base de E ;
- Toutes les bases de E **ont le même nombre de vecteurs.**

6. Bases et dimension.

Définition:

On appelle **base** de E toute famille libre et génératrice de E.

Théorème

Etant donné un espace vectoriel E. Si E est engendré par un nombre fini de vecteurs alors :

- Il existe une base de E ;
- Toutes les bases de E **ont le même nombre de vecteurs.**

Définition:

On dit qu'un espace vectoriel E est de **dimension finie** s'il est engendré par un nombre fini de vecteur.

Le nombre de vecteurs de chacune de ses bases est la **dimension** de E, notée $\dim(E)$.

Propriété:

- La dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est n.

Propriété:

- La dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est n.
- Si H est sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E dimension finie, alors $\dim(H) \leqslant \dim(E)$.

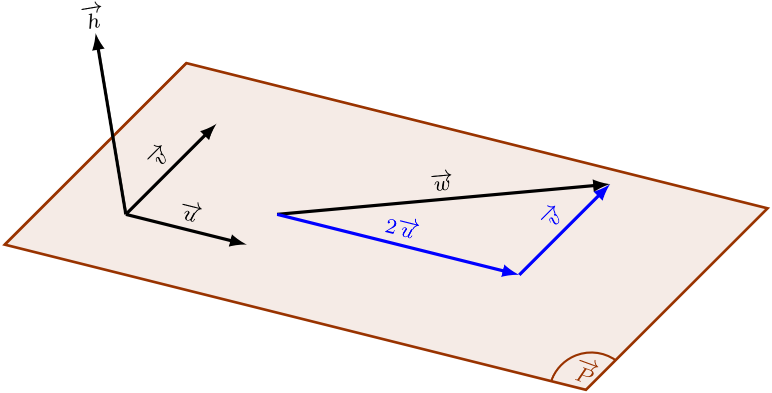
Propriété:

- La dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est n.
- Si H est sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E dimension finie, alors $\dim(H) \leqslant \dim(E)$.
- La dimension d'un espace vectoriel E de dimension finie est le nombre de vecteurs de la plus grande famille libre de E.

Propriété:

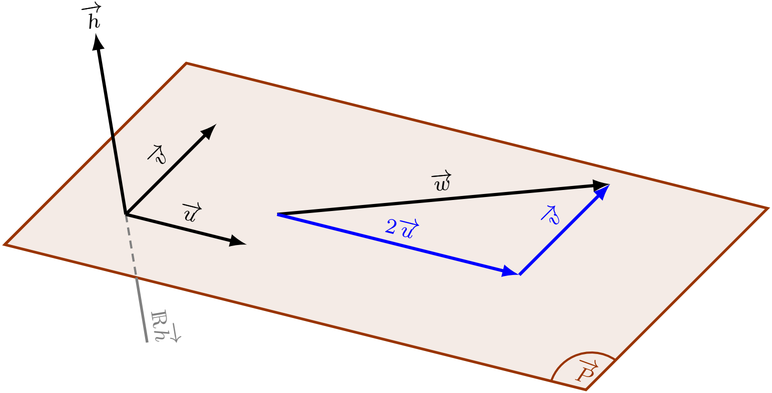
- La dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est n.
- Si H est sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E dimension finie, alors $\dim(H) \leqslant \dim(E)$.
- La dimension d'un espace vectoriel E de dimension finie est le nombre de vecteurs de la plus grande famille libre de E.
- Une famille libre de p vecteurs engendre un sous-espace vectoriel de dimension p.

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



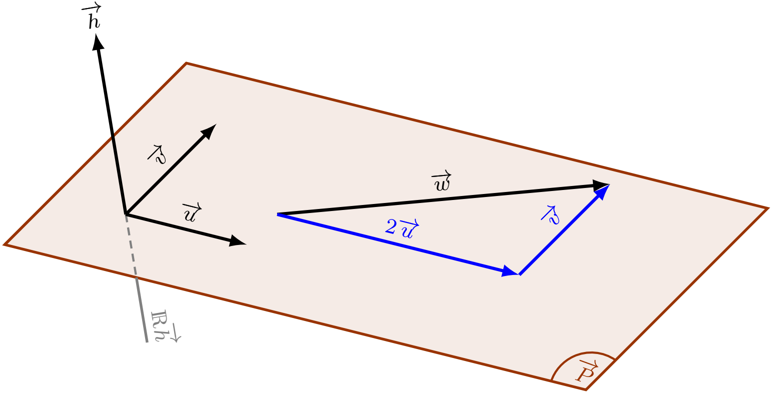
- $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est la

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



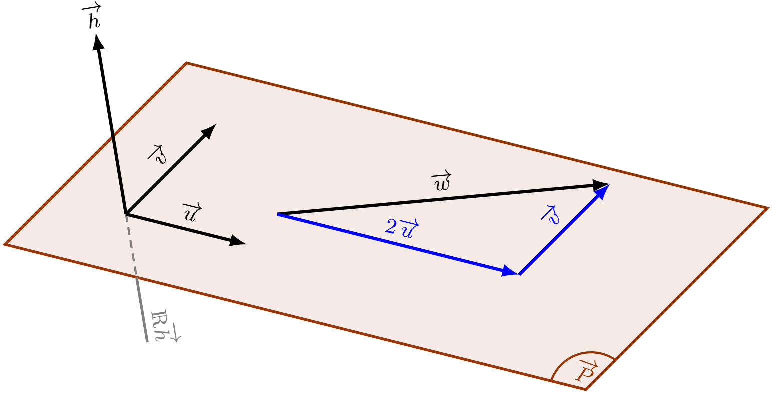
- $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{h}$.

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



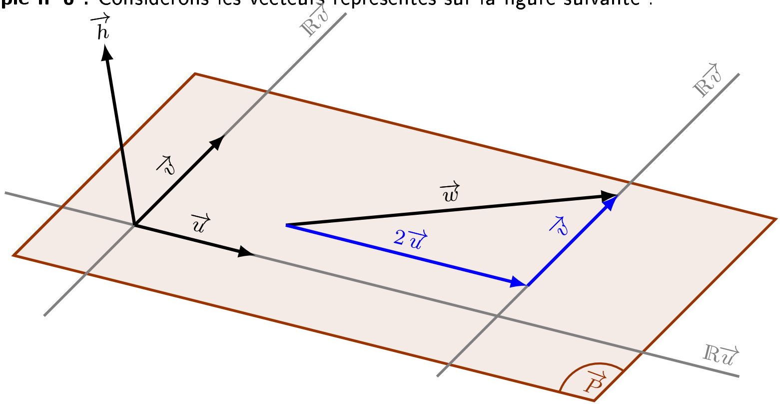
- $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{h}$. $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est un sous-espace vectoriel de dimension

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



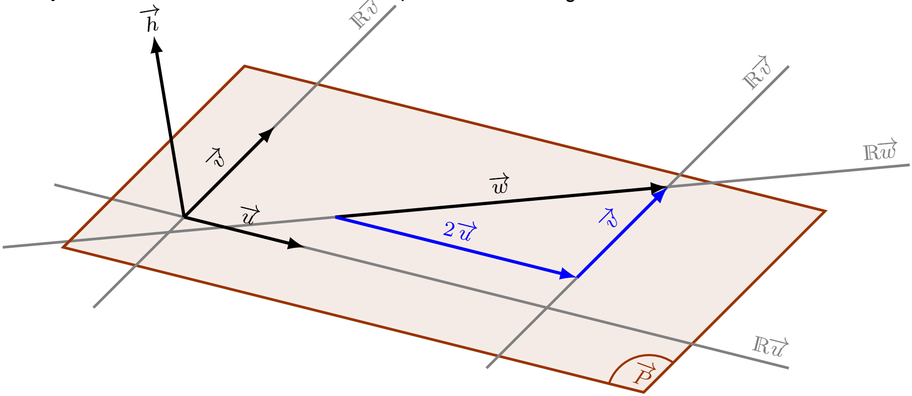
- $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{h}$. $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.
- $\overrightarrow{P} =$

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



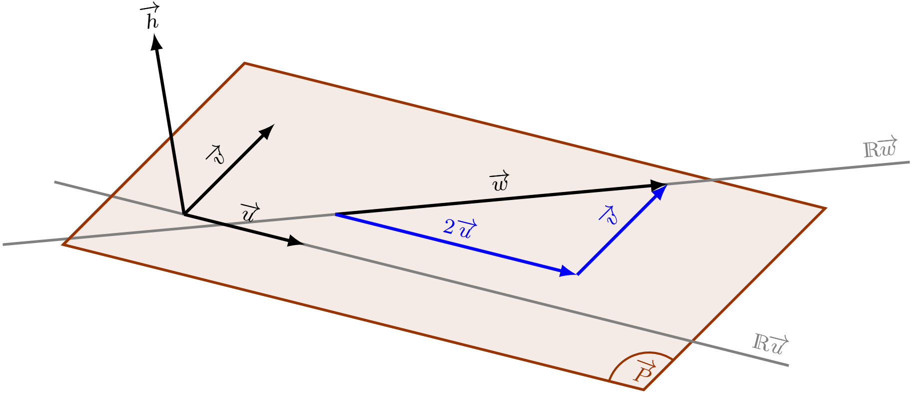
- $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{h}$. $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est un sous-espace vectoriel de dimension **1**.
- $\overrightarrow{P} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} =$

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



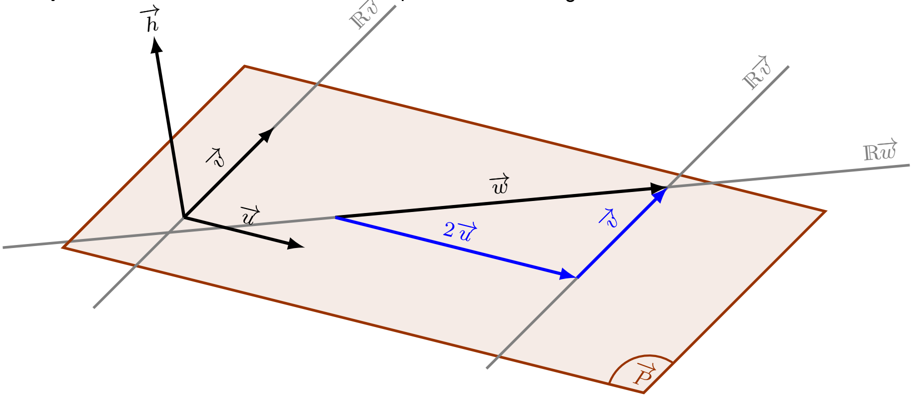
- $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{h}$. $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est un sous-espace vectoriel de dimension **1**.
- $\overrightarrow{P} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} =$

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



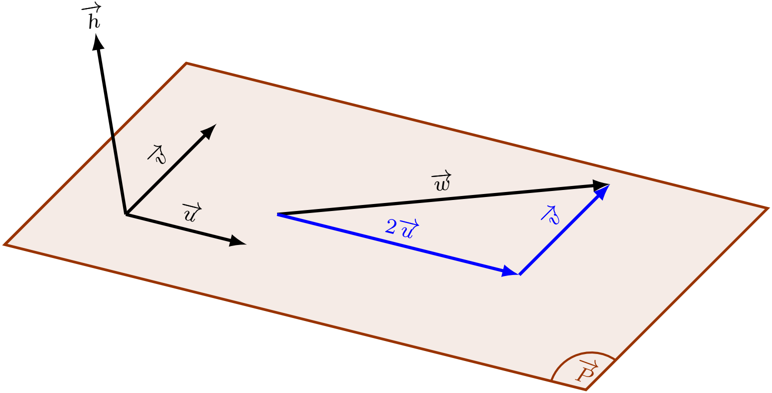
- $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{h}$. $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est un sous-espace vectoriel de dimension **1**.
- $\overrightarrow{P} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} =$

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



- $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{h}$. $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est un sous-espace vectoriel de dimension **1**.
- $\overrightarrow{P} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \mathbb{R}\overrightarrow{w} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$

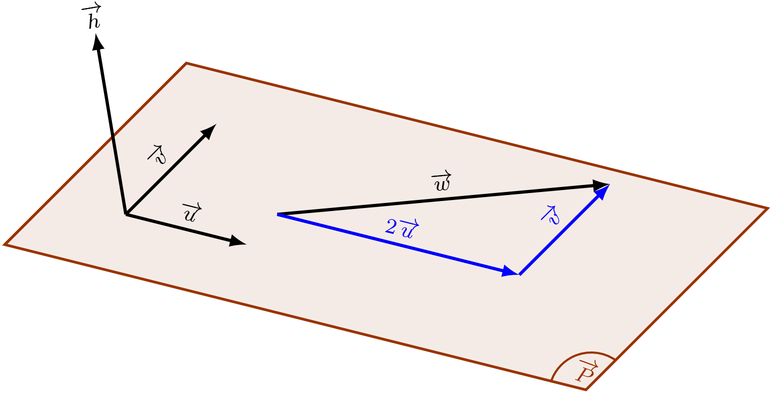
Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



- $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{h}$. $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est un sous-espace vectoriel de dimension **1**.
- $\overrightarrow{P} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \mathbb{R}\overrightarrow{w} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$

  Donc, les familles $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$, $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$, et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ engendrent

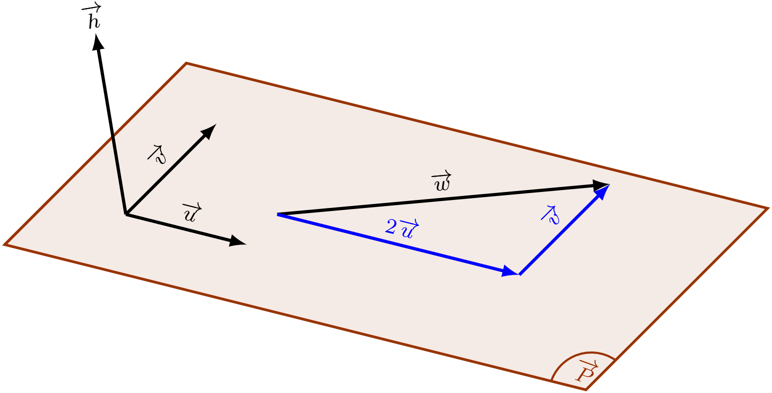
Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



- $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{h}$. $\mathbb{R}\overrightarrow{h}$ est un sous-espace vectoriel de dimension **1**.
- $\overrightarrow{P} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \mathbb{R}\overrightarrow{w} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$

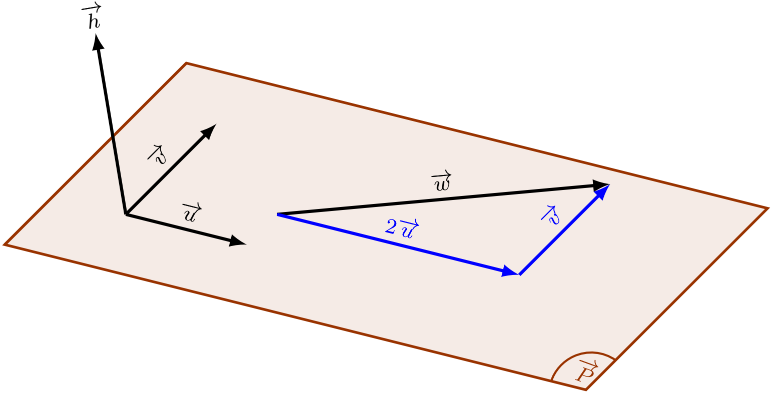
  Donc, les familles $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$, $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$, et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ engendrent **le plan vectoriel** $\overrightarrow{P}$.

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



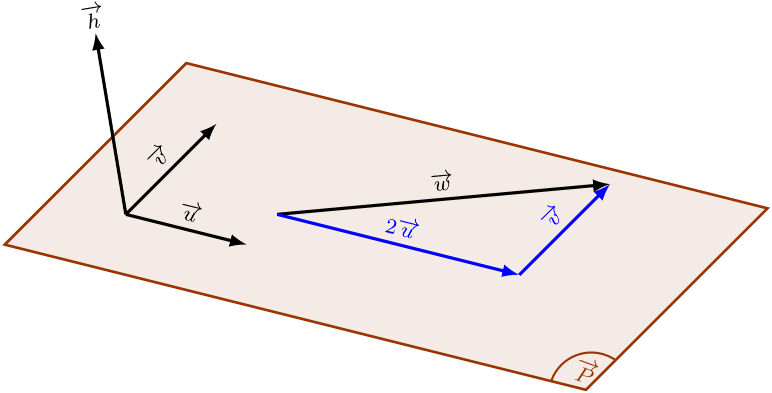
- $\overrightarrow{P} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \mathbb{R}\overrightarrow{w} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$
  Donc, les familles $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$, $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$, et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ engendrent **le plan vectoriel $\overrightarrow{P}$**.
- Ces familles sont toutes libres, sauf

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



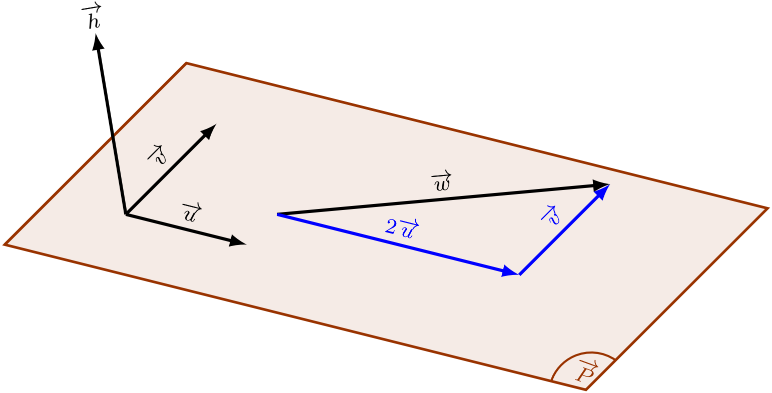
- $\overrightarrow{P} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \mathbb{R}\overrightarrow{w} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$
  Donc, les familles $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$, $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$, et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ engendrent **le plan vectoriel $\overrightarrow{P}$**.
- Ces familles sont toutes libres, sauf **$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$**.

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



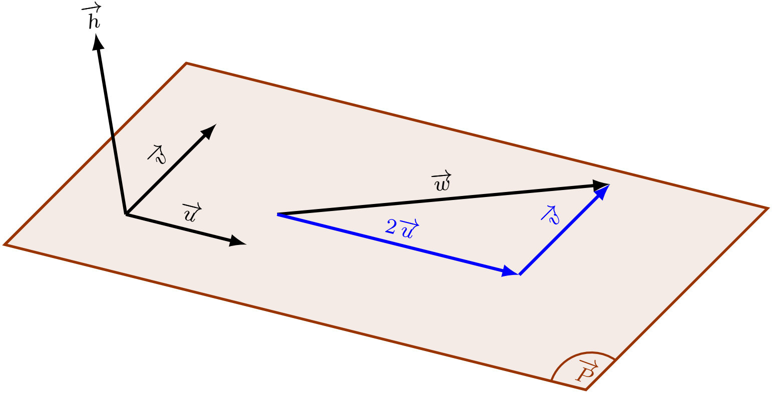
- $\vec{P} = \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} = \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w} = \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{w} = \mathbb{R}\vec{w} + \mathbb{R}\vec{v}$
  Donc, les familles $(\vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{u}, \vec{w})$, $(\vec{w}, \vec{v})$, et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ engendrent **le plan vectoriel $\vec{P}$**.
- Ces familles sont toutes libres, sauf $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On voit que les plus grandes familles de vecteurs libres de $\vec{P}$ n'ont que deux vecteurs, donc $\dim(\vec{P}) =$

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



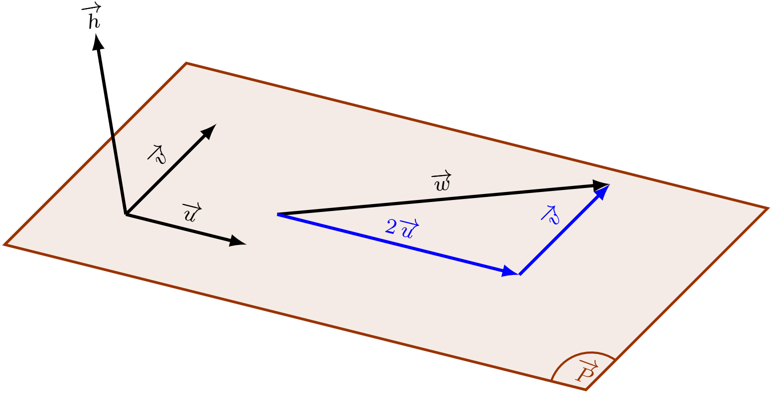
- $\overrightarrow{P} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \mathbb{R}\overrightarrow{w} + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$
  Donc, les familles $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$, $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$, et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ engendrent **le plan vectoriel $\overrightarrow{P}$**.
- Ces familles sont toutes libres, sauf $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. On voit que les plus grandes familles de vecteurs libres de $\overrightarrow{P}$ n'ont que deux vecteurs, donc $\dim(\overrightarrow{P}) = \mathbf{2}$.

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



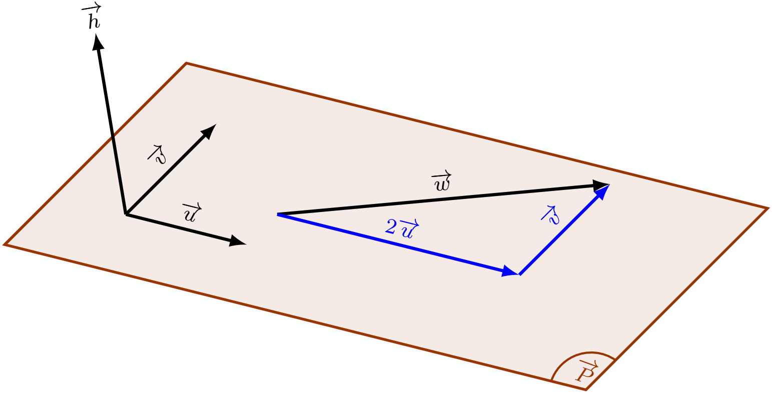
- $\dim(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{h}) =$

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



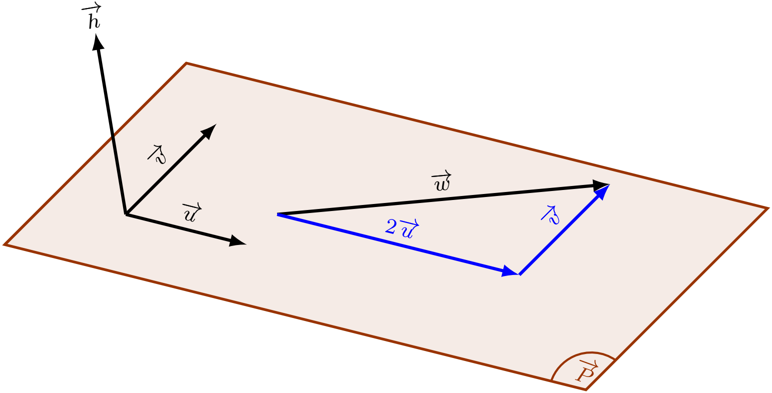
- $\dim(\vec{u}, \vec{v}, \vec{h}) = \mathbf{3}$

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



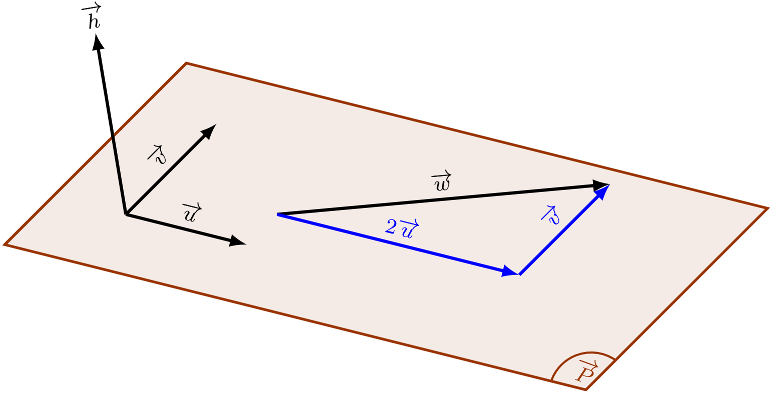
- $\dim(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{h}) =$ **3** et $\dim(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{h}) =$

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



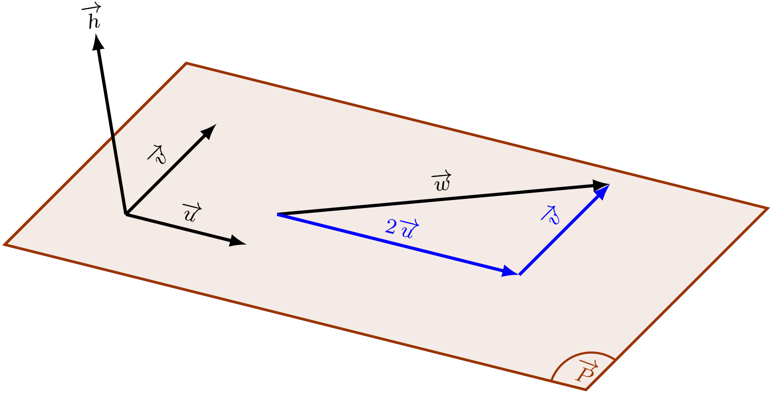
- dim$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{h}) = \mathbf{3}$ et dim$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{h}) = \mathbf{3}$

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



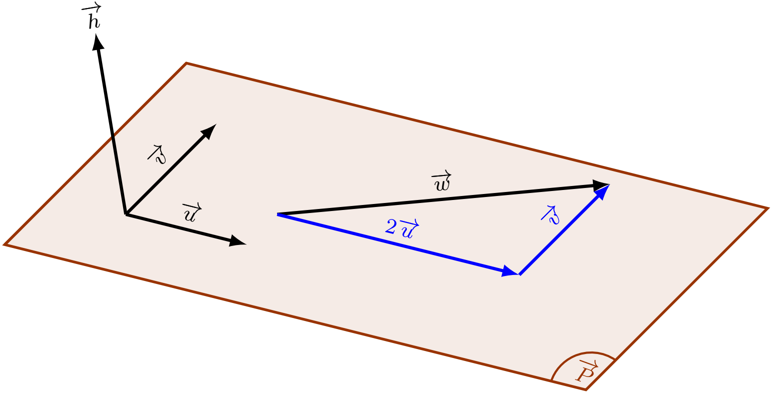
- $\dim(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{h}) = \mathbf{3}$ et $\dim(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{h}) = \mathbf{3}$
- $\mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{v}$.

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



- $\dim(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{h}) = \mathbf{3}$ et $\dim(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{h}) = \mathbf{3}$
- $\mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{v}$. $\mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un sous-espace vectoriel de dimension

Exemple n° 8 : Considérons les vecteurs représentés sur la figure suivante :



- $\dim(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{h}) = \mathbf{3}$ et $\dim(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{h}) = \mathbf{3}$
- $\mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{v}$. $\mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $\mathbf{1}$.

7. Rang d'une famille de vecteurs.

7. Rang d'une famille de vecteurs.

Définition:

On appelle **rang** d'une famille $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p})$ de vecteurs de E, noté $\mathrm{rg}(\mathcal{V})$1, la dimension du sous espace vectoriel F engendré par la famille $\mathcal{V}$:

$$F = \mathbb{R}\overrightarrow{v_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{v_2} + \ldots + \mathbb{R}\overrightarrow{v_p}$$

Autrement dit, le rang est le nombre maximum de vecteurs que peut comporter une famille libre extraite de $\mathcal{V}$.

7. Rang d'une famille de vecteurs.

Définition:

On appelle **rang** d'une famille $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p})$ de vecteurs de E, noté $\mathrm{rg}(\mathcal{V})$1, la dimension du sous espace vectoriel F engendré par la famille $\mathcal{V}$:

$$F = \mathbb{R}\overrightarrow{v_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{v_2} + \ldots + \mathbb{R}\overrightarrow{v_p}$$

Autrement dit, le rang est le nombre maximum de vecteurs que peut comporter une famille libre extraite de $\mathcal{V}$.

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, mieux, pour trouver une base du sous-espace vectoriel engendré par cette famille, on peut utiliser l'algorithme suivant :

7. Rang d'une famille de vecteurs.

Définition:

On appelle **rang** d'une famille $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p})$ de vecteurs de E, noté $\mathrm{rg}(\mathcal{V})$1, la dimension du sous espace vectoriel F engendré par la famille $\mathcal{V}$:

$$F = \mathbb{R}\overrightarrow{v_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{v_2} + \ldots + \mathbb{R}\overrightarrow{v_p}$$

Autrement dit, le rang est le nombre maximum de vecteurs que peut comporter une famille libre extraite de $\mathcal{V}$.

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, mieux, pour trouver une base du sous-espace vectoriel engendré par cette famille, on peut utiliser l'algorithme suivant :

Algorithme sur l'espace ligne

7. Rang d'une famille de vecteurs.

Définition:

On appelle **rang** d'une famille $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p})$ de vecteurs de E, noté $\mathrm{rg}(\mathcal{V})1$, la dimension du sous espace vectoriel F engendré par la famille $\mathcal{V}$:

$$F = \mathbb{R}\overrightarrow{v_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{v_2} + \ldots + \mathbb{R}\overrightarrow{v_p}$$

Autrement dit, le rang est le nombre maximum de vecteurs que peut comporter une famille libre extraite de $\mathcal{V}$.

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, mieux, pour trouver une base du sous-espace vectoriel engendré par cette famille, on peut utiliser l'algorithme suivant :

Algorithme sur l'espace ligne

1. Former la matrice M dont les **lignes** sont les vecteurs de la famille.

7. Rang d'une famille de vecteurs.

Définition:

On appelle **rang** d'une famille $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p})$ de vecteurs de E, noté $\mathrm{rg}(\mathcal{V})$1, la dimension du sous espace vectoriel F engendré par la famille $\mathcal{V}$:

$$F = \mathbb{R}\overrightarrow{v_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{v_2} + \ldots + \mathbb{R}\overrightarrow{v_p}$$

Autrement dit, le rang est le nombre maximum de vecteurs que peut comporter une famille libre extraite de $\mathcal{V}$.

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, mieux, pour trouver une base du sous-espace vectoriel engendré par cette famille, on peut utiliser l'algorithme suivant :

Algorithme sur l'espace ligne

1. Former la matrice M dont les **lignes** sont les vecteurs de la famille.
2. Réduire la matrice M sous forme **échelonnée.**

7. Rang d'une famille de vecteurs.

Définition:

On appelle **rang** d'une famille $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ de vecteurs de E, noté $\mathrm{rg}(\mathcal{V})$1, la dimension du sous espace vectoriel F engendré par la famille $\mathcal{V}$:

$$F = \mathbb{R}\overrightarrow{v_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{v_2} + \ldots + \mathbb{R}\overrightarrow{v_p}$$

Autrement dit, le rang est le nombre maximum de vecteurs que peut comporter une famille libre extraite de $\mathcal{V}$.

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, mieux, pour trouver une base du sous-espace vectoriel engendré par cette famille, on peut utiliser l'algorithme suivant :

Algorithme sur l'espace ligne

1. Former la matrice M dont les **lignes** sont les vecteurs de la famille.
2. Réduire la matrice M sous forme **échelonnée.**
3. Les vecteurs lignes non nuls forment une base du sous-espace engendré.

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1, 2, 0, -1)$, $\overrightarrow{v}(2, 6, -3, -3)$, et $\overrightarrow{w}(3, 10, -6, -5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ & & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \ldots\ldots \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

III. Familles libres, bases, et coordonnées.

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ \color{red}{3} & & & \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ L_2 \ldots\ldots \\ L_3 \ldots\ldots \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \ldots\ldots \end{array} \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E=\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & & \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 \ldots\ldots \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1, 2, 0, -1)$, $\overrightarrow{v}(2, 6, -3, -3)$, et $\overrightarrow{w}(3, 10, -6, -5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 \ldots\ldots \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ L_2 \ ? \\ L_3 \ldots\ldots \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \ldots\ldots \end{array} \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1, 2, 0, -1)$, $\overrightarrow{v}(2, 6, -3, -3)$, et $\overrightarrow{w}(3, 10, -6, -5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & & & \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 \ldots\ldots \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \ldots\ldots \end{array} \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1, 2, 0, -1)$, $\overrightarrow{v}(2, 6, -3, -3)$, et $\overrightarrow{w}(3, 10, -6, -5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E=\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3\ ? \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

III. Familles libres, bases, et coordonnées.

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \ldots\ldots \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \ ? \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E=\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3-2L_2 \end{array}$$

III. Familles libres, bases, et coordonnées.

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{matrix}$$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1, 2, 0, -1)$, $\overrightarrow{v}(2, 6, -3, -3)$, et $\overrightarrow{w}(3, 10, -6, -5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1, 2, 0, -1)$, $\overrightarrow{v}(2, 6, -3, -3)$, et $\overrightarrow{w}(3, 10, -6, -5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array}$$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1, 2, 0, -1)$, $\overrightarrow{v}(2, 6, -3, -3)$, et $\overrightarrow{w}(3, 10, -6, -5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array}$$

Donc, $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \ldots$ et $\mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Une base de F est : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array}$$

Donc, $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mathbf{2}$ et $\mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Une base de F est : $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array}$$

Donc, $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mathbf{2}$ et $\mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \mathbf{(1,2,0,-1)}\mathbb{R} + \mathbf{(0,2,-3,-1)}\mathbb{R}$

Une base de F est : ....

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array}$$

Donc, $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mathbf{2}$ et $\mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \mathbf{(1,2,0,-1)}\mathbb{R} + \mathbf{(0,2,-3,-1)}\mathbb{R}$

Une base de F est : $\left(\mathbf{(1,2,0,-1),(0,2,-3,-1)}\right)$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}(2,6,-3,-3)$, et $\overrightarrow{w}(3,10,-6,-5)$. Déterminons le rang et une base du sous-espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array}$$

Donc, $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mathbf{2}$ et $\mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\overrightarrow{w} = \mathbf{(1,2,0,-1)}\mathbb{R} + \mathbf{(0,2,-3,-1)}\mathbb{R}$

Une base de F est : $\mathbf{((1,2,0,-1),(0,2,-3,-1))}$

Remarque

L'algorithme de Gauss permet d'**éliminer** les lignes qui sont des combinaisons linéaires des autres lignes.

8. Somme de sous-espaces vectoriels.

Définition:

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On note $A+B = \{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ où $\overrightarrow{a} \in A$ et $\overrightarrow{b} \in B\}$.

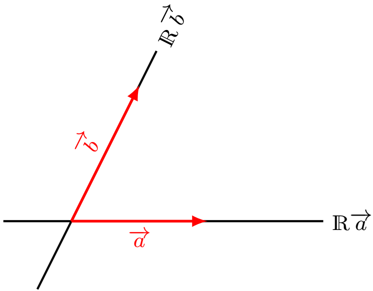
8. Somme de sous-espaces vectoriels.

Définition:

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On note $A+B = \{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \text{ où } \overrightarrow{a} \in A \text{ et } \overrightarrow{b} \in B\}$.

Exemple n° 10 : On se place dans $\mathbb{R}^2$, et considère les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ non colinéaires :



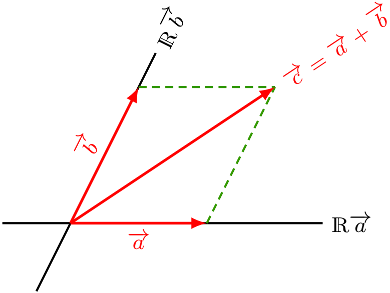
8. Somme de sous-espaces vectoriels.

Définition:

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On note $A+B = \{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ où $\overrightarrow{a} \in A$ et $\overrightarrow{b} \in B\}$.

Exemple n° 10 : On se place dans $\mathbb{R}^2$, et considère les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ non colinéaires :



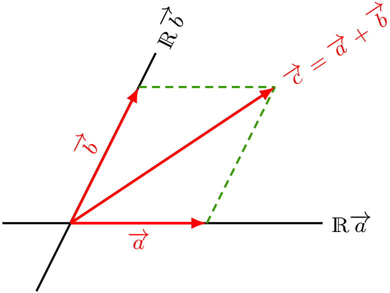
8. Somme de sous-espaces vectoriels.

Définition:

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On note $A+B = \{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ où $\overrightarrow{a} \in A$ et $\overrightarrow{b} \in B\}$.

Exemple n° 10 : On se place dans $\mathbb{R}^2$, et considère les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ non colinéaires :



On constate que

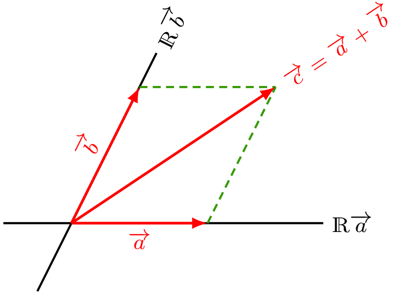
8. Somme de sous-espaces vectoriels.

Définition:

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On note $A+B = \{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ où $\overrightarrow{a} \in A$ et $\overrightarrow{b} \in B\}$.

Exemple n° 10 : On se place dans $\mathbb{R}^2$, et considère les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ non colinéaires :



On constate que

- $\overrightarrow{c} \notin$

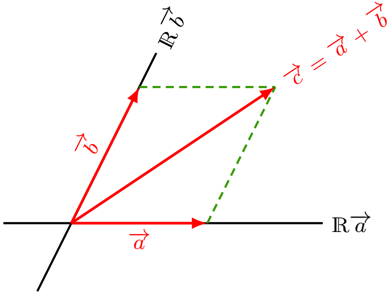
8. Somme de sous-espaces vectoriels.

Définition:

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On note $A+B = \{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ où $\overrightarrow{a} \in A$ et $\overrightarrow{b} \in B\}$.

Exemple n° 10 : On se place dans $\mathbb{R}^2$, et considère les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ non colinéaires :



On constate que

- $\overrightarrow{c} \notin \left(\mathbb{R}\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \cup \mathbb{R}\overrightarrow{\boldsymbol{b}}\right)$

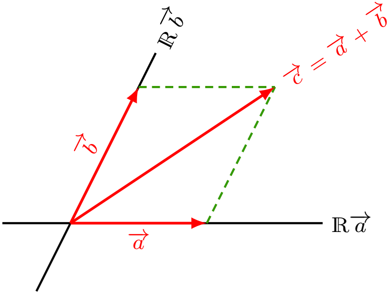
8. Somme de sous-espaces vectoriels.

Définition:

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On note $A+B = \{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ où $\overrightarrow{a} \in A$ et $\overrightarrow{b} \in B\}$.

Exemple n° 10 : On se place dans $\mathbb{R}^2$, et considère les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ non colinéaires :



On constate que

- $\overrightarrow{c} \notin \left(\mathbb{R}\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \cup \mathbb{R}\overrightarrow{\boldsymbol{b}}\right)$
- $\mathbb{R}\overrightarrow{a} + \mathbb{R}\overrightarrow{b} =$

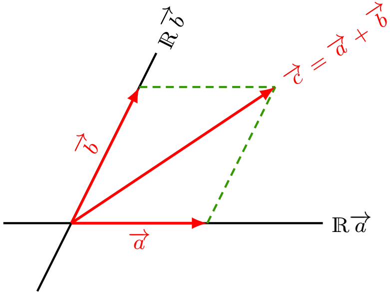
8. Somme de sous-espaces vectoriels.

Définition:

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On note $A+B = \{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ où $\overrightarrow{a} \in A$ et $\overrightarrow{b} \in B\}$.

Exemple n° 10 : On se place dans $\mathbb{R}^2$, et considère les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ non colinéaires :



On constate que

- $\overrightarrow{c} \notin \left(\mathbb{R}\overrightarrow{a} \cup \mathbb{R}\overrightarrow{b}\right)$
- $\mathbb{R}\overrightarrow{a} + \mathbb{R}\overrightarrow{b} = \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle =$

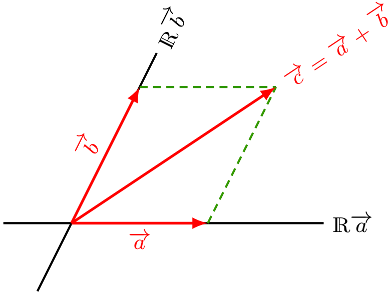
8. Somme de sous-espaces vectoriels.

Définition:

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On note $A+B = \left\{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \text{ où } \overrightarrow{a} \in A \text{ et } \overrightarrow{b} \in B\right\}$.

Exemple n° 10 : On se place dans $\mathbb{R}^2$, et considère les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ non colinéaires :



On constate que

- $\overrightarrow{c} \notin \left(\mathbb{R}\overrightarrow{a} \cup \mathbb{R}\overrightarrow{b}\right)$
- $\mathbb{R}\overrightarrow{a} + \mathbb{R}\overrightarrow{b} = \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = \mathbb{R}^2$

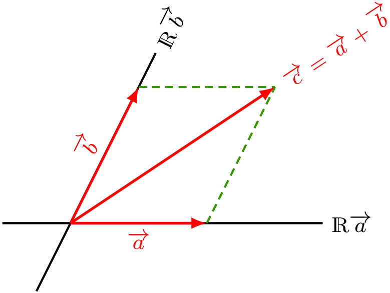
8. Somme de sous-espaces vectoriels.

Définition:

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On note $A+B = \{\vec{a} + \vec{b} \text{ où } \vec{a} \in A \text{ et } \vec{b} \in B\}$.

Exemple n° 10 : On se place dans $\mathbb{R}^2$, et considère les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ non colinéaires :



On constate que

- $\vec{c} \notin \left(\mathbb{R}\vec{a} \cup \mathbb{R}\vec{b}\right)$
- $\mathbb{R}\vec{a} + \mathbb{R}\vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \mathbb{R}^2$

Attention !

La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

Remarque

- $\mathbb{R}\overrightarrow{x_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{x_2} + \ldots + \mathbb{R}\overrightarrow{x_n} =$

Remarque

- $\mathbb{R}\overrightarrow{x_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{x_2} + \ldots + \mathbb{R}\overrightarrow{x_n} = \langle \boldsymbol{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}} \rangle$

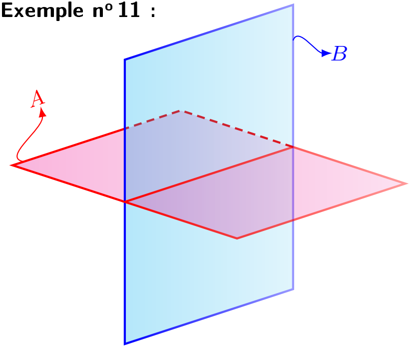
Remarque

- $\mathbb{R}\overrightarrow{x_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{x_2} + \ldots + \mathbb{R}\overrightarrow{x_n} = \boldsymbol{\langle \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n} \rangle}$
- $\langle A, B \rangle \overset{\text{def}}{=}$

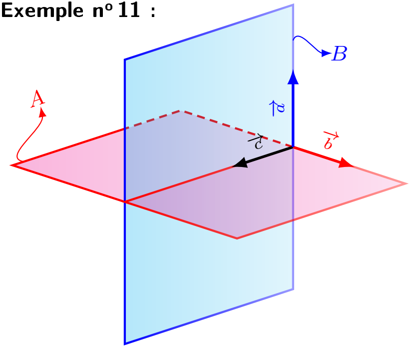
Remarque

- $\mathbb{R}\overrightarrow{x_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{x_2} + \ldots + \mathbb{R}\overrightarrow{x_n} = \boldsymbol{\langle \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n} \rangle}$
- $\langle A, B \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{A + B}$

Exemple n° 11 :

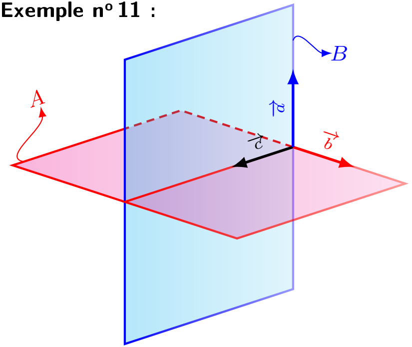


Exemple n° 11 :



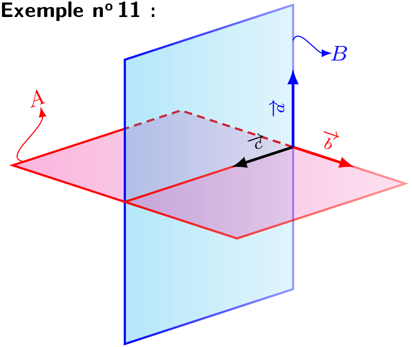
-
-
-
-

Exemple n° 11 :



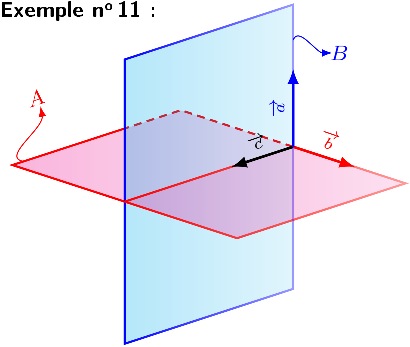
- $B = \langle \ldots\ldots \rangle$ et $\dim(B) = \ldots$
-
-
-

Exemple n° 11 :



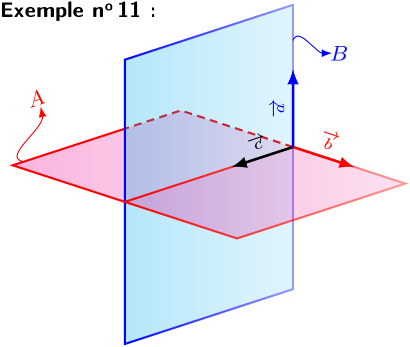
- $B = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ et $\dim(B) = \dots$
-
-
-

Exemple n° 11 :



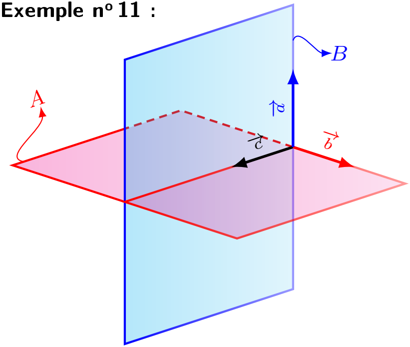
- $B = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ et $\dim(B) =$ 2
-
-
-

Exemple n° 11 :



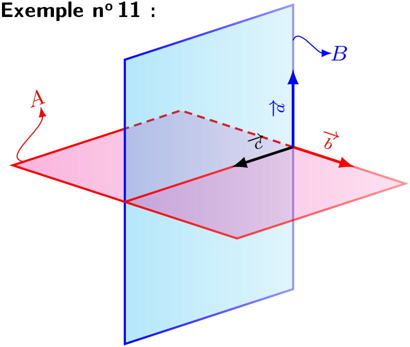
- $B = \langle\, \vec{a}\,,\ \vec{b}\,\rangle$ et $\dim(B) =$ 2
- $A = \langle \ldots\ldots \rangle$ et $\dim(A) = \ldots$
-
-

Exemple n° 11 :



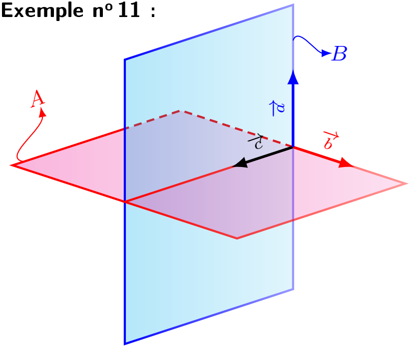
- $B = \langle\, \vec{a}\,,\, \vec{b}\,\rangle$ et $\dim(B) =$ 2
- $A = \langle\, \vec{b}\,,\, \vec{c}\,\rangle$ et $\dim(A) = \ldots$
-
-

Exemple n° 11 :



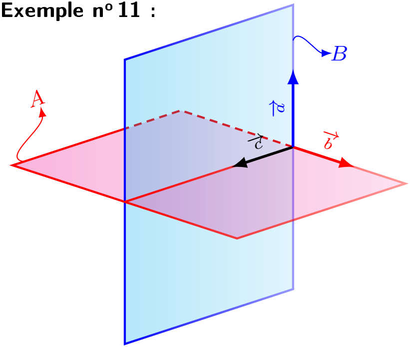
- $B = \langle\, \vec{a}\,, \vec{b}\,\rangle$ et $\dim(B) =\ 2$
- $A = \langle\, \vec{b}\,, \vec{c}\,\rangle$ et $\dim(A) =\ 2$
-
-

Exemple n° 11 :



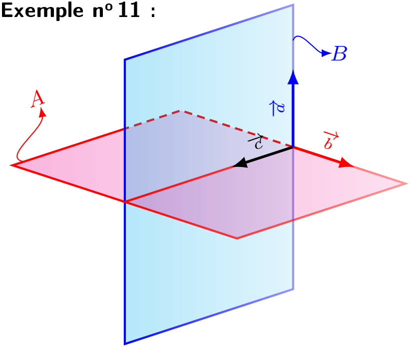
- $B = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ et $\dim(B) =$ 2
- $A = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ et $\dim(A) =$ 2
- $A \cap B = \langle \dots\dots \rangle$ et $\dim(A \cap B) = \dots$
-

Exemple n° 11 :



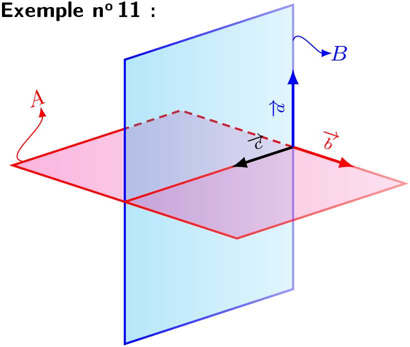
- $B = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ et $\dim(B) =$ 2
- $A = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ et $\dim(A) =$ 2
- $A \cap B = \langle \vec{c} \rangle$ et $\dim(A \cap B) = \ldots$
-

Exemple n° 11 :



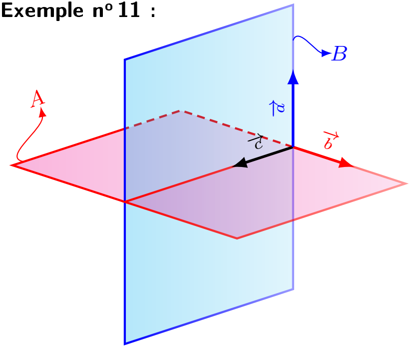
- $B = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ et $\dim(B) =$ 2
- $A = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ et $\dim(A) =$ 2
- $A \cap B = \langle \vec{c} \rangle$ et $\dim(A \cap B) =$ 1
-

Exemple n° 11 :



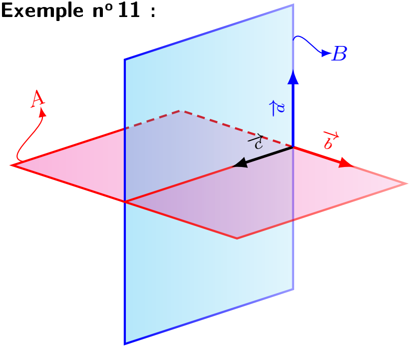
- $B = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ et $\dim(B) =$ 2
- $A = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ et $\dim(A) =$ 2
- $A \cap B = \langle \vec{c} \rangle$ et $\dim(A \cap B) =$ 1
- $A + B = \langle \,\ldots\ldots\ldots\, \rangle$ et $\dim(A + B) =$

Exemple n° 11 :



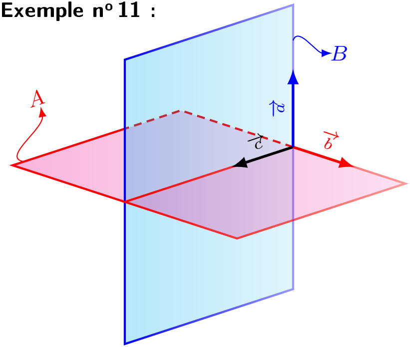
- $B = \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle$ et $\dim(B) =$ 2
- $A = \langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle$ et $\dim(A) =$ 2
- $A \cap B = \langle \overrightarrow{c} \rangle$ et $\dim(A \cap B) =$ 1
- $A + B = \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle$ et $\dim(A + B) =$

Exemple n° 11 :



- $B = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ et $\dim(B) = 2$
- $A = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ et $\dim(A) = 2$
- $A \cap B = \langle \vec{c} \rangle$ et $\dim(A \cap B) = 1$
- $A + B = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ et $\dim(A + B) = 3$

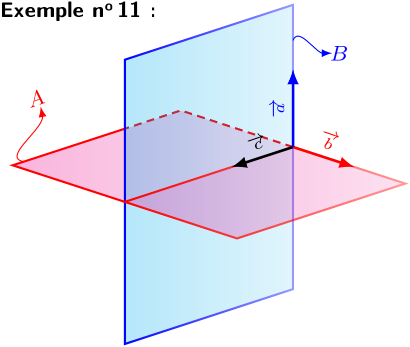
Exemple n° 11 :



- $B = \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle$ et $\dim(B) = 2$
- $A = \langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle$ et $\dim(A) = 2$
- $A \cap B = \langle \overrightarrow{c} \rangle$ et $\dim(A \cap B) = 1$
- $A + B = \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle$ et $\dim(A + B) = 3$

$\dim(A + B) \ \ldots \ \dim(A) + \dim(B),$

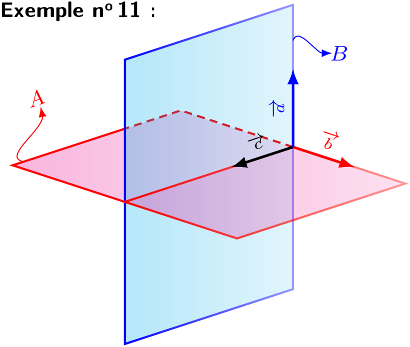
Exemple n° 11 :



- $B = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ et $\dim(B) = 2$
- $A = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ et $\dim(A) = 2$
- $A \cap B = \langle \vec{c} \rangle$ et $\dim(A \cap B) = 1$
- $A + B = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ et $\dim(A + B) = 3$

$\dim(A+B) \neq \dim(A) + \dim(B)$, car les sous-espaces vectoriel A et B ont en commun la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{c}$ qui est de dimension 1.

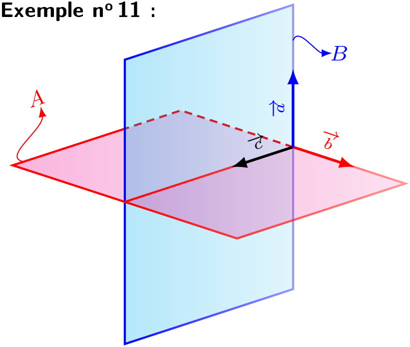
Exemple n° 11 :



- $B = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ et $\dim(B) = 2$
- $A = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ et $\dim(A) = 2$
- $A \cap B = \langle \vec{c} \rangle$ et $\dim(A \cap B) = 1$
- $A + B = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ et $\dim(A + B) = 3$

$\dim(A + B) \neq \dim(A) + \dim(B)$, car les sous-espaces vectoriel A et B ont en commun la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{c}$ qui est de dimension 1. Additionner les dimensions de A et de B revient à comptabiliser deux fois celle de cette droite, c'est la raison pour laquelle :

Exemple n° 11 :



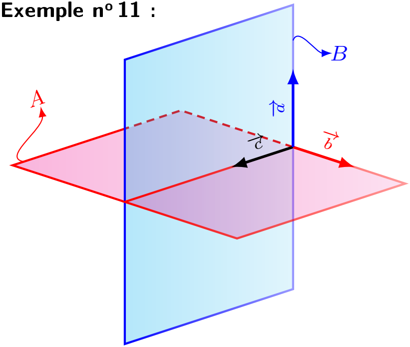
- $B = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ et $\dim(B) = 2$
- $A = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ et $\dim(A) = 2$
- $A \cap B = \langle \vec{c} \rangle$ et $\dim(A \cap B) = 1$
- $A + B = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ et $\dim(A + B) = 3$

$\dim(A + B) \neq \dim(A) + \dim(B)$, car les sous-espaces vectoriel A et B ont en commun la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{c}$ qui est de dimension 1. Additionner les dimensions de A et de B revient à comptabiliser deux fois celle de cette droite, c'est la raison pour laquelle :

Théorème

Etant donnée deux sous-espaces vectoriels A et B,
$\mathbf{dim}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) =$

Exemple n° 11 :



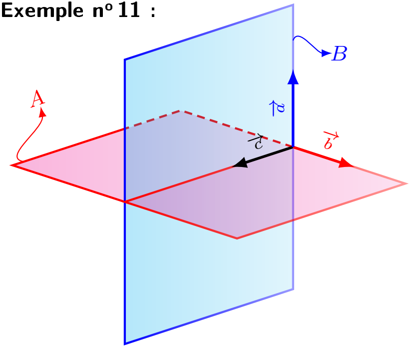
- $B = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ et $\dim(B) = 2$
- $A = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ et $\dim(A) = 2$
- $A \cap B = \langle \vec{c} \rangle$ et $\dim(A \cap B) = 1$
- $A + B = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ et $\dim(A + B) = 3$

$\dim(A+B) \neq \dim(A) + \dim(B)$, car les sous-espaces vectoriel A et B ont en commun la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{c}$ qui est de dimension 1. Additionner les dimensions de A et de B revient à comptabiliser deux fois celle de cette droite, c'est la raison pour laquelle :

Théorème

Etant donnée deux sous-espaces vectoriels A et B,
$\mathbf{\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)}$.

Exemple n° 11 :



- $B = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ et $\dim(B) = 2$
- $A = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ et $\dim(A) = 2$
- $A \cap B = \langle \vec{c} \rangle$ et $\dim(A \cap B) = 1$
- $A + B = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ et $\dim(A + B) = 3$

$\dim(A+B) \neq \dim(A) + \dim(B)$, car les sous-espaces vectoriel A et B ont en commun la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{c}$ qui est de dimension 1. Additionner les dimensions de A et de B revient à comptabiliser deux fois celle de cette droite, c'est la raison pour laquelle :

Remarque

$A + B$ est le plus **petit** sous-espace vectoriel contenant la réunion $A \cup B$.

9. Somme directe de sous-espaces vectoriels.

9. Somme directe de sous-espaces vectoriels.

Il s'agit d'un cas particulier de sommes d'espaces vectoriels de E lorsque ceux-ci vérifient une propriété supplémentaire.

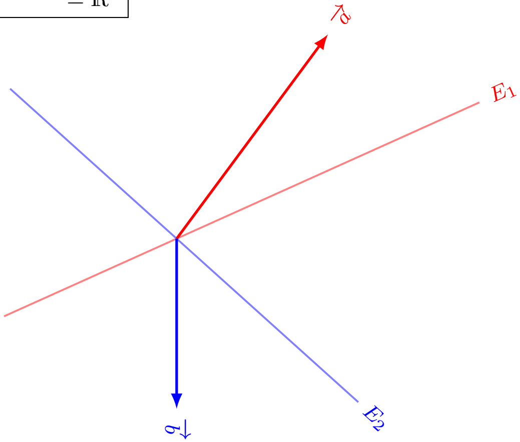
9. Somme directe de sous-espaces vectoriels.

Il s'agit d'un cas particulier de sommes d'espaces vectoriels de E lorsque ceux-ci vérifient une propriété supplémentaire.

Définition:

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, et $F = E_1 + E_2$. On dit que la somme $E_1 + E_2$ est **directe**, notée $\boldsymbol{E_1 \oplus E_2}$, si tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de $E_1 + E_2$ se décompose de façon unique sous la forme $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}$ où $\overrightarrow{x_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{x_2} \in E_2$.

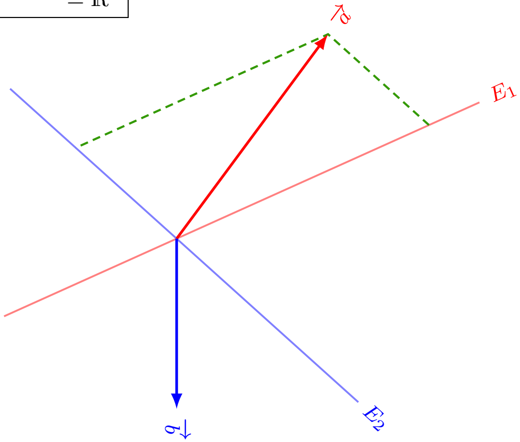
Exemple n° 12 : $\boxed{\qquad\qquad = \mathbb{R}^2}$



***E_1* et *E_2* sont en** car la décomposition d'un vecteur $\overrightarrow{a}$ ou d'un vecteur $\overrightarrow{b}$ dans E_1 et E_2 est unique :

$$\overrightarrow{a} =$$

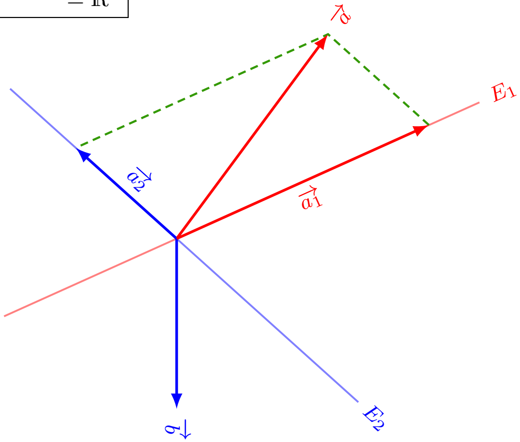
Exemple n° 12 : $\boxed{\qquad\qquad = \mathbb{R}^2}$



***E_1* et *E_2* sont en** car la décomposition d'un vecteur $\vec{a}$ ou d'un vecteur $\vec{b}$ dans E_1 et E_2 est unique :

$$\vec{a} =$$

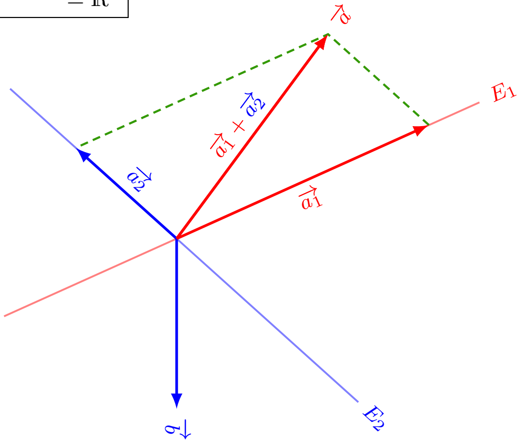
Exemple n° 12 : $\boxed{\qquad\qquad = \mathbb{R}^2}$



***E_1* et *E_2* sont en** car la décomposition d'un vecteur $\vec{a}$ ou d'un vecteur $\vec{b}$ dans E_1 et E_2 est unique :

$$\vec{a} = \qquad\qquad \text{et } \vec{b} =$$

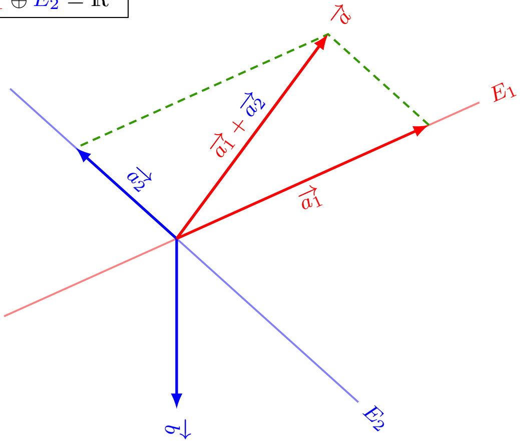
Exemple no 12 : $\boxed{\qquad\qquad = \mathbb{R}^2}$



***E_1* et *E_2* sont en** car la décomposition d'un vecteur $\vec{a}$ ou d'un vecteur $\vec{b}$ dans E_1 et E_2 est unique :

$$\vec{a} = \qquad\qquad \text{et } \vec{b} = \qquad + $$

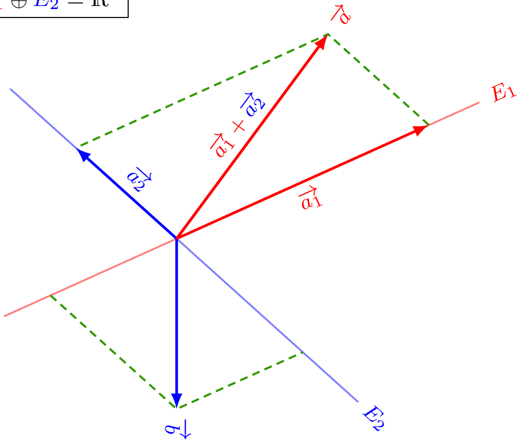
Exemple n° 12 : $\boxed{E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2}$



E_1 et E_2 sont en somme directe car la décomposition d'un vecteur $\vec{a}$ ou d'un vecteur $\vec{b}$ dans E_1 et E_2 est unique :

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{a_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\vec{a_2}}_{\in E_2} \text{ et } \vec{b} = \quad +$$

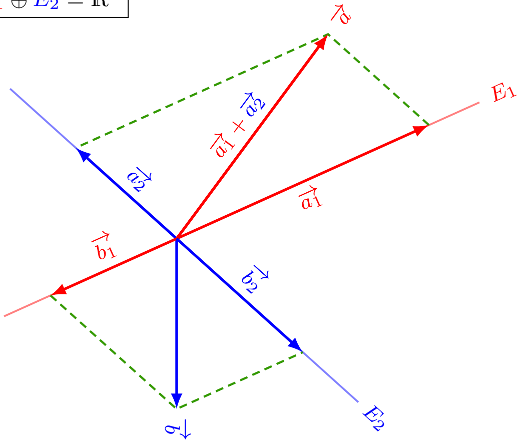
Exemple n° 12 : $\boxed{E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2}$



***E_1* et *E_2* sont en somme directe** car la décomposition d'un vecteur $\vec{a}$ ou d'un vecteur $\vec{b}$ dans E_1 et E_2 est unique :

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{a_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\vec{a_2}}_{\in E_2} \text{ et } \vec{b} = \qquad +$$

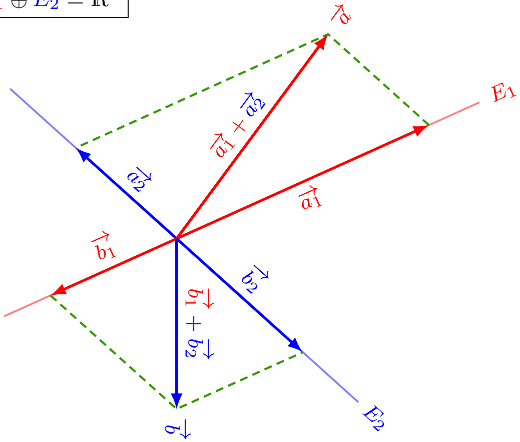
Exemple n° 12 : $\boxed{E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2}$



$\boldsymbol{E_1}$ **et** $\boldsymbol{E_2}$ **sont en somme directe** car la décomposition d'un vecteur $\vec{a}$ ou d'un vecteur $\vec{b}$ dans E_1 et E_2 est unique :

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{a_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\vec{a_2}}_{\in E_2} \text{ et } \vec{b} = \qquad +$$

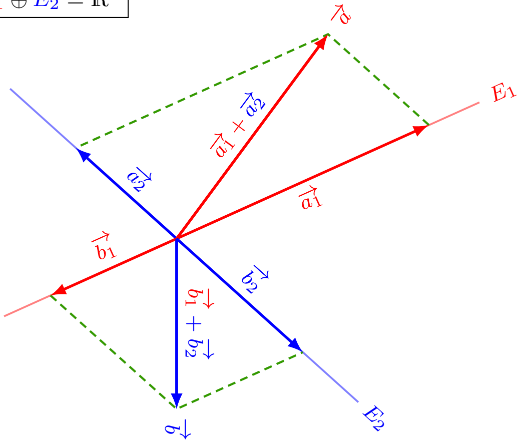
Exemple n° 12 : $\boxed{E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2}$



***E₁* et *E₂* sont en somme directe** car la décomposition d'un vecteur $\vec{a}$ ou d'un vecteur $\vec{b}$ dans E_1 et E_2 est unique :

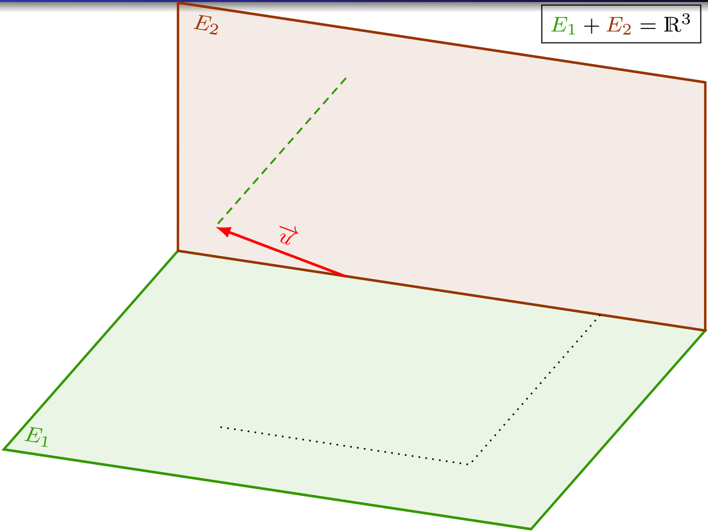
$$\vec{a} = \underbrace{\vec{a_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\vec{a_2}}_{\in E_2} \text{ et } \vec{b} = \quad +$$

Exemple n° 12 : $\boxed{E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2}$

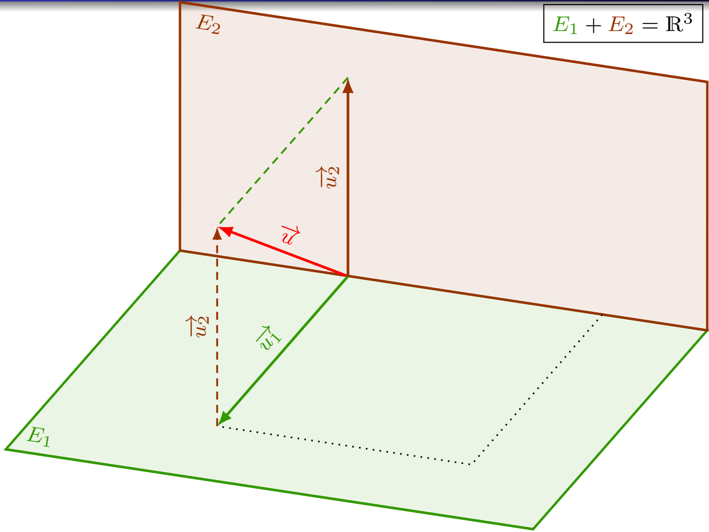


***E_1* et *E_2* sont en somme directe** car la décomposition d'un vecteur $\vec{a}$ ou d'un vecteur $\vec{b}$ dans E_1 et E_2 est unique :

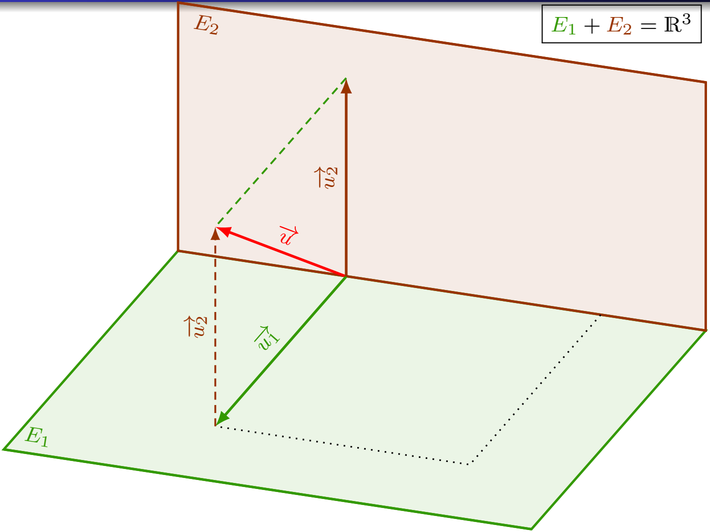
$$\vec{a} = \underbrace{\vec{a_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\vec{a_2}}_{\in E_2} \text{ et } \vec{b} = \underbrace{\vec{b_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\vec{b_2}}_{\in E_2}$$



E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe car la décomposition du vecteur $\vec{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique : $\vec{u} = \quad + \quad =$

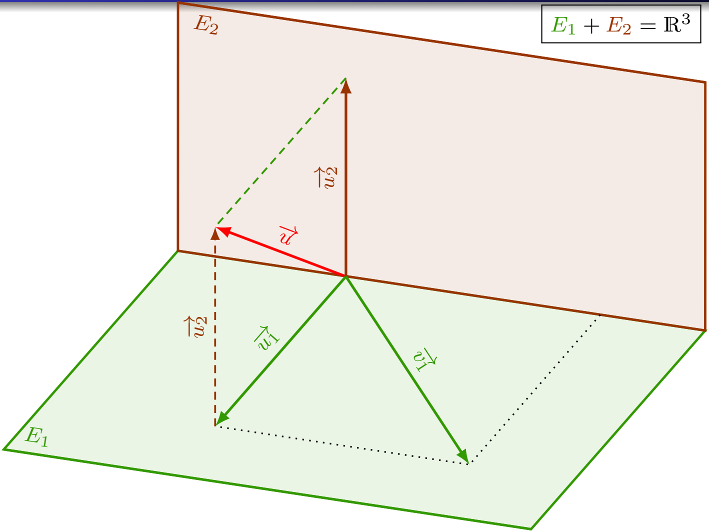


E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe car la décomposition du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique : $\overrightarrow{u} = \quad + \quad = \quad +$



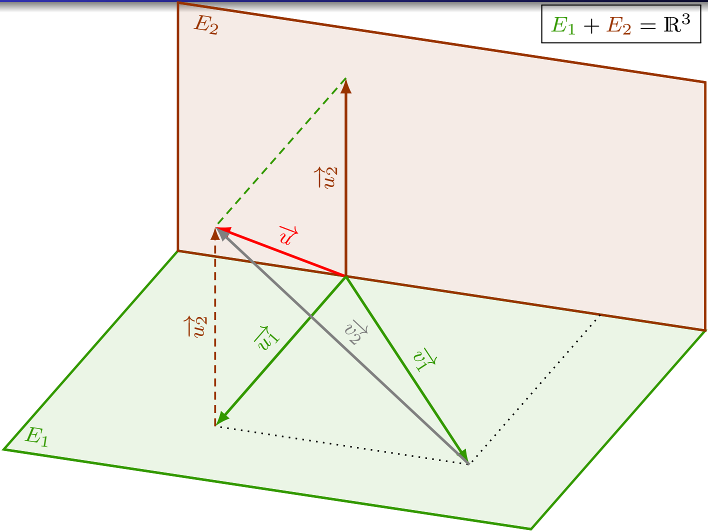
E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe car la décomposition du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique :

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in E_2} = \qquad +$$



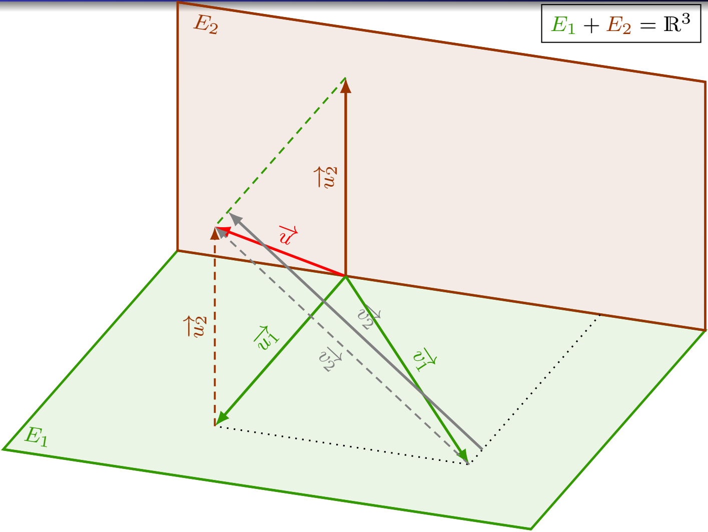
***E_1* et *E_2* ne sont pas en somme directe** car la décomposition du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique :

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in E_2} = \quad + $$



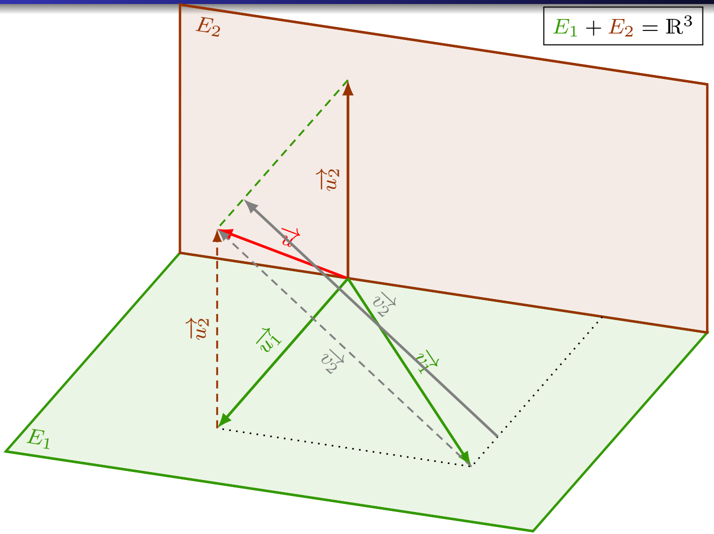
E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe car la décomposition du vecteur $\vec{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique :

$$\vec{u} = \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in E_2} = \quad + $$



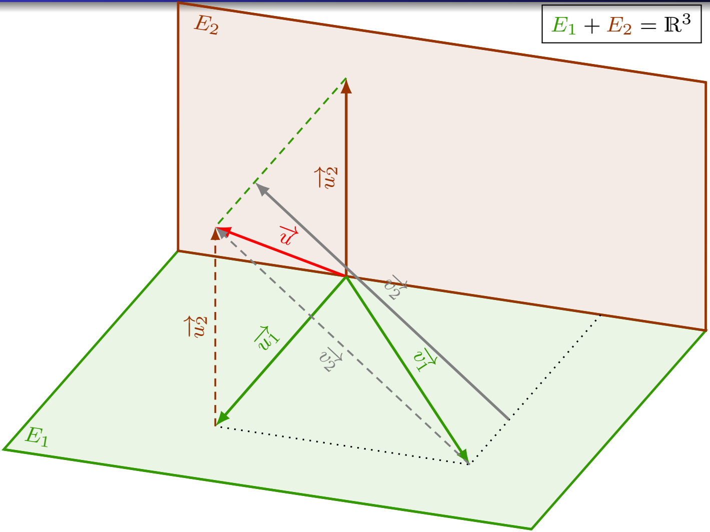
E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe car la décomposition du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique :

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in E_2} = \quad +$$



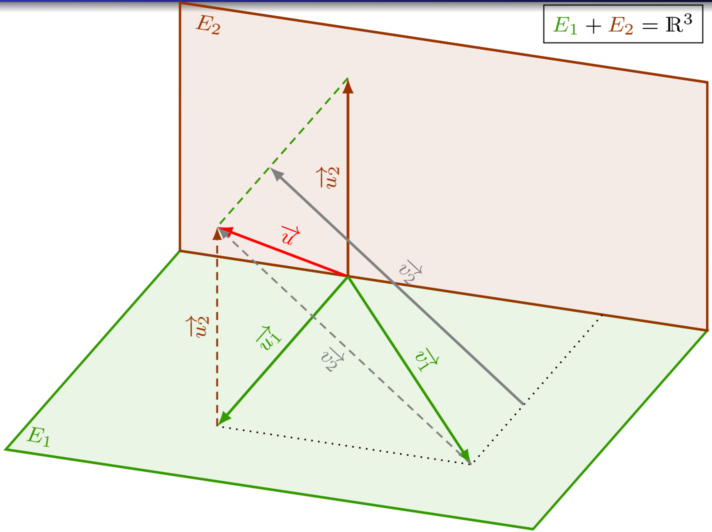
E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe car la décomposition du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique :

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in E_2} = \quad + $$



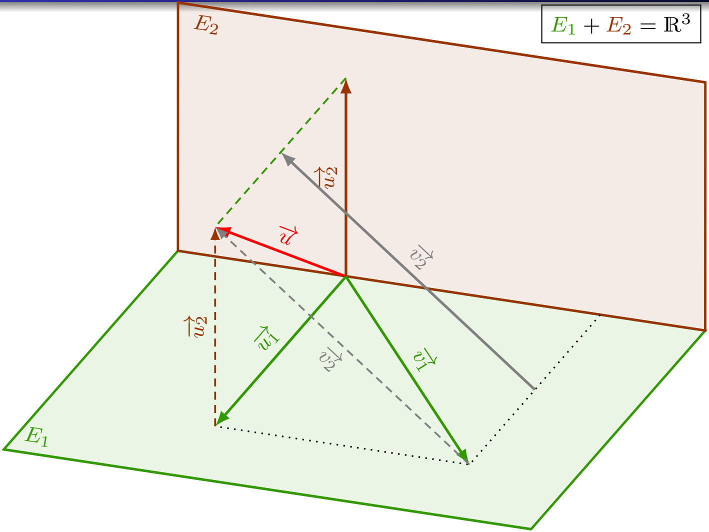
E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe car la décomposition du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique :

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in E_2} = \quad +$$



E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe car la décomposition du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique :

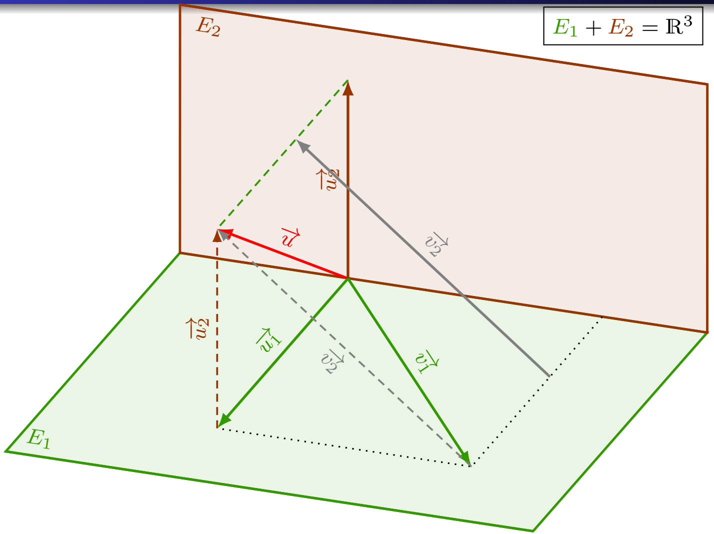
$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in E_2} = \quad +$$



E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe car la décomposition du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique :

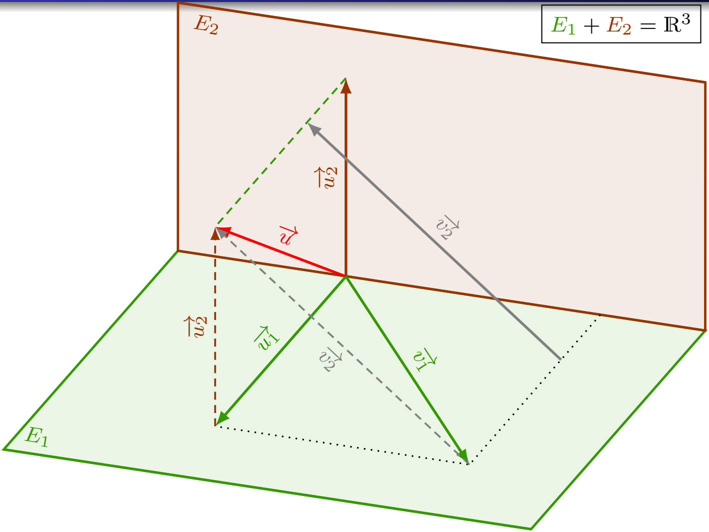
$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in E_2} = \quad +$$

$\boxed{E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3}$



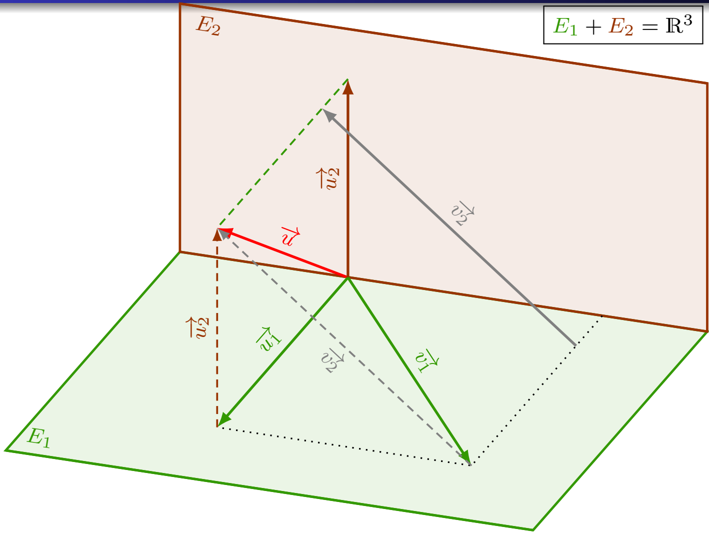
E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe car la décomposition du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique :

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in E_2} = \quad +$$



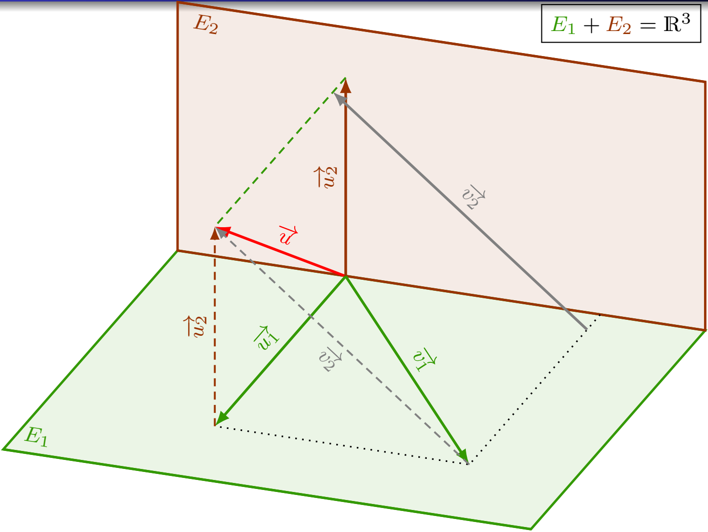
***E_1* et *E_2* ne sont pas en somme directe** car la décomposition du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique :

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in E_2} = \quad + $$



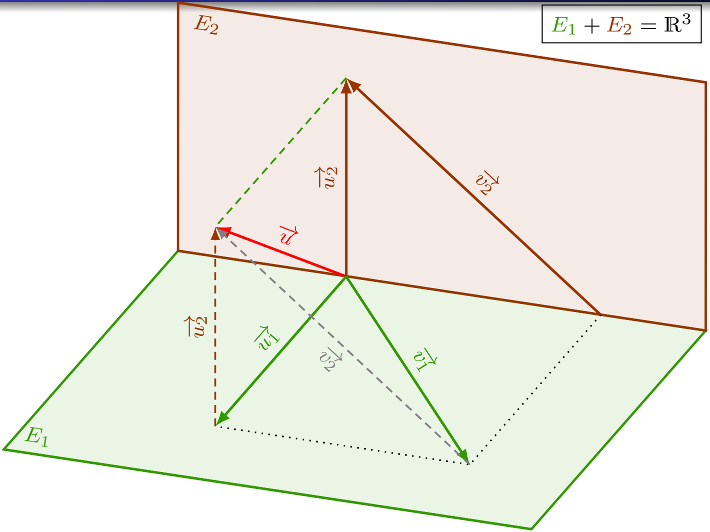
E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe car la décomposition du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique :

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in E_2} = \qquad +$$



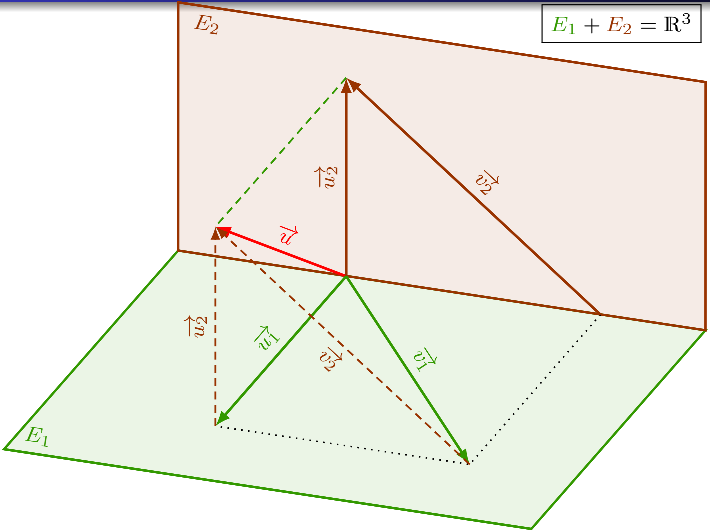
E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe car la décomposition du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique :

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in E_2} = \quad + $$



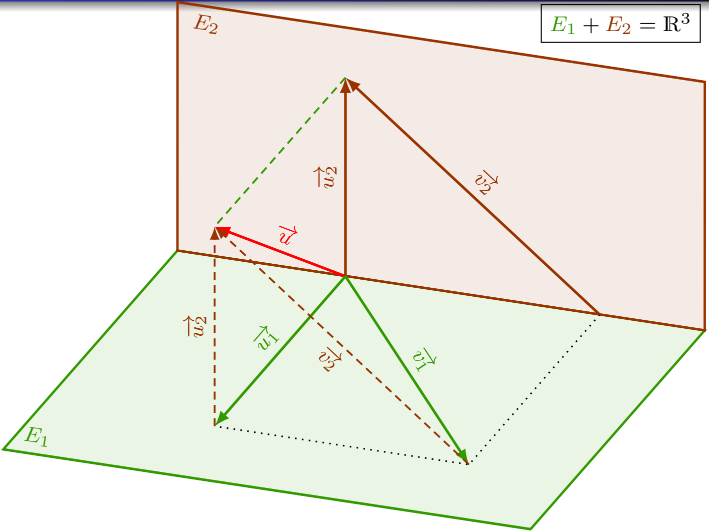
E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe car la décomposition du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique :

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in E_2} = \quad + $$



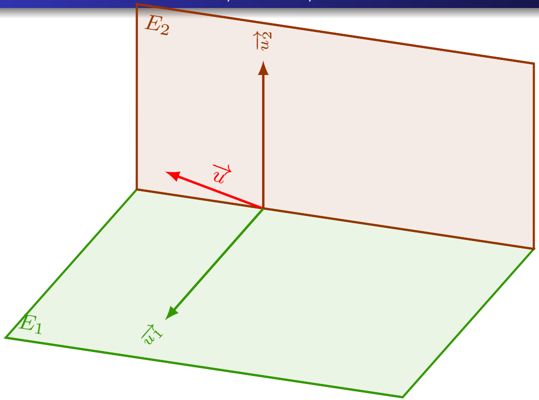
E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe car la décomposition du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique :

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in E_2} = \quad + $$

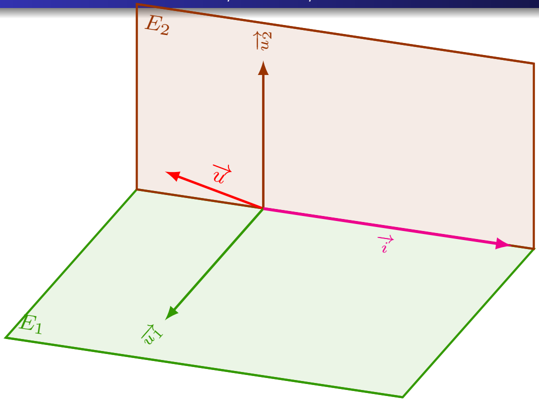


E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe car la décomposition du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans E_1 et E_2 n'est pas unique :

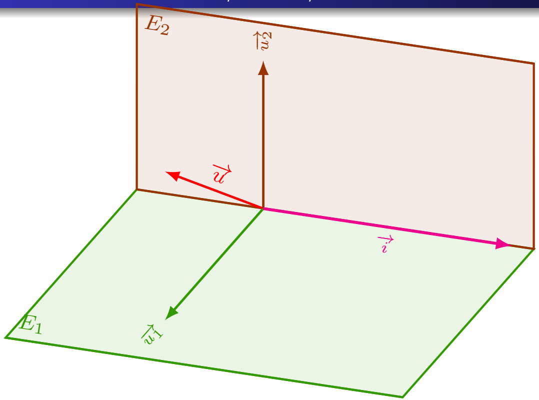
$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in E_2} = \underbrace{\overrightarrow{v_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{v_2}}_{\in E_2}$$



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$,

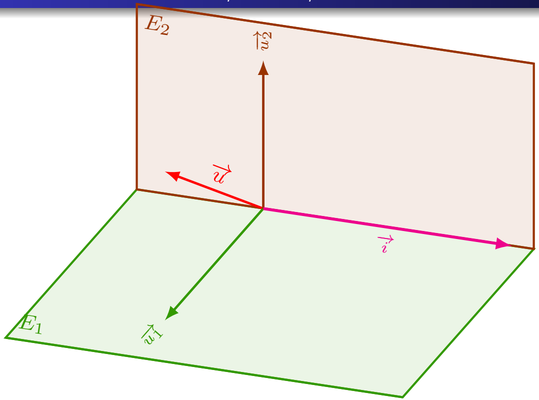


Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$,



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

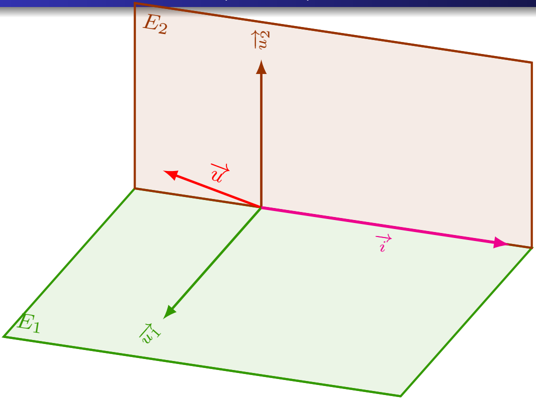
$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

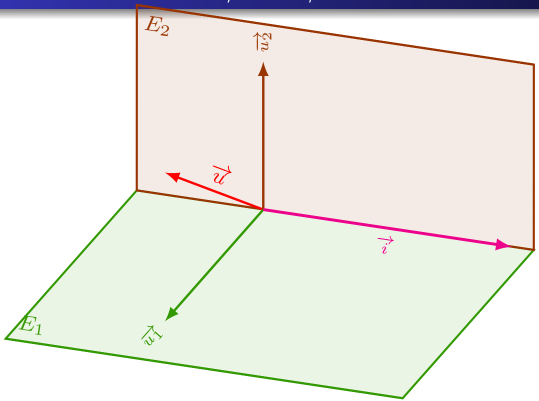
On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

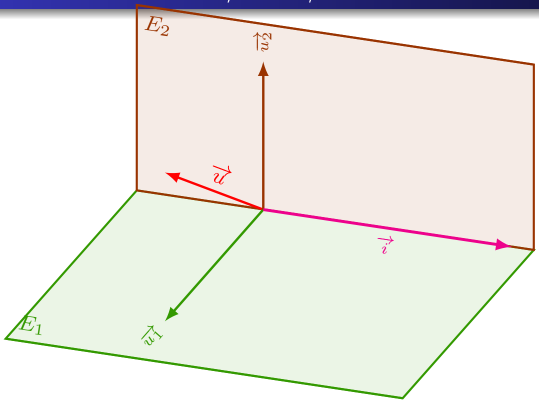


Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car

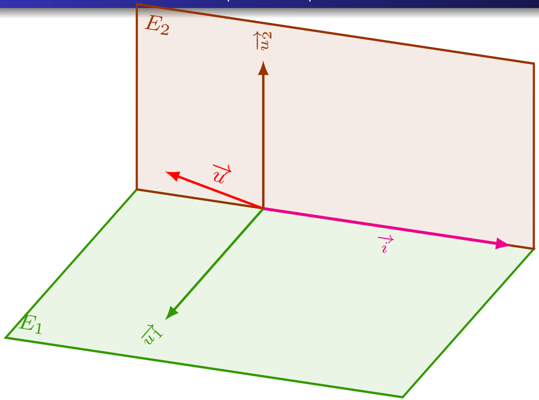


Choisissons un vecteur $\vec{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{\boldsymbol{u_1}} + \vec{i} \\ \vec{b} = \vec{\boldsymbol{u_2}} - \vec{i} \end{cases}$$

On a : $\vec{a} \in E_1$ car $\vec{u_1} \in E_1$ et $\vec{i} \in E_1$

$\vec{b} \in E_2$ car $\vec{u_2} \in E_2$ et $\vec{i} \in E_2$



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

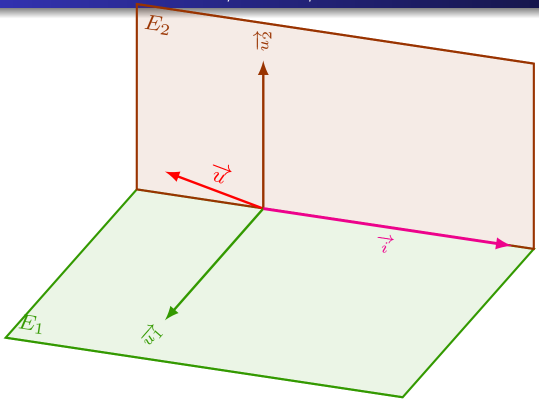
$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i}$$

$$=$$



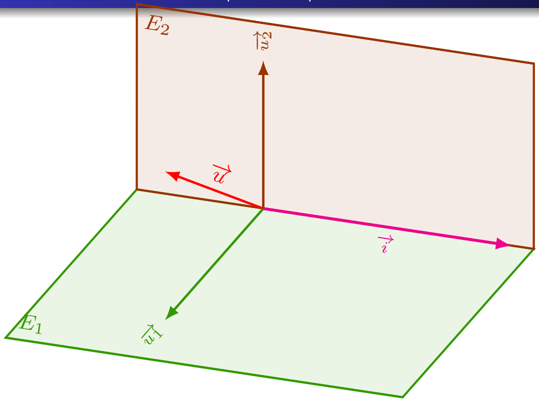
Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i} \\ &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u} \end{aligned}$$



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

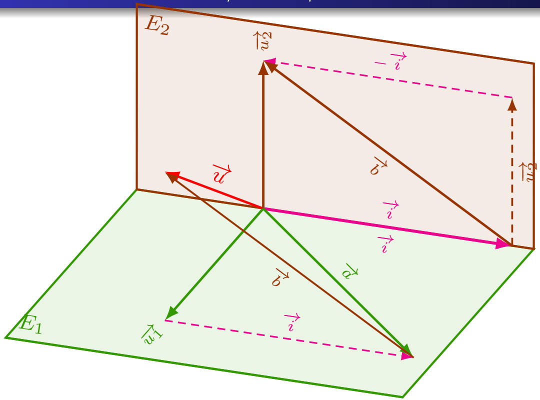
On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i} \\ &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{a}}}_{\in \boldsymbol{E_1}} + \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}}_{\in \boldsymbol{E_2}}$$



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

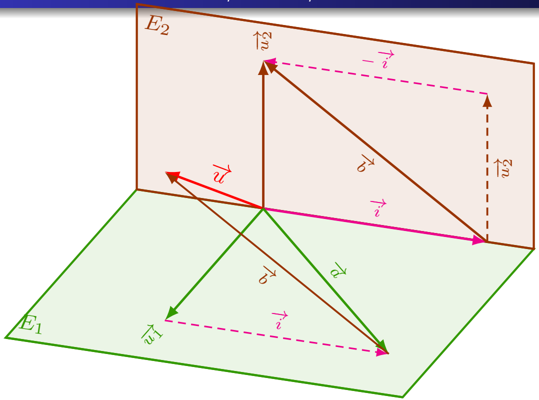
$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i} \\ &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{a}}}_{\in \boldsymbol{E_1}} + \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}}_{\in \boldsymbol{E_2}}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\overrightarrow{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\vec{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{u_1} + \vec{i} \\ \vec{b} = \vec{u_2} - \vec{i} \end{cases}$$

On a : $\vec{a} \in E_1$ car $\vec{u_1} \in E_1$ et $\vec{i} \in E_1$

$\vec{b} \in E_2$ car $\vec{u_2} \in E_2$ et $\vec{i} \in E_2$

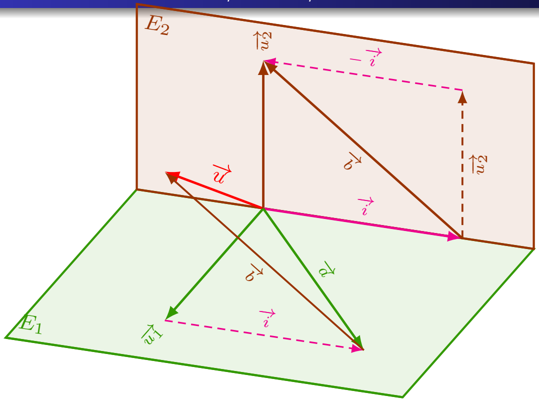
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{u_1} + \vec{i} + \vec{u_2} - \vec{i}$$
$$= \vec{u_1} + \vec{u_2} = \vec{u}$$

Donc, le vecteur $\vec{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\vec{u} = \underbrace{\vec{a}}_{\in E_1} + \underbrace{\vec{b}}_{\in E_2}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\vec{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\vec{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\vec{i}$ **quelconque** dans l'intersection $E_1 \cap E_2$, et posons

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{u_1} + \vec{i} \\ \vec{b} = \vec{u_2} - \vec{i} \end{cases}$$

On a : $\vec{a} \in E_1$ car $\vec{u_1} \in E_1$ et $\vec{i} \in E_1$

$\vec{b} \in E_2$ car $\vec{u_2} \in E_2$ et $\vec{i} \in E_2$

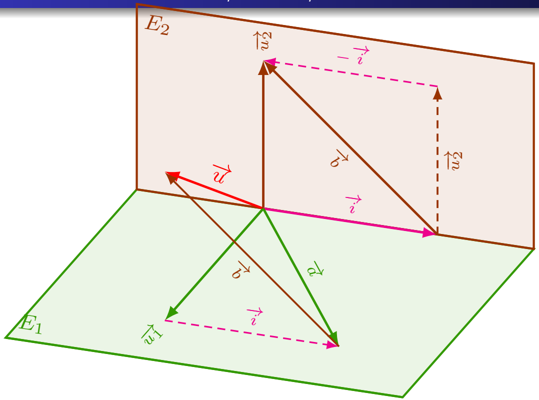
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{u_1} + \vec{i} + \vec{u_2} - \vec{i}$$
$$= \vec{u_1} + \vec{u_2} = \vec{u}$$

Donc, le vecteur $\vec{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\vec{u} = \underbrace{\vec{a}}_{\in E_1} + \underbrace{\vec{b}}_{\in E_2}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\vec{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\vec{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

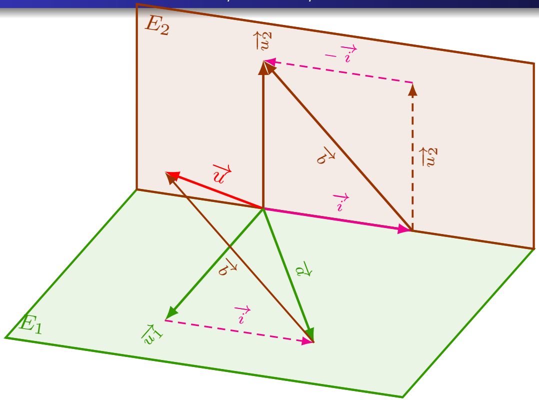
$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i}$$
$$= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u}$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{a}}}_{\in \boldsymbol{E_1}} + \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}}_{\in \boldsymbol{E_2}}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\overrightarrow{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

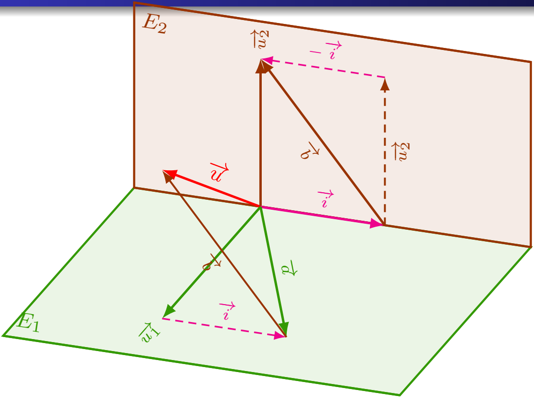
$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i}$$
$$= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u}$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{a}}}_{\in \boldsymbol{E_1}} + \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}}_{\in \boldsymbol{E_2}}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\overrightarrow{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\vec{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{u_1} + \vec{i} \\ \vec{b} = \vec{u_2} - \vec{i} \end{cases}$$

On a : $\vec{a} \in E_1$ car $\vec{u_1} \in E_1$ et $\vec{i} \in E_1$

$\vec{b} \in E_2$ car $\vec{u_2} \in E_2$ et $\vec{i} \in E_2$

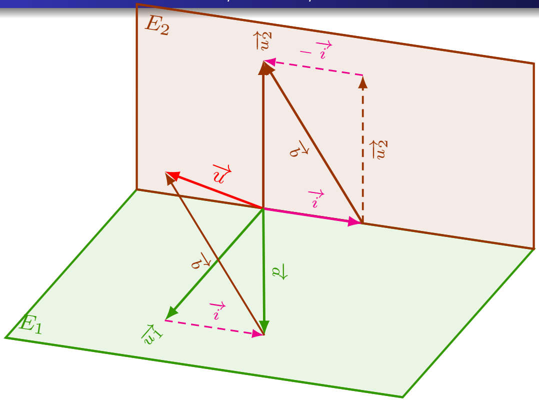
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{u_1} + \vec{i} + \vec{u_2} - \vec{i}$$
$$= \vec{u_1} + \vec{u_2} = \vec{u}$$

Donc, le vecteur $\vec{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\vec{u} = \underbrace{\vec{a}}_{\in E_1} + \underbrace{\vec{b}}_{\in E_2}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\vec{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\vec{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \boldsymbol{\overrightarrow{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \boldsymbol{\overrightarrow{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

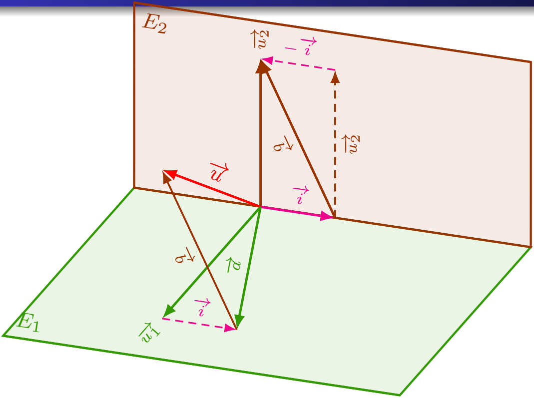
$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i} \\ &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\boldsymbol{\overrightarrow{u}} = \underbrace{\boldsymbol{\overrightarrow{a}}}_{\in \boldsymbol{E_1}} + \underbrace{\boldsymbol{\overrightarrow{b}}}_{\in \boldsymbol{E_2}}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\overrightarrow{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\vec{i}$ **quelconque** dans l'intersection $E_1 \cap E_2$, et posons

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{u_1} + \vec{i} \\ \vec{b} = \vec{u_2} - \vec{i} \end{cases}$$

On a : $\vec{a} \in E_1$ car $\vec{u_1} \in E_1$ et $\vec{i} \in E_1$

$\vec{b} \in E_2$ car $\vec{u_2} \in E_2$ et $\vec{i} \in E_2$

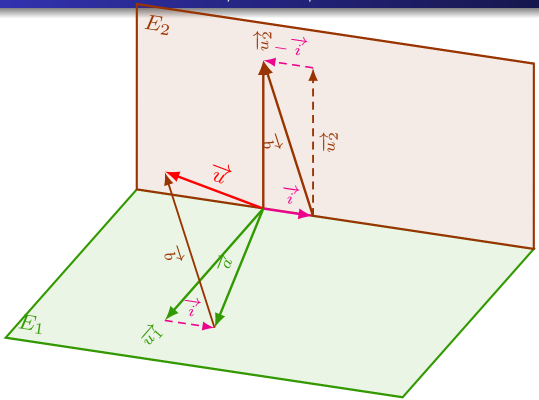
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{u_1} + \vec{i} + \vec{u_2} - \vec{i}$$
$$= \vec{u_1} + \vec{u_2} = \vec{u}$$

Donc, le vecteur $\vec{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\vec{u} = \underbrace{\vec{a}}_{\in E_1} + \underbrace{\vec{b}}_{\in E_2}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\vec{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\vec{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

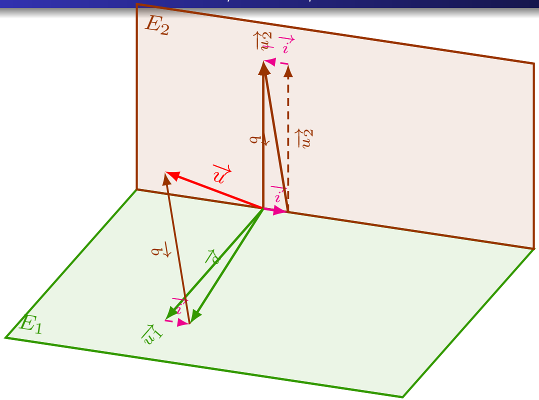
$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i}$$
$$= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u}$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{a}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{b}}_{\in E_2}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\overrightarrow{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

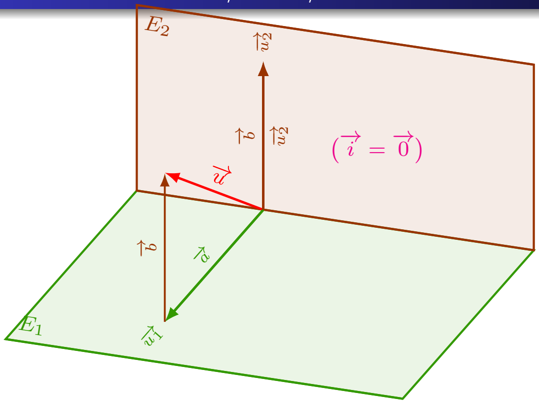
$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i}$$
$$= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u}$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{a}}}_{\in \boldsymbol{E_1}} + \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}}_{\in \boldsymbol{E_2}}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\overrightarrow{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

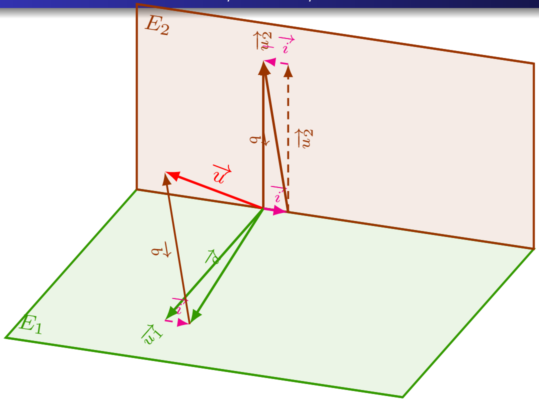
$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i} \\ &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{a}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{b}}_{\in E_2}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\overrightarrow{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

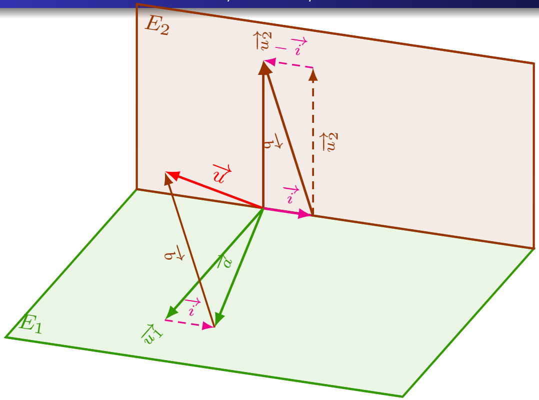
$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i} \\ &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{a}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{b}}_{\in E_2}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\overrightarrow{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\vec{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{u_1} + \vec{i} \\ \vec{b} = \vec{u_2} - \vec{i} \end{cases}$$

On a : $\vec{a} \in E_1$ car $\vec{u_1} \in E_1$ et $\vec{i} \in E_1$

$\vec{b} \in E_2$ car $\vec{u_2} \in E_2$ et $\vec{i} \in E_2$

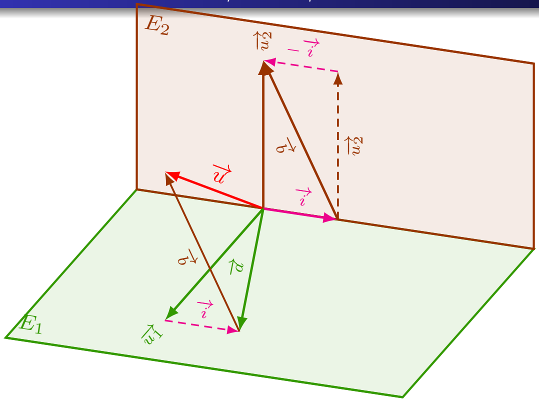
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{u_1} + \vec{i} + \vec{u_2} - \vec{i}$$
$$= \vec{u_1} + \vec{u_2} = \vec{u}$$

Donc, le vecteur $\vec{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\vec{u} = \underbrace{\vec{a}}_{\in E_1} + \underbrace{\vec{b}}_{\in E_2}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\vec{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\vec{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

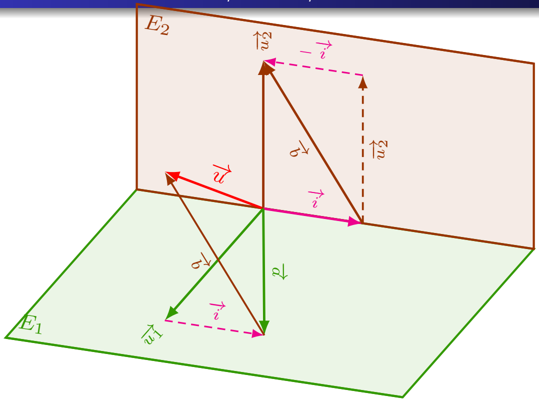
$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i} \\ &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{a}}}_{\in \boldsymbol{E_1}} + \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}}_{\in \boldsymbol{E_2}}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\overrightarrow{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

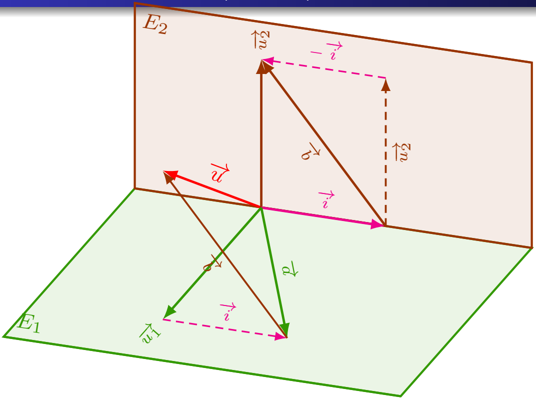
$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i}$$
$$= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u}$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{a}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{b}}_{\in E_2}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\overrightarrow{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i}$$

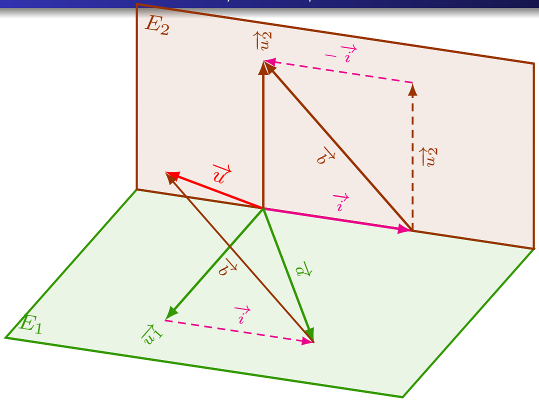
$$= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u}$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{a}}}_{\in \boldsymbol{E_1}} + \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}}_{\in \boldsymbol{E_2}}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\overrightarrow{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

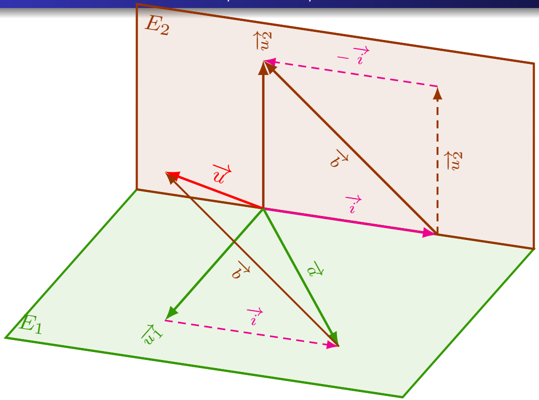
$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i}$$
$$= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u}$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{a}}}_{\in \boldsymbol{E_1}} + \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}}_{\in \boldsymbol{E_2}}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\overrightarrow{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

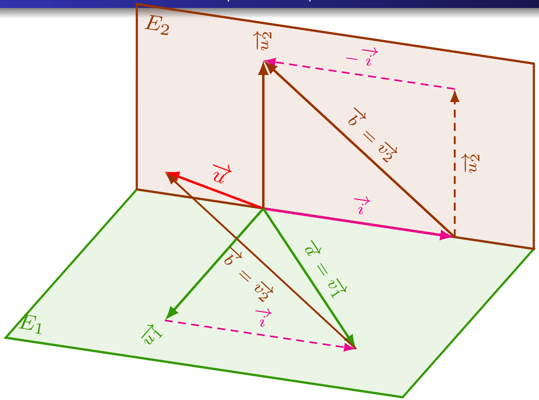
$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i} \\ &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{a}}}_{\in \boldsymbol{E_1}} + \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}}_{\in \boldsymbol{E_2}}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\overrightarrow{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2



Choisissons un vecteur $\overrightarrow{i}$ **quelconque** dans l'intersection $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2}$, et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} + \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} - \overrightarrow{i} \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{a} \in E_1$ car $\overrightarrow{u_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{i} \in E_1$

$\overrightarrow{b} \in E_2$ car $\overrightarrow{u_2} \in E_2$ et $\overrightarrow{i} \in E_2$

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{i}$$

$$= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u}$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans E_1 et E_2 en

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{a}}}_{\in \boldsymbol{E_1}} + \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}}_{\in \boldsymbol{E_2}}$$

Cela étant vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{i} \in E_1 \cap E_2$,

le vecteur $\overrightarrow{u}$ a une infinité de décomposition dans E_1 et E_2

Il s'en suit :

Il s'en suit :

Propriété:

La somme de deux sous-espaces vectoriels est directe si et seulement si leur **intersection** est nulle :

$$A \oplus B \iff A \cap B = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}.$$