ൿ Fiche ൿ

Diagonalisation des endomorphismes.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Définition:

L'endomorphisme d'espace vectoriel E qui au vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ associe le vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ est appelé **l'identité** et est noté $\mathrm{id}_{\boldsymbol{E}}$.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Définition:

L'endomorphisme d'espace vectoriel E qui au vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ associe le vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ est appelé **l'identité** et est noté id_{E}.

Propriété:

Si $E = \mathbb{R}^n$, alors quelque soit la base β de E, la matrice de id_E dans la base β est la **matrice unité I_n**.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Définition:

L'endomorphisme d'espace vectoriel E qui au vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ associe le vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ est appelé **l'identité** et est noté id_E.

Propriété:

Si $E = \mathbb{R}^n$, alors quelque soit la base β de E, la matrice de id_E dans la base β est la **matrice unité I_n**.

Définition:

Soit $f \in L(E)$ un endomorphisme. Un nombre λ est une **valeur propre** de f s'il existe un vecteur $\overrightarrow{v}$ **non nul** tel que :

$$f(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}$$

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Propriété:

Etant donnée une valeur propre λ associée à une application linéaire $f \in L(E,F)$, l'ensemble des vecteurs propres associés à cette valeur propre est un **sous-espace vectoriel** appelé **sous-espace propre** associé à λ et noté $\boldsymbol{E_\lambda}$.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Propriété:

Etant donnée une valeur propre λ associée à une application linéaire $f \in L(E, F)$, l'ensemble des vecteurs propres associés à cette valeur propre est un **sous-espace vectoriel** appelé **sous-espace propre** associé à λ et noté $\boldsymbol{E_\lambda}$.

Démonstration

Les vecteurs propres associés à λ sont les solutions du système :

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Propriété:

Etant donnée une valeur propre λ associée à une application linéaire $f \in L(E, F)$, l'ensemble des vecteurs propres associés à cette valeur propre est un **sous-espace vectoriel** appelé **sous-espace propre** associé à λ et noté $\boldsymbol{E_{\lambda}}$.

Démonstration

Les vecteurs propres associés à λ sont les solutions du système :

$$f(\overrightarrow{v}) \quad = \lambda\overrightarrow{v}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Propriété:

Etant donnée une valeur propre λ associée à une application linéaire $f \in L(E, F)$, l'ensemble des vecteurs propres associés à cette valeur propre est un **sous-espace vectoriel** appelé **sous-espace propre** associé à λ et noté $\boldsymbol{E_{\lambda}}$.

Démonstration

Les vecteurs propres associés à λ sont les solutions du système :

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{v}) &= \lambda \overrightarrow{v} \\ f(\overrightarrow{v}) - \lambda \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Propriété:

Etant donnée une valeur propre λ associée à une application linéaire $f \in L(E, F)$, l'ensemble des vecteurs propres associés à cette valeur propre est un **sous-espace vectoriel** appelé **sous-espace propre** associé à λ et noté $\boldsymbol{E_\lambda}$.

Démonstration

Les vecteurs propres associés à λ sont les solutions du système :

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{v}) &= \lambda\overrightarrow{v} \\ f(\overrightarrow{v}) - \lambda\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{0} \\ (f - \lambda\text{id})(\overrightarrow{v}) &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Propriété:

Etant donnée une valeur propre λ associée à une application linéaire $f \in L(E,F)$, l'ensemble des vecteurs propres associés à cette valeur propre est un **sous-espace vectoriel** appelé **sous-espace propre** associé à λ et noté $\boldsymbol{E_\lambda}$.

Démonstration

Les vecteurs propres associés à λ sont les solutions du système :

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{v}) &= \lambda \overrightarrow{v} \\ f(\overrightarrow{v}) - \lambda \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{0} \\ (f - \lambda \mathrm{id})(\overrightarrow{v}) &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des vecteurs propres associés à λ est le noyau de l'application linéaire $f - \lambda\mathrm{id}$.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Propriété:

Etant donnée une valeur propre λ associée à une application linéaire $f \in L(E, F)$, l'ensemble des vecteurs propres associés à cette valeur propre est un **sous-espace vectoriel** appelé **sous-espace propre** associé à λ et noté $\boldsymbol{E_{\lambda}}$.

Démonstration

Les vecteurs propres associés à λ sont les solutions du système :

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{v}) &= \lambda\overrightarrow{v} \\ f(\overrightarrow{v}) - \lambda\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{0} \\ (f - \lambda\mathrm{id})(\overrightarrow{v}) &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des vecteurs propres associés à λ est le noyau de l'application linéaire $f - \lambda\mathrm{id}$. Le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \boldsymbol{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

Exemple n° 1 : Considérons l'endomorphisme f :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} \end{array}.$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

Exemple n° 1 : Considérons l'endomorphisme $f :$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

Exemple n° 1 : Considérons l'endomorphisme f :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+2y \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

Exemple n° 1 : Considérons l'endomorphisme $f :$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+2y \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & \end{pmatrix}$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

Exemple n° 1 : Considérons l'endomorphisme f : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} \end{array}$.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{pmatrix}$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

Exemple n° 1 : Considérons l'endomorphisme f :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \boldsymbol{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

   Notons λ une valeur propre de f et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \boldsymbol{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Notons λ une valeur propre de f et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\vec{u}) = \lambda\vec{u} \text{ s'écrit } \underbrace{\left\{\begin{array}{l} \\ \end{array}\right.}_{A\vec{u}} \begin{array}{l} = \\ = \end{array} \underbrace{}_{\lambda\vec{u}} \text{ soit } \underbrace{\left\{\begin{array}{l} \\ \end{array}\right.}_{A\vec{u}-\lambda\vec{u}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \end{array}$$

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{l} \\ \end{array}\right.}_{(A-\lambda I)\vec{u}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \end{array}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \boldsymbol{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Notons λ une valeur propre de f et $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\vec{u}) = \lambda\vec{u} \text{ s'écrit } \underbrace{\begin{cases} x + 2y \\ \end{cases}}_{A\vec{u}} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \underbrace{}_{\lambda\vec{u}} \text{ soit } \underbrace{\begin{cases} \\ \end{cases}}_{A\vec{u}-\lambda\vec{u}} \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\begin{cases} \\ \end{cases}}_{(A-\lambda I)\vec{u}} \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \boldsymbol{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Notons λ une valeur propre de f et $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \text{ s'écrit } \underbrace{\begin{cases} x + 2y \\ 3x + 2y \end{cases}}_{A\vec{u}} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \underbrace{\qquad\quad}_{\lambda\vec{u}} \text{ soit } \underbrace{\begin{cases} \qquad\qquad\qquad \\ \qquad\qquad\qquad \end{cases}}_{A\vec{u} - \lambda\vec{u}} \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\begin{cases} \qquad\qquad\qquad \\ \qquad\qquad\qquad \end{cases}}_{(A - \lambda I)\vec{u}} \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \boldsymbol{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

   Notons λ une valeur propre de f et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\vec{u}) = \lambda\vec{u} \text{ s'écrit } \underbrace{\left\{\begin{array}{l} x+2y \\ 3x+2y \end{array}\right.}_{A\vec{u}} \begin{array}{c} = \\ = \end{array} \underbrace{\begin{array}{c} \lambda x \\ \end{array}}_{\lambda\vec{u}} \text{ soit } \underbrace{\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \end{array}\right.}_{A\vec{u}-\lambda\vec{u}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \end{array}$$

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \end{array}\right.}_{(A-\lambda I)\vec{u}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \end{array}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

   Notons λ une valeur propre de f et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \text{ s'écrit } \underbrace{\begin{cases} x + 2y \\ 3x + 2y \end{cases}}_{A\vec{u}} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda x \\ \lambda y \end{matrix}}_{\lambda\vec{u}} \text{ soit } \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \end{matrix} \right.}_{A\vec{u} - \lambda\vec{u}} \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\left\{ \begin{matrix} \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \end{matrix} \right.}_{(A - \lambda I)\vec{u}} \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \boldsymbol{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Notons λ une valeur propre de f et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u} \text{ s'écrit } \underbrace{\begin{cases} x+2y \\ 3x+2y \end{cases}}_{A\overrightarrow{u}} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda x \\ \lambda y \end{matrix}}_{\lambda\overrightarrow{u}} \text{ soit } \underbrace{\begin{cases} x-\lambda x+2y \\ \end{cases}}_{A\overrightarrow{u}-\lambda\overrightarrow{u}} \begin{matrix} =0 \\ =0 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\begin{cases} \\ \end{cases}}_{(A-\lambda I)\overrightarrow{u}} \begin{matrix} =0 \\ =0 \end{matrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})=\mathbf{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

Notons λ une valeur propre de f et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u} \text{ s'écrit } \left\{\begin{array}{ccc} x+2y & = & \lambda x\\ 3x+2y & = & \lambda y\end{array}\right. \text{ soit } \left\{\begin{array}{l} x-\lambda x+2y\\ 3x+2y-\lambda y\end{array}\right. \begin{array}{l}=0\\ =0\end{array}$$

$$\underbrace{}_{A\overrightarrow{u}} \quad \underbrace{}_{\lambda\overrightarrow{u}} \quad \underbrace{}_{A\overrightarrow{u}-\lambda\overrightarrow{u}}$$

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{l} \\ \end{array}\right.}_{(A-\lambda I)\overrightarrow{u}} \begin{array}{l}=0\\ =0\end{array}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Notons λ une valeur propre de f et $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u} \text{ s'écrit } \underbrace{\left\{\begin{matrix} x + 2y \\ 3x + 2y \end{matrix}\right.}_{A\overrightarrow{u}} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda x \\ \lambda y \end{matrix}}_{\lambda\overrightarrow{u}} \text{ soit } \underbrace{\left\{\begin{matrix} x - \lambda x + 2y \\ 3x + 2y - \lambda y \end{matrix}\right.}_{A\overrightarrow{u} - \lambda\overrightarrow{u}} \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\left\{\begin{matrix} (1 - \lambda)x + 2y \\ \end{matrix}\right.}_{(A - \lambda I)\overrightarrow{u}} \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème

Soit f un endomorphisme. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \boldsymbol{0}$$

Elles ne dépendent pas du choix de la base.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Notons λ une valeur propre de f et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u} \text{ s'écrit } \underbrace{\left\{\begin{array}{l} x+2y \\ 3x+2y \end{array}\right.}_{A\overrightarrow{u}} \begin{array}{c} = \\ = \end{array} \underbrace{\begin{array}{c} \lambda x \\ \lambda y \end{array}}_{\lambda\overrightarrow{u}} \text{ soit } \underbrace{\left\{\begin{array}{l} x-\lambda x+2y \\ 3x+2y-\lambda y \end{array}\right.}_{A\overrightarrow{u}-\lambda\overrightarrow{u}} \begin{array}{l} =0 \\ =0 \end{array}$$

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{l} (1-\lambda)x+2y \\ 3x+(2-\lambda)y \end{array}\right.}_{(A-\lambda I)\overrightarrow{u}} \begin{array}{l} =0 \\ =0 \end{array}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

   Notons λ une valeur propre de f et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u} \text{ s'écrit } \underbrace{\left\{\begin{matrix} x+2y \\ 3x+2y \end{matrix}\right.}_{A\overrightarrow{u}} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda x \\ \lambda y \end{matrix}}_{\lambda\overrightarrow{u}} \text{ soit } \underbrace{\left\{\begin{matrix} x-\lambda x+2y \\ 3x+2y-\lambda y \end{matrix}\right.}_{A\overrightarrow{u}-\lambda\overrightarrow{u}} \begin{matrix} =0 \\ =0 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\left\{\begin{matrix} (1-\lambda)x+2y \\ 3x+(2-\lambda)y \end{matrix}\right.}_{(A-\lambda I)\overrightarrow{u}} \begin{matrix} =0 \\ =0 \end{matrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Notons λ une valeur propre de f et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u} \text{ s'écrit } \left\{\begin{array}{ccc} \underbrace{\begin{array}{c} x+2y \\ 3x+2y \end{array}}_{A\overrightarrow{u}} & \begin{array}{c} = \\ = \end{array} & \underbrace{\begin{array}{c} \lambda x \\ \lambda y \end{array}}_{\lambda\overrightarrow{u}} \end{array}\right. \text{ soit } \underbrace{\left\{\begin{array}{l} x-\lambda x+2y \\ 3x+2y-\lambda y \end{array}\right.}_{A\overrightarrow{u}-\lambda\overrightarrow{u}} \begin{array}{l} =0 \\ =0 \end{array}$$

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{l} (1-\lambda)x+2y \\ 3x+(2-\lambda)y \end{array}\right.}_{(A-\lambda I)\overrightarrow{u}} \begin{array}{l} =0 \\ =0 \end{array}$$

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Notons λ une valeur propre de f et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u} \text{ s'écrit } \underbrace{\begin{cases} x + 2y \\ 3x + 2y \end{cases}}_{A\overrightarrow{u}} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda x \\ \lambda y \end{matrix}}_{\lambda\overrightarrow{u}} \text{ soit } \underbrace{\begin{cases} x - \lambda x + 2y \\ 3x + 2y - \lambda y \end{cases}}_{A\overrightarrow{u} - \lambda\overrightarrow{u}} \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\begin{cases} (1-\lambda)x + 2y \\ 3x + (2-\lambda)y \end{cases}}_{(A-\lambda I)\overrightarrow{u}} \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre,

car un vecteur propre est

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Notons λ une valeur propre de f et $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u} \text{ s'écrit } \underbrace{\begin{cases} x + 2y \\ 3x + 2y \end{cases}}_{A\overrightarrow{u}} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda x \\ \lambda y \end{matrix}}_{\lambda \overrightarrow{u}} \text{ soit } \underbrace{\begin{cases} x - \lambda x + 2y \\ 3x + 2y - \lambda y \end{cases}}_{A\overrightarrow{u} - \lambda \overrightarrow{u}} \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y \\ 3x + (2 - \lambda)y \end{cases}}_{(A - \lambda I)\overrightarrow{u}} \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre, car un vecteur propre est **non nul**.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

   Notons λ une valeur propre de f et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\vec{u}) = \lambda\vec{u} \text{ s'écrit } \underbrace{\begin{cases} x+2y \\ 3x+2y \end{cases}}_{A\vec{u}} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda x \\ \lambda y \end{matrix}}_{\lambda\vec{u}} \text{ soit } \underbrace{\begin{cases} x-\lambda x+2y \\ 3x+2y-\lambda y \end{cases}}_{A\vec{u}-\lambda\vec{u}} \begin{matrix} =0 \\ =0 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\begin{cases} (1-\lambda)x+2y \\ 3x+(2-\lambda)y \end{cases}}_{(A-\lambda I)\vec{u}} \begin{matrix} =0 \\ =0 \end{matrix}$$

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre, car un vecteur propre est **non nul**. Si λ est une valeur propre, il a au moins une autre solution non nulle $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Notons λ une valeur propre de f et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u} \text{ s'écrit } \underbrace{\left\{\begin{array}{l} x + 2y \\ 3x + 2y \end{array}\right.}_{A\overrightarrow{u}} \begin{array}{c} = \\ = \end{array} \underbrace{\begin{array}{c} \lambda x \\ \lambda y \end{array}}_{\lambda\overrightarrow{u}} \text{ soit } \underbrace{\left\{\begin{array}{l} x - \lambda x + 2y \\ 3x + 2y - \lambda y \end{array}\right.}_{A\overrightarrow{u}-\lambda\overrightarrow{u}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \end{array}$$

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{l} (1-\lambda)x + 2y \\ 3x + (2-\lambda)y \end{array}\right.}_{(A-\lambda I)\overrightarrow{u}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \end{array}$$

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre, car un vecteur propre est **non nul**. Si λ est une valeur propre, il a au moins une autre solution non nulle $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce système a alors plusieurs solutions,

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Notons λ une valeur propre de f et $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u} \text{ s'écrit } \left\{ \begin{array}{ccc} \underbrace{\begin{array}{c} x+2y \\ 3x+2y \end{array}}_{A\overrightarrow{u}} & \begin{array}{c} = \\ = \end{array} & \underbrace{\begin{array}{c} \lambda x \\ \lambda y \end{array}}_{\lambda \overrightarrow{u}} \end{array} \right. \text{ soit } \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} x - \lambda x + 2y \\ 3x + 2y - \lambda y \end{array} \right.}_{A\overrightarrow{u} - \lambda \overrightarrow{u}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \end{array}$$

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} (1-\lambda)x + 2y \\ 3x + (2-\lambda)y \end{array} \right.}_{(A-\lambda I)\overrightarrow{u}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \end{array}$$

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre, car un vecteur propre est **non nul**. Si λ est une valeur propre, il a au moins une autre solution non nulle $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce système a alors plusieurs solutions, il n'est donc pas de

Cramer,

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

1. **On commence par rechercher les valeurs propres de la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Notons λ une valeur propre de f et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$f(\vec{u}) = \lambda\vec{u} \text{ s'écrit } \begin{cases} \underbrace{\begin{matrix} x+2y \\ 3x+2y \end{matrix}}_{A\vec{u}} & \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} \lambda x \\ \lambda y \end{matrix}}_{\lambda\vec{u}} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \underbrace{\begin{matrix} x-\lambda x+2y \\ 3x+2y-\lambda y \end{matrix}}_{A\vec{u}-\lambda\vec{u}} & \begin{matrix} =0 \\ =0 \end{matrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{matrix} (1-\lambda)x+2y \\ 3x+(2-\lambda)y \end{matrix}}_{(A-\lambda I)\vec{u}} & \begin{matrix} =0 \\ =0 \end{matrix} \end{cases}$$

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre, car un vecteur propre est **non nul**. Si λ est une valeur propre, il a au moins une autre solution non nulle $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce système a alors plusieurs solutions, il n'est donc pas de **Cramer**, son déterminant $\underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\det(A-\lambda I)}$ est donc **nul** :

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre, car un vecteur propre est **non nul**. Si λ est une valeur propre, il a au moins une autre solution non nulle $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce système a alors plusieurs solutions, il n'est pas de **Cramer**, son déterminant $\underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\det(A-\lambda I)}$ est donc **nul** :

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre, car un vecteur propre est **non nul**. Si λ est une valeur propre, il a au moins une autre solution non nulle $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce système a alors plusieurs solutions, il n'est pas de **Cramer**, son déterminant $\underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\mathbf{det}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})}$ est donc **nul** :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre, car un vecteur propre est **non nul**. Si λ est une valeur propre, il a au moins une autre solution non nulle $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce système a alors plusieurs solutions, il n'est pas de **Cramer**, son déterminant $\underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\det(A-\lambda I)}$ est donc **nul** :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \boldsymbol{(1-\lambda)(2-\lambda)-6} =$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre, car un vecteur propre est **non nul**. Si λ est une valeur propre, il a au moins une autre solution non nulle $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce système a alors plusieurs solutions, il n'est pas de **Cramer**, son déterminant $\underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\mathbf{det}(\boldsymbol{A-\lambda I})}$ est donc **nul** :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \boldsymbol{(1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 -}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre, car un vecteur propre est **non nul**. Si λ est une valeur propre, il a au moins une autre solution non nulle $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce système a alors plusieurs solutions, il n'est pas de **Cramer**, son déterminant $\underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\det(A-\lambda I)}$ est donc **nul** :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \boldsymbol{(1-\lambda)(2-\lambda)-6=\lambda^2-3\lambda}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre, car un vecteur propre est **non nul**. Si λ est une valeur propre, il a au moins une autre solution non nulle $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce système a alors plusieurs solutions, il n'est pas de **Cramer**, son déterminant $\underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\det(A-\lambda I)}$ est donc **nul** :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \boldsymbol{(1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0}.$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre, car un vecteur propre est **non nul**. Si λ est une valeur propre, il a au moins une autre solution non nulle $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce système a alors plusieurs solutions, il n'est pas de **Cramer**, son déterminant $\underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\mathbf{det}(A-\lambda I)}$ est donc **nul** :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \mathbf{(1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0}. \ \Delta =$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre, car un vecteur propre est **non nul**. Si λ est une valeur propre, il a au moins une autre solution non nulle $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce système a alors plusieurs solutions, il n'est pas de **Cramer**, son déterminant $\underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\mathbf{det}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})}$ est donc **nul** :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \mathbf{(1-\lambda)(2-\lambda)-6=\lambda^2-3\lambda-4=0}. \ \Delta = \mathbf{25}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre, car un vecteur propre est **non nul**. Si λ est une valeur propre, il a au moins une autre solution non nulle $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce système a alors plusieurs solutions, il n'est pas de **Cramer**, son déterminant $\underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\det(A-\lambda I)}$ est donc **nul** :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \boldsymbol{(1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0}. \quad \Delta = \boldsymbol{25}$$

$\lambda_1 =$ et $\lambda_2 =$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre, car un vecteur propre est **non nul**. Si λ est une valeur propre, il a au moins une autre solution non nulle $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce système a alors plusieurs solutions, il n'est pas de **Cramer**, son déterminant $\underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\det(A-\lambda I)}$ est donc **nul** :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \mathbf{(1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0}. \ \Delta = \mathbf{25}$$

$$\lambda_1 = \mathbf{\frac{3+5}{2} = 4} \text{ et } \lambda_2 =$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Ce système à une solution évidente : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas être un vecteur propre, car un vecteur propre est **non nul**. Si λ est une valeur propre, il a au moins une autre solution non nulle $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce système a alors plusieurs solutions, il n'est pas de **Cramer**, son déterminant $\underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\mathbf{det}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})}$ est donc **nul** :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \boldsymbol{(1-\lambda)(2-\lambda)-6=\lambda^2-3\lambda-4=0}. \ \Delta = \mathbf{25}$$

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{=4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{=-1}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ et } \lambda_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ et } \lambda_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

     donc, tels que $f(\overrightarrow{u}) = 4\overrightarrow{u}$.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ et } \lambda_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

     donc, tels que $f(\vec{u}) = 4\vec{u}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = \\ 3x + 2y & = \end{cases} \qquad \begin{cases} & = 0 \\ & = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= 4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= -1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

     donc, tels que $f(\vec{u}) = \mathbf{4\vec{u}}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = 4x \\ 3x + 2y & = \end{cases} \qquad \begin{cases} & = 0 \\ & = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= 4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= -1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

     donc, tels que $f(\overrightarrow{u}) = \mathbf{4\overrightarrow{u}}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = 4x \\ 3x + 2y & = 4y \end{cases} \qquad \begin{cases} & = 0 \\ & = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \mathbf{\frac{3+5}{2} = 4} \text{ et } \lambda_2 = \mathbf{\frac{3-5}{2} = -1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

     donc, tels que $f(\overrightarrow{u}) = \mathbf{4\overrightarrow{u}}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = 4x \\ 3x + 2y & = 4y \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + 2y & = 0 \\ & = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= 4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= -1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

     donc, tels que $f(\overrightarrow{u}) = \mathbf{4\overrightarrow{u}}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = 4x \\ 3x + 2y & = 4y \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + 2y & = 0 \\ 3x - 2y & = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{-1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**
   - On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

     donc, tels que $f(\overrightarrow{u}) = \mathbf{4\overrightarrow{u}}$.

$$\begin{cases} x+2y &= 4x \\ 3x+2y &= 4y \end{cases} \quad \begin{cases} -3x+2y &= 0 \\ 3x-2y &= 0 \end{cases} \quad \mathbf{3x-2y=0 \iff x=}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= 4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= -1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

     donc, tels que $f(\overrightarrow{u}) = \mathbf{4\overrightarrow{u}}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = 4x \\ 3x + 2y & = 4y \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + 2y & = 0 \\ 3x - 2y & = 0 \end{cases} \quad \mathbf{3x - 2y = 0 \iff x = \frac{2}{3}y}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{-1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

     donc, tels que $f(\overrightarrow{u}) = \mathbf{4\overrightarrow{u}}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = 4x \\ 3x + 2y & = 4y \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + 2y & = 0 \\ 3x - 2y & = 0 \end{cases} \quad \mathbf{3x - 2y = 0 \iff x = \frac{2}{3}y}$$

d'où $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix}$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

- On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

  donc, tels que $f(\overrightarrow{u}) = 4\overrightarrow{u}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = 4x \\ 3x + 2y & = 4y \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x + 2y & = 0 \\ 3x - 2y & = 0 \end{cases}$$

$$3x - 2y = 0 \iff x = \frac{2}{3}y$$

d'où $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix}$

En prenant $y = 3$

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= 4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= -1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

- On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

  donc, tels que $f(\overrightarrow{u}) = \mathbf{4\overrightarrow{u}}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = 4x \\ 3x + 2y & = 4y \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + 2y & = 0 \\ 3x - 2y & = 0 \end{cases} \quad \mathbf{3x - 2y = 0 \iff x = \frac{2}{3}y}$$

d'où $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix}$

En prenant $y = \mathbf{3}$ on obtient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$:

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ et } \lambda_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

   donc, tels que $f(\vec{u}) = 4\vec{u}$.

   $$\begin{cases} x + 2y &= 4x \\ 3x + 2y &= 4y \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + 2y &= 0 \\ 3x - 2y &= 0 \end{cases} \quad 3x - 2y = 0 \iff x = \frac{2}{3}y$$

   $$\text{d'où } \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix}$$

   En prenant $y = 3$ on obtient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ \end{pmatrix}$:

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= 4} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= -1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

     donc, tels que $f(\vec{u}) = \mathbf{4\vec{u}}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = 4x \\ 3x + 2y & = 4y \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x + 2y & = 0 \\ 3x - 2y & = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{3x - 2y = 0 \iff x = \frac{2}{3}y}$$

$$\text{d'où } \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix}$$

En prenant $y = \mathbf{3}$ on obtient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$:

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{-1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

   donc, tels que $f(\overrightarrow{u}) = \mathbf{4}\boldsymbol{\overrightarrow{u}}$.

$$\begin{cases} x + 2y &= 4x \\ 3x + 2y &= 4y \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + 2y &= 0 \\ 3x - 2y &= 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{3x - 2y = 0 \iff x = \frac{2}{3}y}$$

$$\text{d'où } \boldsymbol{\overrightarrow{u}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{2}{3}y} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$$

En prenant $y = \mathbf{3}$ on obtient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: le sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 4$ est

$E_4 = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \mathbb{R}$.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{-1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

     donc, tels que $f(\overrightarrow{u}) = \mathbf{4\overrightarrow{u}}$.

     $$\begin{cases} x + 2y &= 4x \\ 3x + 2y &= 4y \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + 2y &= 0 \\ 3x - 2y &= 0 \end{cases} \quad \mathbf{3x - 2y = 0 \iff x = \frac{2}{3}y}$$

     $$\text{d'où } \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix}$$

     En prenant $y = \mathbf{3}$ on obtient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: le sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 4$ est

     $E_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ \end{pmatrix} \mathbb{R}$.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{4} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{-1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

- On cherche le ou les vecteurs propres $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

  donc, tels que $f(\vec{u}) = \mathbf{4\vec{u}}$.

  $$\begin{cases} x + 2y &= 4x \\ 3x + 2y &= 4y \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + 2y &= 0 \\ 3x - 2y &= 0 \end{cases} \quad \mathbf{3x - 2y = 0} \iff \boldsymbol{x = \frac{2}{3}y}$$

  d'où $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix}$

  En prenant $y = \mathbf{3}$ on obtient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: le sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 4$ est

  $E_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mathbb{R}$.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{4}$ et $\lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{-1}$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

- On cherche le ou les vecteurs propres $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_1 = 4$,

  donc, tels que $f(\vec{u}) = \mathbf{4\vec{u}}$.

  $$\begin{cases} x + 2y &= 4x \\ 3x + 2y &= 4y \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + 2y &= 0 \\ 3x - 2y &= 0 \end{cases} \quad \mathbf{3x - 2y = 0 \iff x = \frac{2}{3}y}$$

  d'où $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix}$

  En prenant $y = \mathbf{3}$ on obtient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: le sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 4$ est

  $E_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mathbb{R}$.

- On cherche le ou les vecteurs propres $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$, donc tels que

  $f(\vec{v}) = \mathbf{-\vec{v}}$.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= 4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= -1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$,

     donc tels que $f(\overrightarrow{v}) = \boldsymbol{-\overrightarrow{v}}$.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= 4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= -1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**
   - On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$,

   donc tels que $f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = \\ 3x + 2y & = \end{cases} \qquad \begin{cases} & = 0 \\ & = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= 4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= -1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$,

     donc tels que $f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = -x \\ 3x + 2y & = \end{cases} \qquad \begin{cases} & = 0 \\ & = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \mathbf{\frac{3+5}{2} = 4} \text{ et } \lambda_2 = \mathbf{\frac{3-5}{2} = -1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

    - On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$,

      donc tels que $f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = -x \\ 3x + 2y & = -y \end{cases} \qquad \begin{cases} & = 0 \\ & = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ et } \lambda_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$,

     donc tels que $f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = -x \\ 3x + 2y & = -y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y & = 0 \\ & = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ et } \lambda_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$,

     donc tels que $f(\vec{v}) = -\vec{v}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = -x \\ 3x + 2y & = -y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y & = 0 \\ 3x + 3y & = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \mathbf{\frac{3+5}{2} = 4} \text{ et } \lambda_2 = \mathbf{\frac{3-5}{2} = -1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$,

     donc tels que $f(\overrightarrow{v}) = \boldsymbol{-\overrightarrow{v}}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = -x \\ 3x + 2y & = -y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y & = 0 \\ 3x + 3y & = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{x + y = 0 \iff y =}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= 4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= -1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$,

   donc tels que $f(\vec{v}) = -\vec{v}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = -x \\ 3x + 2y & = -y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y & = 0 \\ 3x + 3y & = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{x + y = 0 \iff y = -x}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ et } \lambda_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$,

     donc tels que $f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = -x \\ 3x + 2y & = -y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y & = 0 \\ 3x + 3y & = 0 \end{cases} \qquad x + y = 0 \iff y = -x$$

d'où $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= 4} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= -1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

   - On cherche le ou les vecteurs propres $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$,

   donc tels que $f(\vec{v}) = -\vec{v}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = -x \\ 3x + 2y & = -y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y & = 0 \\ 3x + 3y & = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{x + y = 0 \iff y = -x}$$

d'où $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$

En prenant $x = \mathbf{1}$,

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

② **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

- On cherche le ou les vecteurs propres $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$,

  donc tels que $f(\vec{v}) = -\vec{v}$.

  $$\begin{cases} x + 2y & = -x \\ 3x + 2y & = -y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y & = 0 \\ 3x + 3y & = 0 \end{cases} \qquad x + y = 0 \iff y = -x$$

  d'où $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$

  En prenant $x = 1$, on obtient $\vec{v} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$:

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ et } \lambda_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

- On cherche le ou les vecteurs propres $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$,

  donc tels que $f(\vec{v}) = -\vec{v}$.

$$\begin{cases} x + 2y & = -x \\ 3x + 2y & = -y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y & = 0 \\ 3x + 3y & = 0 \end{cases} \qquad x + y = 0 \iff y = -x$$

d'où $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$

En prenant $x = 1$, on obtient $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix}$:

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{-1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

- On cherche le ou les vecteurs propres $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$,

  donc tels que $f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.

  $$\begin{cases} x + 2y &= -x \\ 3x + 2y &= -y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y &= 0 \\ 3x + 3y &= 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{x + y = 0 \iff y = -x}$$

  $$\text{d'où } \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{-x} \end{pmatrix}$$

  En prenant $x = \mathbf{1}$, on obtient $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$:

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \mathbf{\frac{3+5}{2} = 4} \text{ et } \lambda_2 = \mathbf{\frac{3-5}{2} = -1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

- On cherche le ou les vecteurs propres $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$,

  donc tels que $f(\vec{v}) = -\vec{v}$.

  $$\begin{cases} x + 2y & = -x \\ 3x + 2y & = -y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y & = 0 \\ 3x + 3y & = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{x + y = 0 \iff y = -x}$$

  d'où $\vec{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{-x} \end{pmatrix}$

  En prenant $x = \mathbf{1}$, on obtient $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: le sous-espace propre associé à $\lambda_2 = -1$

  est $E_{-1} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \mathbb{R}$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{3+5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= 4} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\mathbf{3-5}}{\mathbf{2}} \mathbf{= -1}$$

2. **On recherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :**

- On cherche le ou les vecteurs propres $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$,

  donc tels que $f(\vec{v}) = \boldsymbol{-\vec{v}}$.

  $$\begin{cases} x + 2y & = -x \\ 3x + 2y & = -y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y & = 0 \\ 3x + 3y & = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{x + y = 0 \iff y = -x}$$

  d'où $\boldsymbol{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{-x} \end{pmatrix}$

  En prenant $x = \mathbf{1}$, on obtient $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: le sous-espace propre associé à $\lambda_2 = -1$

  est $E_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Définition:

Etant donnés une base $\mathcal{E}$ d'un espace vectoriel E, et un endomorphisme f de E. Notons $A = \underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(f)$.

- $\det(A - \lambda I)$ est un polynôme en λ appelé **polynôme caractéristique** de f.
- le polynôme caractéristique de f est **unique** : il est **indépendant** du choix de la base $\mathcal{E}$.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Définition:

Etant donnés une base $\mathcal{E}$ d'un espace vectoriel E, et un endomorphisme f de E. Notons $A = \underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(f)$.

- $\det(A - \lambda I)$ est un polynôme en λ appelé **polynôme caractéristique** de f.
- le polynôme caractéristique de f est **unique** : il est **indépendant** du choix de la base $\mathcal{E}$.

Par extension, on définit les valeurs propres et sous-espaces propres d'une matrice, en la considérant comme la matrice d'une application linéaire dans une base quelconque :

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \\ 0 & 0 & \end{vmatrix} =$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \\ 0 & 0 & \end{vmatrix} =$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \end{vmatrix} =$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \left| \qquad\qquad \right|$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & \\ & \end{vmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & \end{vmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 =$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = [(2-\lambda)-1] \times [(2-\lambda)+1] =$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple no 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = \left[(2-\lambda) - 1\right] \times \left[(2-\lambda) + 1\right] = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = \left[(2-\lambda) - 1\right] \times \left[(2-\lambda) + 1\right] = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) =$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \text{det}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = [(2-\lambda) - 1] \times [(2-\lambda) + 1] = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = \left[(2-\lambda) - 1\right] \times \left[(2-\lambda) + 1\right] = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$, f a deux valeurs propres :

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = [(2-\lambda)-1] \times [(2-\lambda)+1] = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$, f a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

   $$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

   $$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = \left[(2-\lambda) - 1\right] \times \left[(2-\lambda) + 1\right] = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

   Donc, $P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$, f a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

   $$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

   $$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = \left[(2-\lambda) - 1\right] \times \left[(2-\lambda) + 1\right] = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

   Donc, $P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$, f a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 =$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = [(2-\lambda)-1] \times [(2-\lambda)+1] = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$, f a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple nº 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = [(2-\lambda)-1] \times [(2-\lambda)+1] = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$, f a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = [(2-\lambda)-1] \times [(2-\lambda)+1] = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$, f a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = [(2-\lambda)-1] \times [(2-\lambda)+1] = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$, f a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = [(2-\lambda)-1] \times [(2-\lambda)+1] = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$, f a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = [(2-\lambda)-1] \times [(2-\lambda)+1] = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$, f a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \text{det}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = [(2-\lambda)-1] \times [(2-\lambda)+1] = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$, f a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = [(2-\lambda) - 1] \times [(2-\lambda) + 1] = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$, f a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = [(2-\lambda)-1] \times [(2-\lambda)+1] = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$, f a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} & = 0 \\ & = 0 \\ & = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ & = 0 \\ & = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ & = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \quad \text{autrement dit, } x =$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y-z & = 0 \\ x+y-z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \quad \text{autrement dit, } x = -y+z$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$ autrement dit, $x = -y + z$

$$\overrightarrow{u} \in E_1 \iff \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \quad \text{autrement dit, } x = -y + z$$

$$\overrightarrow{u} \in E_1 \iff \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -y+z \\ \\ \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \quad \text{autrement dit, } x = -y + z$$

$$\vec{u} \in E_1 \iff \vec{u} = \begin{pmatrix} -y + z \\ y \\ \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$ autrement dit, $x = -y + z$

$$\overrightarrow{u} \in E_1 \iff \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \quad \text{autrement dit, } x = -y + z$$

$$\overrightarrow{u} \in E_1 \iff \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$ autrement dit, $x = -y + z$

$$\overrightarrow{u} \in E_1 \iff \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ \\ \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$ autrement dit, $x = -y + z$

$$\vec{u} \in E_1 \iff \vec{u} = \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \quad \text{autrement dit, } x = -y + z$$

$$\vec{u} \in E_1 \iff \vec{u} = \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \quad \text{autrement dit, } x = -y + z$$

$$\vec{u} \in E_1 \iff \vec{u} = \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A - \lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A - I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \quad \text{autrement dit, } x = -y + z$$

$$\overrightarrow{u} \in E_1 \iff \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y-z & = 0 \\ x+y-z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \quad \text{autrement dit, } x = -y+z$$

$$\overrightarrow{u} \in E_1 \iff \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A - \lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A - I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \quad \text{autrement dit, } x = -y + z$$

$$\overrightarrow{u} \in E_1 \iff \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc, } E_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \quad \text{autrement dit, } x = -y + z$$

$$\vec{u} \in E_1 \iff \vec{u} = \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc, } E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \quad \text{autrement dit, } x = -y + z$$

$$\vec{u} \in E_1 \iff \vec{u} = \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc, } E_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 =$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
    - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \quad = 0 \\ \quad = 0 \\ \quad = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y-z & = 0 \\ & = 0 \\ & = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y-z & = 0 \\ x-y-z & = 0 \\ & = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y - z & = 0 \\ x - y - z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y-z & = 0 \\ x-y-z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \\ x = \\ z = \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y-z & = 0 \\ x-y-z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \\ x = \\ z = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y - z & = 0 \\ x - y - z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \\ x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y-z & = 0 \\ x-y-z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y-z & = 0 \\ x-y-z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ x = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad \vec{u} \in E_3 \iff \vec{u} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

① **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

② **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y-z & = 0 \\ x-y-z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ x = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad \overrightarrow{u} \in E_3 \iff \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} y \\ \\ \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y-z & = 0 \\ x-y-z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ x = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad \vec{u} \in E_3 \iff \vec{u} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y-z & = 0 \\ x-y-z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ x = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad \vec{u} \in E_3 \iff \vec{u} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y-z & = 0 \\ x-y-z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ x = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad \vec{u} \in E_3 \iff \vec{u} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**

   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y-z & = 0 \\ x-y-z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ x = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad \vec{u} \in E_3 \iff \vec{u} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \end{pmatrix}$$

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

① **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

② **Recherche des sous-espaces propres associés :**

- Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y-z & = 0 \\ x-y-z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ x = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad \vec{u} \in E_3 \iff \vec{u} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y-z & = 0 \\ x-y-z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ x = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad \vec{u} \in E_3 \iff \vec{u} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y-z & = 0 \\ x-y-z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \\ x = y \\ z = 0 \end{cases} \quad \vec{u} \in E_3 \iff \vec{u} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc, $E_3 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

I. Valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple n° 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :** $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$
2. **Recherche des sous-espaces propres associés :**
   - Etude du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}}_{A-\lambda_2 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A-3I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y-z & = 0 \\ x-y-z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ x = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad \vec{u} \in E_3 \iff \vec{u} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc, $E_3 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Définition:

Soit f une application linéaire. On dit que f est **diagonalisable** s'il existe une base β de E tel que :

$$\underset{\beta}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème

Soit f une application linéaire.

$$\underset{\beta}{\text{mat}}(f) \text{ est diagonale } \iff \beta \text{ est une base constituée de vecteurs propres}$$

II. Diagonalisation.

Théorème

Soit f une application linéaire.

$$\underset{\beta}{\text{mat}}(f) \text{ est diagonale } \iff \beta \text{ est une base constituée de vecteurs propres}$$

Exemple n° 3 : Détermine une base β où la matrice de l'endomorphisme de l'exemple n° 1 est diagonale.

II. Diagonalisation.

Théorème

Soit f une application linéaire.

$$\underset{\beta}{\text{mat}}(f) \text{ est diagonale } \iff \beta \text{ est une base constituée de vecteurs propres}$$

Exemple n° 3 : Détermine une base β où la matrice de l'endomorphisme de l'exemple n° 1 est diagonale.

On avait trouvé deux sous-espaces propres : $E_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ et $E_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ d'où

II. Diagonalisation.

Théorème

Soit f une application linéaire.

$$\underset{\beta}{\text{mat}}(f) \text{ est diagonale } \iff \beta \text{ est une base constituée de vecteurs propres}$$

Exemple n° 3 : Détermine une base β où la matrice de l'endomorphisme de l'exemple n° 1 est diagonale.

On avait trouvé deux sous-espaces propres : $E_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ et $E_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ d'où

- Dans la base $\beta_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ on a $\underset{\beta_1}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$
- Dans la base $\beta_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ on a $\underset{\beta_2}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$

II. Diagonalisation.

Théorème

Soit f une application linéaire.

$$\underset{\beta}{\text{mat}}(f) \text{ est diagonale} \iff \beta \text{ est une base constituée de vecteurs propres}$$

Exemple n° 3 : Détermine une base β où la matrice de l'endomorphisme de l'exemple n° 1 est diagonale.

On avait trouvé deux sous-espaces propres : $E_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ et $E_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ d'où

- Dans la base $\beta_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ on a $\underset{\beta_1}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$
- Dans la base $\beta_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ on a $\underset{\beta_2}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$

II. Diagonalisation.

Théorème

Soit f une application linéaire.

$$\underset{\beta}{\text{mat}}(f) \text{ est diagonale } \iff \beta \text{ est une base constituée de vecteurs propres}$$

Exemple n° 3 : Détermine une base β où la matrice de l'endomorphisme de l'exemple n° 1 est diagonale.

On avait trouvé deux sous-espaces propres : $E_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ et $E_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ d'où

- Dans la base $\beta_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ on a $\underset{\beta_1}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Dans la base $\beta_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ on a $\underset{\beta_2}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$

II. Diagonalisation.

Théorème

Soit f une application linéaire.

$$\underset{\beta}{\text{mat}}(f) \text{ est diagonale } \iff \beta \text{ est une base constituée de vecteurs propres}$$

Exemple n° 3 : Détermine une base β où la matrice de l'endomorphisme de l'exemple n° 1 est diagonale.

On avait trouvé deux sous-espaces propres : $E_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ et $E_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ d'où

- Dans la base $\beta_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ on a $\underset{\beta_1}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Dans la base $\beta_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ on a $\underset{\beta_2}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$

Théorème

Soit f une application linéaire.

$$\underset{\beta}{\text{mat}}(f) \text{ est diagonale } \iff \beta \text{ est une base constituée de vecteurs propres}$$

Exemple n° 3 : Détermine une base β où la matrice de l'endomorphisme de l'exemple n° 1 est diagonale.

On avait trouvé deux sous-espaces propres : $E_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ et $E_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ d'où

- Dans la base $\beta_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ on a $\underset{\beta_1}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Dans la base $\beta_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ on a $\underset{\beta_2}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

II. Diagonalisation.

Exemple n° 4 : Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'endomorphisme Φ a pour matrice la matrice A de l'exemple n° 2.

On avait trouvé deux sous-espaces propres : $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}\\\\\\\end{pmatrix}$ d'où

II. Diagonalisation.

Exemple n° 4 : Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'endomorphisme Φ a pour matrice la matrice A de l'exemple n° 2.

On avait trouvé deux sous-espaces propres : $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\ \\ \end{pmatrix}$ d'où

Exemple n° 4 : Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'endomorphisme Φ a pour matrice la matrice A de l'exemple n° 2.

On avait trouvé deux sous-espaces propres : $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\\ \end{pmatrix}$ d'où

II. Diagonalisation.

Exemple n° 4 : Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'endomorphisme Φ a pour matrice la matrice A de l'exemple n° 2.

On avait trouvé deux sous-espaces propres : $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ d'où

II. Diagonalisation.

Exemple n° 4 : Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'endomorphisme Φ a pour matrice la matrice A de l'exemple n° 2.

On avait trouvé deux sous-espaces propres : $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ d'où

- Dans la base $\gamma_1 = \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\quad\\ \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\quad\\ \\ \end{pmatrix}\right)$ on a $\underset{\gamma_1}{\text{mat}}(\Phi) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

II. Diagonalisation.

Exemple n° 4 : Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'endomorphisme Φ a pour matrice la matrice A de l'exemple n° 2.

On avait trouvé deux sous-espaces propres : $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ d'où

- Dans la base $\gamma_1 = \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\\\\\end{pmatrix}\right)$ on a $\underset{\gamma_1}{\text{mat}}(\Phi) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

II. Diagonalisation.

Exemple n° 4 : Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'endomorphisme Φ a pour matrice la matrice A de l'exemple n° 2.

On avait trouvé deux sous-espaces propres : $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ d'où

- Dans la base $\gamma_1 = \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ on a $\underset{\gamma_1}{\text{mat}}(\Phi) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

II. Diagonalisation.

Exemple n° 4 : Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'endomorphisme Φ a pour matrice la matrice A de l'exemple n° 2.

On avait trouvé deux sous-espaces propres : $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ d'où

- Dans la base $\gamma_1 = \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ on a $\underset{\gamma_1}{\text{mat}}(\Phi) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
- Dans la base $\gamma_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\\ \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\\ \\ \end{pmatrix}\right)$ on a $\underset{\gamma_2}{\text{mat}}(\Phi) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

II. Diagonalisation.

Exemple n° 4 : Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'endomorphisme Φ a pour matrice la matrice A de l'exemple n° 2.

On avait trouvé deux sous-espaces propres : $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ d'où

- Dans la base $\gamma_1 = \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ on a $\underset{\gamma_1}{\text{mat}}(\Phi) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

- Dans la base $\gamma_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}\right)$ on a $\underset{\gamma_2}{\text{mat}}(\Phi) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

II. Diagonalisation.

Exemple n° 4 : Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'endomorphisme Φ a pour matrice la matrice A de l'exemple n° 2.

On avait trouvé deux sous-espaces propres : $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ d'où

- Dans la base $\gamma_1 = \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ on a $\underset{\gamma_1}{\text{mat}}(\Phi) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
- Dans la base $\gamma_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ on a $\underset{\gamma_2}{\text{mat}}(\Phi) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

II. Diagonalisation.

Exercice no 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ?

II. Diagonalisation.

Exercice n° 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ? $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 6x - y \end{pmatrix} \end{array}$

2. Détermine ses valeurs propres.

II. Diagonalisation.

Exercice n° 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ? $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 6x - y \end{pmatrix} \end{array}$

2. Détermine ses valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 6 & -1 - \lambda \end{vmatrix} =$$

Exercice nº 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ? $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 6x - y \end{pmatrix} \end{array}$

2. Détermine ses valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 6 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0, \ \Delta =$$

II. Diagonalisation.

Exercice no 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ? $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 6x - y \end{pmatrix} \end{array}$
2. Détermine ses valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0,\ \Delta = 25 \text{ et } \begin{cases} \lambda_1 = \\ \end{cases}$$

II. Diagonalisation.

Exercice n° 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ? $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 6x - y \end{pmatrix} \end{array}$
2. Détermine ses valeurs propres.

   $\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 6 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0,\ \Delta = 25$ et $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \end{cases}$

II. Diagonalisation.

Exercice n° 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ? $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 6x - y \end{pmatrix} \end{array}$

2. Détermine ses valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 6 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0,\ \Delta = 25 \text{ et } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

II. Diagonalisation.

Exercice no 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ? $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 6x - y \end{pmatrix} \end{array}$
2. Détermine ses valeurs propres.

   $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, $\Delta = 25$ et $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$
3. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres.

II. Diagonalisation.

Exercice no 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ? $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 6x - y \end{pmatrix} \end{array}$
2. Détermine ses valeurs propres.

   $\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 6 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, $\Delta = 25$ et $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$
3. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres.
   - On cherche un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u}$.

II. Diagonalisation.

Exercice no 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ? $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 6x - y \end{pmatrix} \end{array}$
2. Détermine ses valeurs propres.

   $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, $\Delta = 25$ et $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$
3. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres.
   - On cherche un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u}$.

$$\begin{cases} y & = 2x \\ 6x - y & = 2y \end{cases}$$

II. Diagonalisation.

Exercice n° 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ? $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 6x - y \end{pmatrix} \end{array}$
2. Détermine ses valeurs propres.

   $$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 6 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0,\ \Delta = 25 \text{ et } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

3. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres.
   - On cherche un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u}$.

$$\begin{cases} y & = 2x \\ 6x - y & = 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + y & = 0 \\ 6x - 3y & = 0 \end{cases}$$

II. Diagonalisation.

Exercice n° 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ? $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 6x - y \end{pmatrix} \end{array}$
2. Détermine ses valeurs propres.

   $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, $\Delta = 25$ et $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$
3. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres.
   - On cherche un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u}$.

     $$\begin{cases} y & = 2x \\ 6x - y & = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + y & = 0 \\ 6x - 3y & = 0 \end{cases} \quad -2x + y = 0 \iff y = 2x$$

     En prenant $x = 1$ on obtient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

II. Diagonalisation.

Exercice n° 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ? $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 6x - y \end{pmatrix} \end{array}$
2. Détermine ses valeurs propres.

   $$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0,\ \Delta = 25 \text{ et } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$
3. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres.
   - On cherche un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u}$.

     $$\begin{cases} y & = 2x \\ 6x - y & = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + y & = 0 \\ 6x - 3y & = 0 \end{cases} \quad -2x + y = 0 \iff y = 2x$$

     En prenant $x = 1$ on obtient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   - On cherche un vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = -3\overrightarrow{v}$.

II. Diagonalisation.

Exercice no 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ? $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 6x - y \end{pmatrix} \end{array}$
2. Détermine ses valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 6 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0,\ \Delta = 25 \text{ et } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

3. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres.
   - On cherche un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u}$.

$$\begin{cases} y & = 2x \\ 6x - y & = 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + y & = 0 \\ 6x - 3y & = 0 \end{cases} \qquad -2x + y = 0 \iff y = 2x$$

En prenant $x = 1$ on obtient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   - On cherche un vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = -3\overrightarrow{v}$.

$$\begin{cases} y & = -3x \\ 6x - y & = -3y \end{cases}$$

II. Diagonalisation.

Exercice nº 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ? $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 6x - y \end{pmatrix} \end{array}$

2. Détermine ses valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 6 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0,\ \Delta = 25 \text{ et } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

3. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres.
   - On cherche un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u}$.

$$\begin{cases} y & = 2x \\ 6x - y & = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + y & = 0 \\ 6x - 3y & = 0 \end{cases} \quad -2x + y = 0 \iff y = 2x$$

En prenant $x = 1$ on obtient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   - On cherche un vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = -3\overrightarrow{v}$.

$$\begin{cases} y & = -3x \\ 6x - y & = -3y \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y & = 0 \\ 6x + 2y & = 0 \end{cases}$$

II. Diagonalisation.

Exercice no 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ? $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 6x - y \end{pmatrix} \end{array}$
2. Détermine ses valeurs propres.

   $\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 6 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, $\Delta = 25$ et $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$
3. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres.
   - On cherche un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u}$.

     $\begin{cases} y & = 2x \\ 6x - y & = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + y & = 0 \\ 6x - 3y & = 0 \end{cases} \quad -2x + y = 0 \iff y = 2x$

     En prenant $x = 1$ on obtient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   - On cherche un vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = -3\overrightarrow{v}$.

     $\begin{cases} y & = -3x \\ 6x - y & = -3y \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y & = 0 \\ 6x + 2y & = 0 \end{cases} \quad 3x + y = 0 \iff y = -3x$

Exercice n° 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ? $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 6x - y \end{pmatrix} \end{array}$
2. Détermine ses valeurs propres.

   $$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0,\ \Delta = 25 \text{ et } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$
3. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres.
   - On cherche un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u}$.

     $$\begin{cases} y & = 2x \\ 6x - y & = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + y & = 0 \\ 6x - 3y & = 0 \end{cases} \quad -2x + y = 0 \iff y = 2x$$

     En prenant $x = 1$ on obtient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   - On cherche un vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = -3\overrightarrow{v}$.

     $$\begin{cases} y & = -3x \\ 6x - y & = -3y \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y & = 0 \\ 6x + 2y & = 0 \end{cases} \quad 3x + y = 0 \iff y = -3x$$

     En prenant $x = 1$ on obtient $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

II. Diagonalisation.

Exercice nº 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres :
   $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ associé à $\lambda_1 = 2$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ associé à $\lambda_2 = -3$.

4. Détermine une base β où la la matrice de l'application f est diagonale.

II. Diagonalisation.

Exercice n° 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres :
   $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ associé à $\lambda_1 = 2$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ associé à $\lambda_2 = -3$.

4. Détermine une base β où la la matrice de l'application f est diagonale.

   Dans la base $\beta = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$ ou $\beta' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

5. Détermine la matrice de f dans la base β.

II. Diagonalisation.

Exercice nº 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres :
   $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ associé à $\lambda_1 = 2$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ associé à $\lambda_2 = -3$.

4. Détermine une base β où la la matrice de l'application f est diagonale.

   Dans la base $\beta = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$ ou $\beta' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

5. Détermine la matrice de f dans la base β.

   $\underset{\beta}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ou $\underset{\beta'}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Propriété:

Si dans une base β, la matrice d'une application linéaire f est **triangulaire** :

$$\underset{\beta}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ou } \underset{\beta}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale.

Propriété:

Si dans une base β, la matrice d'une application linéaire f est **triangulaire** :

$$\underset{\beta}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ou } \underset{\beta}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale.

Exemple n° 5 : Dans l'exemple précédent, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ses valeurs propres sont donc

III. Matrices particulières.

Propriété:

Si dans une base β, la matrice d'une application linéaire f est **triangulaire** :

$$\underset{\beta}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ou } \underset{\beta}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale.

Exemple n° 5 : Dans l'exemple précédent, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ses valeurs propres sont donc 3 et 2.

III. Matrices particulières.

Rappel :

On dit qu'une matrice M est symétrique si et seulement si $M = {}^tM$.

III. Matrices particulières.

Rappel :

On dit qu'une matrice M est symétrique si et seulement si $M = {}^tM$.

Exemple n° 6 :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ la matrice A

III. Matrices particulières.

Rappel :

On dit qu'une matrice M est symétrique si et seulement si $\boldsymbol{M = {}^tM}$.

Exemple n° 6 :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 3 & & \\ -2 & & \end{pmatrix}$ la matrice A

III. Matrices particulières.

Rappel :

On dit qu'une matrice M est symétrique si et seulement si $\boldsymbol{M = {}^tM}$.

Exemple n° 6 :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \\ 3 & 4 & \\ -2 & 1 & \end{pmatrix}$ la matrice A

III. Matrices particulières.

Rappel :

On dit qu'une matrice M est symétrique si et seulement si $\boldsymbol{M = {}^tM}$.

Exemple n° 6 :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice A

III. Matrices particulières.

Rappel :

On dit qu'une matrice M est symétrique si et seulement si $M = {}^tM$.

Exemple n° 6 :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice A **n'est pas symétrique.**

III. Matrices particulières.

Rappel :

On dit qu'une matrice M est symétrique si et seulement si $\boldsymbol{M = {}^tM}$.

Exemple n° 6 :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice A **n'est pas symétrique.**
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tB =$

III. Matrices particulières.

Rappel :

On dit qu'une matrice M est symétrique si et seulement si $\boldsymbol{M = {}^tM}$.

Exemple n° 6 :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice A **n'est pas symétrique.**
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\ 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice B

III. Matrices particulières.

Rappel :

On dit qu'une matrice M est symétrique si et seulement si $\boldsymbol{M = {}^tM}$.

Exemple n° 6 :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice A **n'est pas symétrique.**
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\,2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -\,2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice B **est symétrique.**

III. Matrices particulières.

Rappel :

On dit qu'une matrice M est symétrique si et seulement si $M = {}^tM$.

Exemple n° 6 :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice A **n'est pas symétrique.**
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice B **est symétrique.**
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ ${}^tC =$

III. Matrices particulières.

Rappel :

On dit qu'une matrice M est symétrique si et seulement si $M = {}^tM$.

Exemple n° 6 :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice A **n'est pas symétrique.**
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice B **est symétrique.**
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ ${}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ la matrice C

III. Matrices particulières.

Rappel :

On dit qu'une matrice M est symétrique si et seulement si $M = {}^tM$.

Exemple n° 6 :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice A **n'est pas symétrique.**
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\ 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice B **est symétrique.**
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ ${}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\ 5 \end{pmatrix}$ la matrice C **est symétrique.**

Les matrices diagonales sont symétriques.

III. Matrices particulières.

Rappel :

On dit qu'une matrice M est symétrique si et seulement si $M = {}^tM$.

Exemple n° 6 :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice A **n'est pas symétrique.**
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice B **est symétrique.**
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ ${}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ la matrice C **est symétrique.**

  Les matrices diagonales sont symétriques.
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ${}^tD =$

III. Matrices particulières.

Rappel :

On dit qu'une matrice M est symétrique si et seulement si $M = {}^tM$.

Exemple n° 6 :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice A **n'est pas symétrique.**
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\,2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -\,2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice B **est symétrique.**
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ ${}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\,5 \end{pmatrix}$ la matrice C **est symétrique.**

  Les matrices diagonales sont symétriques.
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ${}^tD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice D

III. Matrices particulières.

Rappel :

On dit qu'une matrice M est symétrique si et seulement si $M = {}^tM$.

Exemple n° 6 :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice A **n'est pas symétrique.**
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice B **est symétrique.**
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ ${}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ la matrice C **est symétrique.**

  Les matrices diagonales sont symétriques.
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ${}^tD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice D **est symétrique.**

III. Matrices particulières.

Propriété:

Si dans une base β, la matrice d'une application linéaire f est **symétrique**, alors :

- Ses valeurs propres sont des nombres réels.
- L'application linéaire f est diagonalisable.

III. Matrices particulières.

Propriété:

Si dans une base β, la matrice d'une application linéaire f est **symétrique**, alors :

- Ses valeurs propres sont des nombres réels.
- L'application linéaire f est diagonalisable.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(D - I) = \begin{vmatrix} & 1 & 0 \\ 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{vmatrix} =$$

III. Matrices particulières.

Propriété:

Si dans une base β, la matrice d'une application linéaire f est **symétrique**, alors :

- Ses valeurs propres sont des nombres réels.
- L'application linéaire f est diagonalisable.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(D - I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

III. Matrices particulières.

Propriété:

Si dans une base β, la matrice d'une application linéaire f est **symétrique**, alors :

- Ses valeurs propres sont des nombres réels.
- L'application linéaire f est diagonalisable.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(D - I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = +(3-\lambda) \times \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

III. Matrices particulières.

Propriété:

Si dans une base β, la matrice d'une application linéaire f est **symétrique**, alors :

- Ses valeurs propres sont des nombres réels.
- L'application linéaire f est diagonalisable.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(D - I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = +(3-\lambda) \times \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1^2 =$$

III. Matrices particulières.

Propriété:

Si dans une base β, la matrice d'une application linéaire f est **symétrique**, alors :

- Ses valeurs propres sont des nombres réels.
- L'application linéaire f est diagonalisable.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \mathrm{det}(D - I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = +(3-\lambda) \times \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1^2 = [(1-\lambda) - 1] \times [(1-\lambda) + 1] =$$

III. Matrices particulières.

Propriété:

Si dans une base β, la matrice d'une application linéaire f est **symétrique**, alors :

- Ses valeurs propres sont des nombres réels.
- L'application linéaire f est diagonalisable.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(D - I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = +(3-\lambda) \times \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1^2 = [(1-\lambda)-1] \times [(1-\lambda)+1] = -\lambda(2-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) =$

III. Matrices particulières.

Propriété:

Si dans une base β, la matrice d'une application linéaire f est **symétrique**, alors :

- Ses valeurs propres sont des nombres réels.
- L'application linéaire f est diagonalisable.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(D - I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = +(3-\lambda) \times \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1^2 = [(1-\lambda) - 1] \times [(1-\lambda) + 1] = -\lambda(2-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) = \lambda(3-\lambda)(\lambda-2)$ f a trois valeurs propres :

III. Matrices particulières.

Propriété:

Si dans une base β, la matrice d'une application linéaire f est **symétrique**, alors :

- Ses valeurs propres sont des nombres réels.
- L'application linéaire f est diagonalisable.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(D - I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = +(3-\lambda) \times \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1^2 = [(1-\lambda)-1] \times [(1-\lambda)+1] = -\lambda(2-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) = \lambda(3-\lambda)(\lambda-2)$ f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$,

III. Matrices particulières.

Propriété:

Si dans une base β, la matrice d'une application linéaire f est **symétrique**, alors :

- Ses valeurs propres sont des nombres réels.
- L'application linéaire f est diagonalisable.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(D - I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = +(3-\lambda) \times \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1^2 = [(1-\lambda) - 1] \times [(1-\lambda) + 1] = -\lambda(2-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) = \lambda(3-\lambda)(\lambda-2)$ f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et

Propriété:

Si dans une base β, la matrice d'une application linéaire f est **symétrique**, alors :

- Ses valeurs propres sont des nombres réels.
- L'application linéaire f est diagonalisable.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$P(\lambda) = \det(D - I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = +(3-\lambda) \times \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1^2 = [(1-\lambda)-1] \times [(1-\lambda)+1] = -\lambda(2-\lambda)$$

Donc, $P(\lambda) = \lambda(3-\lambda)(\lambda-2)$ f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda =$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

    - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : **0**, **3**, et **2**.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1-\lambda_1 & 1 & 0\\ 1 & 1-\lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 3-\lambda_1\end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}_{D-0}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : **0**, **3**, et **2**.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

    - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} & = 0 \\ & = 0 \\ & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \\ z = \end{cases} \qquad \text{donc } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ \quad\;\; = 0 \\ \quad\;\; = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \\ z = \end{cases} \qquad \text{donc } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ x+y = 0 \\ \quad\;\; = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \\ z = \end{cases} \qquad \text{donc } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : **0**, **3**, et **2**.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

- Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ x+y &= 0 \\ 3z &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \\ z = \end{cases} \qquad \text{donc } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
    - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ x+y &= 0 \\ 3z &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x \\ z = \end{cases} \quad \text{donc } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ x+y &= 0 \\ 3z &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ 3z \quad = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x \\ z = \ 0 \end{cases} \quad \text{donc } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y & = 0 \\ x+y & = 0 \\ 3z & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x \\ z = \ 0 \end{cases} \quad \text{donc } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ \end{pmatrix}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ x+y &= 0 \\ 3z &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ z = \ \ 0 \end{cases} \quad \text{donc } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

- Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y & = 0 \\ x+y & = 0 \\ 3z & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x \\ z = \ \ 0 \end{cases} \quad \text{donc } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{a}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ x+y &= 0 \\ 3z &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ z = \ \ 0 \end{cases} \quad \text{donc } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{a}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y & = 0 \\ x+y & = 0 \\ 3z & = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = & -x \\ z = & 0 \end{cases} \quad \text{donc } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{a}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{a}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{D-\lambda_1 I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D-0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ 3z \quad = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x \\ z = \ 0 \end{cases} \quad \text{donc } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{a}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

    - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda =$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f\left(\overrightarrow{b}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{b})} = \underbrace{\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}}_{3\overrightarrow{b}}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
    - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f\left(\overrightarrow{b}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3x \\ \\ \end{pmatrix}}_{3\overrightarrow{b}}$$

III. Matrices particulières.

Exemple no 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f\left(\overrightarrow{b}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ \end{pmatrix}}_{3\,\overrightarrow{b}}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{b})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}}_{3\overrightarrow{b}}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{b})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}}_{3\,\overrightarrow{b}} \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{r} \qquad\qquad\qquad\qquad \end{array} \right.}_{(D-3I)\overrightarrow{b}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : **0**, **3**, et **2**.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{f\left(\overrightarrow{b}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix}3x\\3y\\3z\end{pmatrix}}_{3\overrightarrow{b}} \qquad \left\{\begin{array}{ll}\underbrace{\begin{array}{l}-2x\\ \\ \end{array}}_{(D-3I)\overrightarrow{b}} & \begin{array}{l}=0\\=0\\=0\end{array}\end{array}\right.$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{b})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}}_{3\overrightarrow{b}} \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{ll} -2x + y & = 0 \\ & = 0 \\ & = 0 \end{array} \right.}_{(D-3I)\overrightarrow{b}}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{b})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}}_{3\overrightarrow{b}} \quad \underbrace{\left\{\begin{array}{ll} -2x + y & = 0 \\ x & = 0 \\ & = 0 \end{array}\right.}_{(D-3I)\overrightarrow{b}}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f\left(\overrightarrow{b}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}}_{3\,\overrightarrow{b}} \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{rrl} -2x & + \; y & = 0 \\ x & - \; 2y & = 0 \\ & & = 0 \end{array} \right.}_{(D-3I)\overrightarrow{b}}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f\left(\overrightarrow{b}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}}_{3\overrightarrow{b}} \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{rcrl} -2x & + & y & \\ x & - & 2y & \\ & & 0z & \end{array} \right.}_{(D-3I)\overrightarrow{b}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : **0**, **3**, et **2**.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{f\left(\overrightarrow{b}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix}3x\\3y\\3z\end{pmatrix}}_{3\overrightarrow{b}} \qquad \underbrace{\left\{\begin{array}{rcrl} -2x & + & y & =0\\ x & - & 2y & =0\\ & & 0z & =0\end{array}\right.}_{(D-3I)\overrightarrow{b}} \qquad \left\{\begin{array}{cc} y & = \\ & = \end{array}\right.$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : **0**, **3**, et **2**.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{b})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}}_{3\overrightarrow{b}} \quad \underbrace{\left\{\begin{array}{rrrl} -2x & + & y & = 0 \\ x & - & 2y & = 0 \\ & & 0z & = 0 \end{array}\right.}_{(D-3I)\overrightarrow{b}} \quad \left\{\begin{array}{ll} y & = 2x \\ & = \end{array}\right.$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{b})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}}_{3\overrightarrow{b}} \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{rcrl} -2x & + & y & = 0 \\ x & - & 2y & = 0 \\ & & 0z & = 0 \end{array} \right.}_{(D-3I)\overrightarrow{b}} \quad \left\{ \begin{array}{rl} y & = 2x \\ -3x & = \end{array} \right.$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : **0**, **3**, et **2**.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{b})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}}_{3\overrightarrow{b}} \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{rrl} -2x + & y & = 0 \\ x - & 2y & = 0 \\ & 0z & = 0 \end{array} \right.}_{(D-3I)\overrightarrow{b}} \quad \left\{ \begin{array}{rl} y & = 2x \\ -3x & = 0 \end{array} \right.$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{b})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}}_{3\overrightarrow{b}} \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{rrrl} -2x & + & y & = 0 \\ x & - & 2y & = 0 \\ & & 0z & = 0 \end{array} \right.}_{(D-3I)\overrightarrow{b}} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2x \\ -3x & = & 0 \end{array} \right.$$

donc $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$. Pour $z = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{b}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

- Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{b})} = \underbrace{\begin{pmatrix}3x\\ 3y\\ 3z\end{pmatrix}}_{3\overrightarrow{b}} \quad \underbrace{\left\{\begin{array}{rcrl} -2x & + & y & = 0\\ x & - & 2y & = 0\\ & & 0z & = 0\end{array}\right.}_{(D-3I)\overrightarrow{b}} \quad \left\{\begin{array}{rl} y & = 2x\\ -3x & = 0\end{array}\right.$$

donc $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix}0\\ \\ \end{pmatrix}$. Pour $z = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{b}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : **0**, **3**, et **2**.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{b})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}}_{3\overrightarrow{b}} \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{rcrl} -2x & + & y & = 0 \\ x & - & 2y & = 0 \\ & & 0z & = 0 \end{array} \right.}_{(D-3I)\overrightarrow{b}} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2x \\ -3x & = & 0 \end{array} \right.$$

donc $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \end{pmatrix}$. Pour $z = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{b}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : **0**, **3**, et **2**.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{b})} = \underbrace{\begin{pmatrix}3x\\ 3y\\ 3z\end{pmatrix}}_{3\overrightarrow{b}} \quad \underbrace{\begin{cases}-2x + y & = 0\\ x - 2y & = 0\\ 0z & = 0\end{cases}}_{(D-3I)\overrightarrow{b}} \quad \begin{cases}y & = 2x\\ -3x & = 0\end{cases}$$

donc $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ z\end{pmatrix}$. Pour $z = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{b}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : **0**, **3**, et **2**.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{b}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{3}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{b})} = \underbrace{\begin{pmatrix}3x\\ 3y\\ 3z\end{pmatrix}}_{3\overrightarrow{b}} \quad \underbrace{\left\{\begin{array}{rrrl} -2x & + & y & = 0\\ x & - & 2y & = 0\\ & & 0z & = 0\end{array}\right.}_{(D-3I)\overrightarrow{b}} \quad \left\{\begin{array}{rl} y & = 2x\\ -3x & = 0\end{array}\right.$$

donc $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ z\end{pmatrix}$. Pour $z = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{b}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda =$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : **0**, **3**, et **2**.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f\left(\overrightarrow{c}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{c})} = \underbrace{\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f\left(\overrightarrow{c}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f\left(\overrightarrow{c}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ \\ \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}}$$

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{c})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f\left(\overrightarrow{c}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}}$$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : **0**, **3**, et **2**.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

- Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{c})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.}_{(D-2I)\overrightarrow{c}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \\ z = \end{array} \right. \quad \text{donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{c})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \underbrace{\begin{cases} -x & \\ & \\ & \end{cases}}_{(D-2I)\overrightarrow{c}} \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{matrix} \quad \begin{cases} y = \\ z = \end{cases} \quad \text{donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f\left(\overrightarrow{c}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} -x + y \\ \\ \\ \end{array} \right.}_{(D-2I)\overrightarrow{c}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \\ z = \end{array} \right. \quad \text{donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f\left(\overrightarrow{c}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \underbrace{\begin{cases} -x + y & = 0 \\ x & = 0 \\ & = 0 \end{cases}}_{(D-2I)\overrightarrow{c}} \quad \begin{cases} y = \\ z = \end{cases} \quad \text{donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f\left(\overrightarrow{c}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{ll} -x + y & \\ x - y & \\ & \end{array} \right.}_{(D-2I)\overrightarrow{c}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \\ z = \end{array} \right. \quad \text{donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{c})} = \underbrace{\begin{pmatrix}2x\\ 2y\\ 2z\end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \left\{\underbrace{\begin{array}{rrr} -x & + y & \\ x & - y & \\ & & z \end{array}}_{(D-2I)\overrightarrow{c}} \begin{array}{l} = 0\\ = 0\\ = 0\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} y = \\ z = \end{array}\right. \quad \text{donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{c})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \left\{ \underbrace{\begin{array}{rrr} -x & + y & \\ x & - y & \\ & & z \end{array}}_{(D-2I)\overrightarrow{c}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = \end{array} \right. \quad \text{donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{c})} = \underbrace{\begin{pmatrix}2x\\ 2y\\ 2z\end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \underbrace{\left\{\begin{array}{rrr} -x & + y & \\ x & - y & \\ & & z \end{array}\right.}_{(D-2I)\overrightarrow{c}} \begin{array}{l} = 0\\ = 0\\ = 0\end{array} \quad \begin{cases} y = x\\ z = 0\end{cases} \quad \text{donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f\left(\overrightarrow{c}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{rrr} -x & +\, y & \\ x & -\, y & \\ & & z \end{array}\right.}_{(D-2I)\overrightarrow{c}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array} \quad \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \text{ donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} x \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{c})} = \underbrace{\begin{pmatrix}2x\\ 2y\\ 2z\end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \left\{\begin{array}{l} \underbrace{\begin{array}{rrr} -x & +y & \\ x & -y & \\ & & z \end{array}}_{(D-2I)\overrightarrow{c}} \begin{array}{l} =0\\ =0\\ =0 \end{array}\end{array}\right. \quad \begin{cases} y = x\\ z = 0 \end{cases} \text{ donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix}x\\ x\end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{c})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{array}{rrr} -x & +\, y & \\ x & -\, y & \\ & & z \end{array}}_{(D-2I)\overrightarrow{c}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array} \end{array} \right. \quad \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \text{ donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : **0**, **3**, et **2**.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{c})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \underbrace{\begin{cases} -x + y & = 0 \\ x - y & = 0 \\ \qquad\quad z & = 0 \end{cases}}_{(D-2I)\overrightarrow{c}} \quad \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \text{ donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\vec{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{f\left(\vec{c}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix}2x\\ 2y\\ 2z\end{pmatrix}}_{2\vec{c}} \quad \left\{\begin{array}{rl} \underbrace{\begin{array}{rr} -x + y & \\ x - y & \\ & z \end{array}}_{(D-2I)\vec{c}} & \begin{array}{l} = 0\\ = 0\\ = 0\end{array}\end{array}\right. \quad \begin{cases} y = x\\ z = 0\end{cases} \text{ donc } \vec{c} = \begin{pmatrix}x\\ x\\ 0\end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\vec{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : **0**, **3**, et **2**.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f\left(\overrightarrow{c}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{array}{rrr} -x & + y & \\ x & - y & \\ & & z \end{array}}_{(D-2I)\overrightarrow{c}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = 0 \end{array} \right. \quad \text{donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : **0**, **3**, et **2**.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{c})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{rrrl} -x & + y & & = 0 \\ x & - y & & = 0 \\ & & z & = 0 \end{array} \right.}_{(D-2I)\overrightarrow{c}} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = 0 \end{array} \right. \quad \text{donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Conclusion : Dans la base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ la matrice de f est $\begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$.

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{c})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \left\{ \underbrace{\begin{matrix} -x + y \\ x - y \\ z \end{matrix}}_{(D-2I)\overrightarrow{c}} \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{matrix} \right. \quad \left\{ \begin{matrix} y = x \\ z = 0 \end{matrix} \right. \quad \text{donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Conclusion : Dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$.

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, et $\mathbf{2}$.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**
   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{c})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{array}{rcl} -x + y & & \\ x - y & & \\ & & z \end{array}}_{(D-2I)\overrightarrow{c}} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array} \end{array} \right. \quad \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Conclusion : Dans la base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$.

III. Matrices particulières.

Exemple n° 7 : Notons f un endomorphisme ayant la matrice D de l'exemple précédent dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

1. f a trois valeurs propres : **0**, **3**, et **2**.
2. **Recherche des sous-espaces propres :**

   - Recherche du vecteur propre $\overrightarrow{c}$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{2}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{f(\overrightarrow{c})} = \underbrace{\begin{pmatrix}2x\\ 2y\\ 2z\end{pmatrix}}_{2\overrightarrow{c}} \quad \left\{\begin{array}{l}\underbrace{\begin{array}{rrr}-x & +y & \\ x & -y & \\ & & z\end{array}}_{(D-2I)\overrightarrow{c}}\end{array}\begin{array}{l}=0\\ =0\\ =0\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}y = x\\ z = 0\end{array}\right. \quad \text{donc } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix}x\\ x\\ 0\end{pmatrix}$$

Pour $x = 1$, on a le vecteur propre $\left[\overrightarrow{c}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

Conclusion : Dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ la matrice de f est $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.