

Exercice n° 1 : Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{E}$, vous allez étudier l'endomorphisme f définie par

$$\text{mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- i. Détermine le polynôme caractéristique de f ; $P(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -6 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$
- ii. Détermine ses valeurs propres réelles ; $\Delta = 1 : \lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$
- iii. Détermine les sous-espaces propres associés à chacune de ses valeurs propres réelles ;

- Pour $\lambda_1 = 1$: $\begin{cases} (-2 - \textcolor{red}{1})x - 6y = 0 \\ 2x + (5 - \textcolor{red}{1})y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3x - 6y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \quad \text{soit } x = -2y \text{ d'où } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Pour $\lambda_2 = 2$: $\begin{cases} (-2 - \textcolor{red}{2})x - 6y = 0 \\ 2x + (5 - \textcolor{red}{2})y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4x - 6y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \quad \text{soit } x = -\frac{3}{2}y \text{ d'où } \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

- iv. Détermine une base β où la matrice de f est diagonale, et précise sa matrice dans cette base.

Dans la base $\beta = (\vec{a}, \vec{b})$, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$