

Exercice n° 1 : Dans le plan vectoriel \mathbb{R}^2 , on considère les deux bases $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$. On sait que $[\vec{f}_1]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $[\vec{f}_2]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Détermine la matrice de passage de la base \mathcal{E} à la base \mathcal{F} . $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- Détermine la matrice de passage de la base \mathcal{F} à la base \mathcal{E} . $P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice n° 2 : Dans le plan vectoriel \mathbb{R}^2 , on considère les deux bases $\alpha = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ et $\beta = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ où la matrice de passage de la base α à la base β est $P_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et celle de la base β à la base α est $P_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

- Sachant que $[\vec{u}]_{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ calcule $[\vec{u}]_{\alpha}$ $[\vec{u}]_{\alpha} = P_{\alpha}^{\beta} [\vec{u}]_{\beta} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}$
- Sachant que $[\vec{v}]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ calcule $[\vec{v}]_{\beta}$ $[\vec{v}]_{\beta} = P_{\beta}^{\alpha} [\vec{v}]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Sachant que $\text{mat}_{\alpha}^{\alpha}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, détermine $\text{mat}_{\beta}^{\beta}(f)$.

$$\text{mat}_{\beta}^{\beta}(f) = P_{\beta}^{\alpha} \text{mat}_{\alpha}^{\alpha}(f) P_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -22 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{mat}_{\beta}^{\beta}(f) = P_{\beta}^{\alpha} \text{mat}_{\alpha}^{\alpha}(f) P_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -22 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$