

Exercice n° 1 : Dans \mathbb{R}^3 , on considère les trois vecteurs $\vec{u} = (1, 4, 2)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$, et $\vec{w} = (3, -1, 4)$, et on note \mathcal{F} la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

1. La famille \mathcal{F} est-elle libre ?

Réolvons le système $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ qui s'écrit
$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ 4a + 2b - c = 0 \\ 2a + b + 4c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ -6b - 13c = 0 \\ -3b - 2c = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_2 - 4L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ -6b - 13c = 0 \\ 9c = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ 2L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

La famille \mathcal{F} est libre.

2. La famille \mathcal{F} forme-t-elle une base de \mathbb{R}^3 ?

Une famille libre de 3 vecteurs engendre un sous-espace vectoriel de dimension 3, donc \mathcal{F} forme une base de \mathbb{R}^3 .

3. Quel est le rang de la famille \mathcal{F} ?

La famille \mathcal{F} engendre un sous-espace vectoriel de dimension 3, donc son rang est 3.