Corrigé du devoir

Exercice n° 1 : Si $\begin{cases} u^2 - uv = xy \\ yu + v^2 = y^2 \end{cases}$.

1. Dérive par rapport à x, le système de deux equations, en considérant u et v comme des fonctions des deux variables libres x et y :

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial x}v - u\dfrac{\partial v}{\partial x} = y \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (2u-v) & \times\dfrac{\partial u}{\partial x} & -u & \times\dfrac{\partial v}{\partial x} & = y \\ y & \times\dfrac{\partial u}{\partial x} & +2v & \times\dfrac{\partial v}{\partial x} & = 0 \end{cases}$$

2. Calcule $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} y & -u \\ 0 & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u-v & -u \\ y & 2v \end{vmatrix}} = \frac{2vy}{4uv - 2v^2 + uy}$$

Exercice n° 2 : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est-il une combinaison linéaire des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$? Et si oui, laquelle ?

$$a\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{cases} -a + 5b & = -3 \\ 2a & = 1 \\ a + 3b & = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 5b & = -5/2 \\ a & = 1/2 \\ 3b & = -3/2 \end{cases} \quad \begin{cases} b & = -1/2 \\ a & = 1/2 \\ b & = -1/2 \end{cases}$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, d'ailleurs $\overrightarrow{w} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{u} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{v}$.